REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

P. COMPÈRE

Détermination des intervalles de confiance d'une loi de survie par la méthode du Bootstrap

Revue de statistique appliquée, tome 45, nº 2 (1997), p. 21-37
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1997__45_2_21_0>

© Société française de statistique, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Rev. Statistique Appliquée, 1997, **XLV** (2), 21-37

DÉTERMINATION DES INTERVALLES DE CONFIANCE D'UNE LOI DE SURVIE PAR LA MÉTHODE DU BOOTSTRAP

P. Compère

Société Européenne de Propulsion, Forêt de Vernon
27207 Vernon cedex, France

RÉSUMÉ

L'article présente une application de la méthode du Bootstrap à la détermination des intervalles de confiance des paramètres et de la loi de survie d'un matériel décrit par une distribution de Weibull.

Il montre l'intérêt et le caractère très pratique de cette méthode par rapport aux méthodes classiques. De plus, cette méthode est aisément programmable sur P.C. et de ce fait accessible à tous.

Mots-clés : *Fiabilité, Loi de survie, Weibull, Bootstrap, Intervalles de confiance.*

ABSTRACT

The paper describe an application of the Bootstrap method to determine the confidence intervals of the parameters and of the survival life of a material described by a Weibull law. It shows the benefit, the easiness and the practical feature of that method in comparison with classical methods. Moreover, it is easily programmable on P.C..

Keywords : *Reliability, Survival life, Weibull, Bootstrap, Confidence intervals.*

1. Introduction

L'analyse des historiques et des incidents permet de tracer les lois de fiabilité de matériels pour lesquels le nombre d'incidents et le temps ou le nombre de manœuvres est suffisant.

Malheureusement, les essais effectués portent en général sur des effectifs faibles. En particulier, dans le domaine aérospatial, ils ne sont pas toujours conduits jusqu'à défaillance de tous les matériels : des matériels non encore défaillants sont retirés à des instants différents de leur vie. Il est cependant nécessaire d'utiliser cette information afin de ne pas se pénaliser davantage par le manque d'information.

Lorsque le taux de défaillance est fonction du temps on fait appel, de manière assez classique, à la loi de distribution de Weibull à 2 ou 3 paramètres. Le traitement

des données passe en général par un ajustement graphique à partir duquel on estime les valeurs des paramètres. Toutefois, l'estimation ponctuelle de ces paramètres est insuffisante pour décrire convenablement la loi de survie. En effet, plus la population est faible, plus l'incertitude sur leur détermination est importante. C'est pourquoi la détermination des intervalles de confiance des paramètres et de la loi de survie elle-même est souvent nécessaire.

Toutefois cette détermination des intervalles de confiance est souvent difficile, dans le cas de la loi de Weibull, en raison de considérations théoriques propres à cette loi. La méthode du Bootstrap, de développement récent, peut à ce niveau présenter un intérêt significatif.

Nous rappellerons d'abord quelques notions sur la loi de survie et la méthode d'ajustement classique, propre à la loi de Weibull, en l'illustrant à l'aide d'un exemple, puis nous présenterons l'application de la méthode du Bootstrap à ce même exemple. Le cas de matériels non réparables sera seul envisagé.

2. Problème posé

On dispose d'une population consistant en 16 prototypes de vannes parmi lesquels 11 ont présenté une défaillance ($d = 1$) et 5 ont été arrêtés à des instants différents de leur vie ($d = 0$).

Les durées de fonctionnement (T) sont données dans le tableau 1.

TABLEAU 1
Population initiale

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
T (s)	500	600	710	711	875	950	1075	1155	1214	1220	1319	1390	1639	1800	2053	2142
d	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1

Le problème est de déterminer la loi de survie des prototypes de vannes avec les intervalles de confiance associés aux paramètres et à la loi elle-même.

3. Etude d'une loi de survie

3.1. Méthode

On fait appel à la loi de Weibull pour caractériser l'évolution de la fiabilité $R(t)$ en fonction du temps [1].

$$R(t) = \exp - \left[\frac{t-\gamma}{\eta}\right]^{\beta} \tag{1}$$

Avec :

β : le paramètre de forme

η : le paramètre d'échelle

γ : le paramètre de position.

En posant : $F(t) = 1 - R(t)$ la défiabilité du matériel, on déduit :

$$Y = \text{Ln Ln}\left(\frac{1}{1 - F(t)}\right) = \beta \text{ Ln } (t - \gamma) - \beta \text{ Ln } \eta \tag{2}$$

c'est une forme linéaire (si γ est connu) qui s'écrit en posant $X = \text{Ln } (t - \gamma)$, $C = -\beta \text{ Ln } \eta$

$$Y = \beta X + C \tag{3}$$

Pour tracer la fonction de répartition expérimentale, on utilise un graphique à échelle fonctionnelle (X, Y), ou graphique d'Allan Plait.

Ce graphique est gradué en pourcentage cumulé de défaillances F en ordonnée et en durée t de fonctionnement en abscisse.

On commence l'analyse en posant $\gamma = 0$. Si le tracé des points expérimentaux s'ajuste de façon sensiblement linéaire, on peut considérer que la loi de survie est une loi de Weibull de paramètre $\gamma = 0$. Les deux autres paramètres de la loi se lisent alors sur le diagramme :

– la pente de la droite donne β

– la valeur caractéristique pour $Y = 0$ donne η.

Si par contre le lissage des points expérimentaux révèle une courbure régulière, il est possible d'ajuster graphiquement une valeur de γ (par translation) pour transformer la courbure initiale en une droite.

3.2. Estimation de F (t)

Afin de pouvoir utiliser la totalité de l'information (essais interrompus et essais avec défaillance), il est commode d'utiliser la méthode des rangs corrigés ou méthode de Johnson ([2], [3]).

Pour celà, on calcule un ordre artificiel pour chaque défaillance tenant compte des essais interrompus.

Soit :

N : nombre total de matériels.

i : numéro d'ordre des matériels rangés en durée croissante de fonctionnement.

$r(i)$: rang corrigé pour un matériel défaillant avec $r(0) = 0$.

$d(i)$ = 0 ou 1 essai interrompu ou défaillant.

On définit par ailleurs un incrément I tel que :

$$I = \frac{(N + 1) - (\text{rang corrigé précédent})}{1 + (\text{nombre de matériels suivant le dernier interrompu})}$$

Le rang corrigé du $i^{\text{ème}}$ défaillant est alors : $r(i) = I + r(i-1)$.

Ce rang corrigé peut encore s'exprimer par l'équation de récurrence suivante :

$$r(i) = \frac{(N+1) - r(i-1)}{(N+2) - i} d(i) + r(i-1) \tag{4}$$

La défiabilité estimée à chaque instant de défaillance ou d'essai interrompu, $\widehat{F}(t_i)$, peut être évaluée par la formule de Bénard (bonne approximation du rang médian) :

$$\widehat{F}(t_i) = \frac{r(i) - 0,3}{N + 0,4} \tag{5}$$

Le tracé des points $\left(t_i;\ \widehat{F}(t_i)\right)$ sur le diagramme fonctionnel permet alors de visualiser le comportement du matériel :

- points alignés $\Longrightarrow \gamma = 0$
- courbure $\Longrightarrow$ ajuster une valeur de γ
- rupture de pente $\Longrightarrow$ plusieurs modes de défaillance (il faut alors décomposer l'analyse).

Il est nécessaire de tracer et de visualiser cette représentation pour décider de la nécessité d'ajouter un γ si l'on observe une courbure ou pour se rendre compte d'une rupture de pente quand il existe une combinaison de plusieurs modes de défaillances (par exemple mélange de pannes précoces et de pannes d'usure).

3.3. Intervalles de confiance

Comme on l'a dit, il est important de calculer la précision sur l'estimation des paramètres et de la loi de survie (cas où l'on a peu de défaillances). Différentes méthodes «classiques» ont déjà été proposées.

Selon les références [2] et [5], les intervalles de confiance pour β et η ne sont calculables que dans des cas précis d'une population importante et sans suspension d'essai. Nelson [4] traite de façon détaillée l'analyse théorique de l'estimation de ces coefficients, des intervalles de confiances associés et des conditions d'application.

En ce qui concerne l'intervalle de confiance sur la fiabilité $R(t)$, celui-ci peut être obtenu par plusieurs méthodes. Nous présentons ci-dessous trois exemples d'estimation que nous comparerons à la méthode du Bootstrap. On prendra un intervalle de confiance de 90%.

1) La méthode de Kolmogorov-Smirnov [12]

Méthode classiquement utilisée, l'intervalle de confiance est une bande de confiance autour de la fiabilité estimée telle que :

$$R(t) \in [\widehat{R}(t) - KS(\alpha, N);\ \widehat{R}(t) + KS(\alpha, N)]$$

Avec : $\widehat{R}(t)$ estimation ponctuelle de $R(t)$.

Pour $\alpha = 10\%$ et $N = 16$ la table de K et S donne $KS(0,1;\ 16) = 0,295$.

2) La méthode des rangs [7]

La méthode des rangs à 5% et 95% délimite un intervalle de confiance à 90% :

– soit par les tables de rangs de Johnson [8]

– soit à partir de la loi binomiale [9].

Dans ce deuxième cas, on recherche le fractile théorique F_α tel que :

$$\sum_{i=r(N)}^{N} C_N^i \cdot [F_\alpha(x)]^i \cdot [1 - F_\alpha(x)]^{N-i} = \alpha \tag{6}$$

pour $\alpha = 5\%$ et 95% et pour chaque matériel avec défaillance.

Cette méthode permet de tracer les limites de confiance pour chaque point avec défaillance, mais elle ne donne pas de courbes continues.

3) La méthode paramétrique [2]

Cette méthode est issue d'une étude de Kanofsky [6] proposant une construction de bandes de confiance paramétriques; elle a été étendue par Abernathy [2] au cas de la loi de Weibull.

$$R(t) \in [\widehat{R}(t) - K_{1-\alpha}(N);\ \widehat{R}(t) + K_{1-\alpha}(N)]$$

Les valeurs numériques $K_{1-\alpha}(N)$ sont données dans [2], pour un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha = 90\%$.

On a ajusté ces valeurs, pour l'application sur tableur, à la loi suivante :

$$K_{0,90}(N) = 1,15 \cdot N^{-0,76} + 0,048 \tag{7}$$

Pour $N = 16$ on trouve $K_{0.90}(16) = 0,178$.

Cette méthode donne des intervalles de confiance continus, proches des valeurs calculées par la méthode de Kolmogorov-Smirnov, mais, comme celle-ci, non significatives pour des fiabilités R proche de 1 et de 0.

3.4. Application

Nous avons programmé l'ensemble des formules précédentes à l'aide du tableur EXCEL et nous les avons appliquées au problème posé au § 2.

Les résultats sont les suivants :

1) *Visualisation du nuage de points* dans la représentation $[X, Y]$ (voir figure 4).

Les points sont à peu près alignés, ce qui permet de poser $\gamma = 0$.

2) *Calcul de la droite de régression*

Détermination des paramètres β et η et du coefficient de corrélation Rc entre les points et la droite estimée :

$$\beta = 2,822 \qquad \eta = 1553 \qquad Rc = 0,988 \text{ (bonne corrélation)}$$

on peut donc estimer ponctuellement la loi de survie en écrivant :

$$\widehat{R}(t) = \exp - \left(\frac{t}{1553}\right)^{2.822}$$

Cette loi est représentée sur la figure 5.

4. Méthode du Bootstrap

4.1. Principe

Le Bootstrap a été introduit par B. EFRON en 1979, comme une méthode informatique d'estimation totalement automatique [10].

Cette méthode numérique, basée sur le calcul intensif par ordinateur, s'appuie sur le principe d'un ré-échantillonnage obtenu à partir de la population initiale; elle permet d'estimer les caractéristiques du phénomène aléatoire qui a engendré les données. Le Bootstrap est une méthode parfaitement adaptée pour les tests d'hypothèses, les intervalles de confiance et de nombreux problèmes de statistique. Il extrait davantage d'information et avec une plus grande précision. Cette méthode est maintenant bien validée par de nombreuses études statistiques et elle a permis de résoudre un grand nombre de problèmes qui attendaient une solution depuis longtemps. Elle peut être utilisée avec bénéfice en fiabilité dans le calcul d'une loi de survie.

Lorsqu'une distribution est connue on utilise classiquement la méthode de Monte Carlo. Mais lorsque la distribution est inconnue et que la taille de l'échantillon est faible, l'utilisation du Bootstrap est bien adaptée; il est cependant nécessaire d'avoir au moins une quinzaine de valeurs.

A partir de la fonction de répartition obtenue sur la population initiale on génère un grand nombre d'échantillons, appelés réplications Bootstrap et de même taille que la population initiale, par tirage aléatoire avec remise. A la différence de la population initiale ces échantillons présentent des répétitions. Chaque nouvel échantillon ainsi généré peut alors faire l'objet de la démarche loi de survie du §3.4 et l'on calcule à chaque fois les nouvelles valeurs des caractéristiques β et η.

Avec l'ensemble des réplications Bootstrap on peut toujours tracer les distributions statistiques des caractéristiques β et η qui permettent alors de déterminer des

intervalles de confiance sans qu'il soit nécessaire de s'interroger sur la validité de la démarche, sans s'appuyer sur des hypothèses spécifiques ni recourir à des modèles mathématiques complexes ou à des tables. De plus, par un calcul pas à pas il est possible d'évaluer et de tracer les intervalles de confiance sur la fiabilité $R(t)$.

4.2. Application au cas $\gamma = 0$

Nous avons programmé une macro EXCEL pour générer de manière aléatoire un échantillon de 1000 réplications Bootstrap à partir de la fonction de répartition correspondant aux données initiales. Chacune des 1000 réplications ainsi générées a pour taille la population initiale, soit ici 16.

Nous avons tracé les histogrammes des distributions obtenues de β et η (figures 1 et 2).

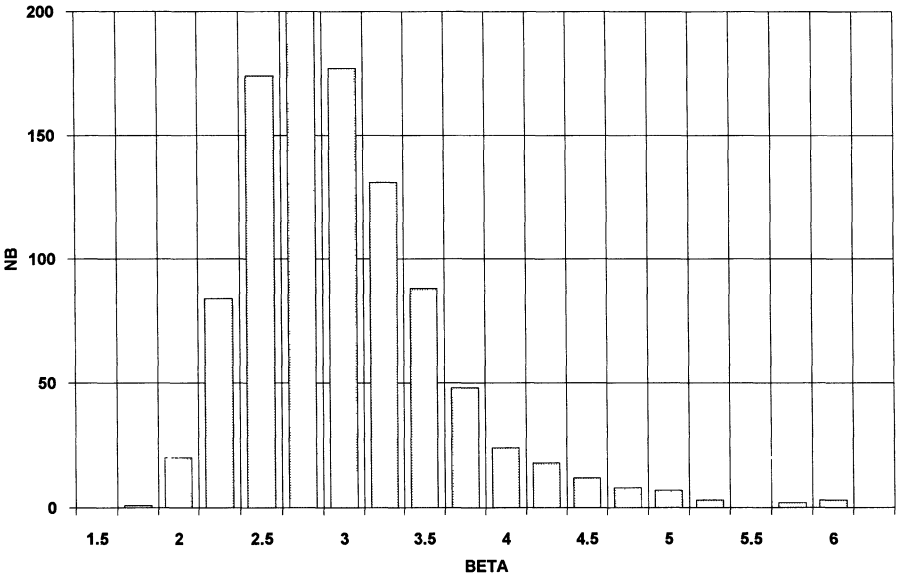

FIGURE 1
Distribution de β

Il est alors aisé de déterminer les bornes de l'intervalle de confiance de chaque distribution après avoir classé les 1000 valeurs obtenues sur β et γ en ordre croissant :

– Dans le cas d'une distribution symétrique, telle que η, on peut prendre les valeurs η_{50}, η_{950} (respectivement fractiles à 5% et à 95%) déterminant un intervalle de confiance bilatéral symétrique.

– Dans le cas d'une distribution non symétrique, telle que β, on a choisi un intervalle de confiance bilatéral dissymétrique afin d'éliminer la queue de distribution et de resserrer les bornes de l'intervalle de confiance $[\beta_{\text{mini}};\ \beta_{\text{maxi}}]$ (figure 3).

On calcule les écarts : $e_i = \beta_{\text{maxi}} - \beta_{\text{mini}} = \beta_{i+900} - \beta_i$ et on recherche l'écart minimum e_i.

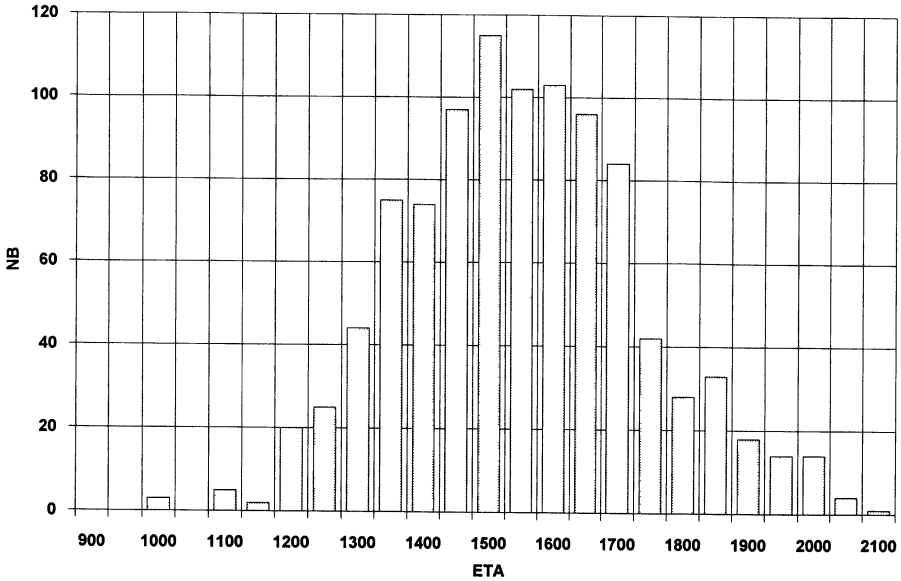

FIGURE 2
Distribution de η

On trouve, dans notre exemple, l'écart minimum pour $i = 26$ avec $e_{26} = 1,713$ d'où l'intervalle de confiance : $[\beta_{26}; \beta_{926}]$.

On note PI les valeurs de β et η obtenues avec la population initiale.

Pour la distribution de η la différence entre l'écart mini et l'écart valeurs centrées est négligeable.

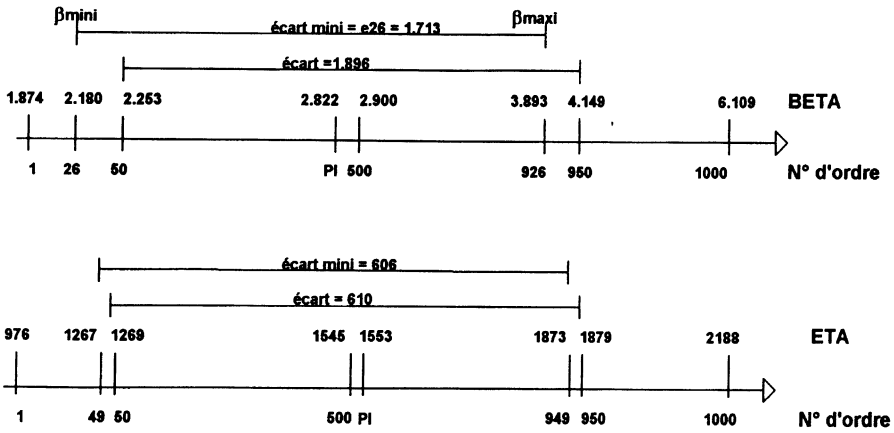

FIGURE 3
Intervalles de confiance sur β et η

Les intervalles de confiance sont alors les suivants, pour un niveau de confiance de 90% :

$$\boxed{\begin{array}{l}\beta \in [2,180; 3,893] \\ \eta \in [1267; 1873]\end{array}}$$

On vérifie que β et η ne sont pas corrélés (le coefficient de corrélation entre les 2 paramètres est nul).

On peut de même tracer l'évolution de la fiabilité $R(t)$.

En représentation de Weibull on calcule la droite de régression $Y_d = \beta X + C$ et les limites à 5% et 95% de confiance.

Pour une durée de fonctionnement t_i, on classe les 1000 valeurs estimées $\widehat{R}_i$ par ordre croissant et on retient les fractiles à 5% et à 95% ($\widehat{R}_{50}$ et $\widehat{R}_{950}$).

Ce sont les courbes BS50 et BS950 {BS : Bootstrap} obtenues par un calcul pas à pas (figure 4).

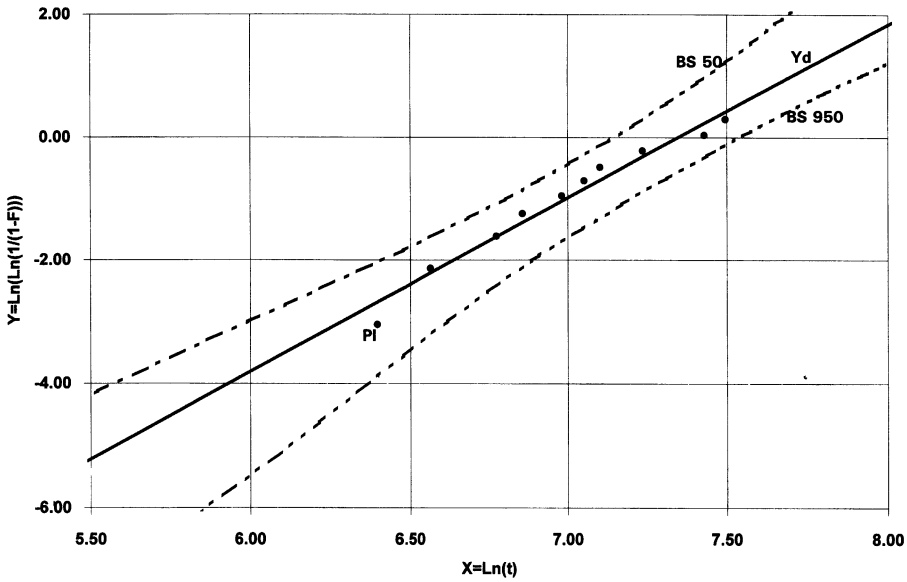

FIGURE 4
Représentation de Weibull

On appelle PI les points relatifs à la population initiale.

On obtient de même l'ensemble de la loi de survie et son intervalle de confiance pour les différentes valeurs de t (figure 5).

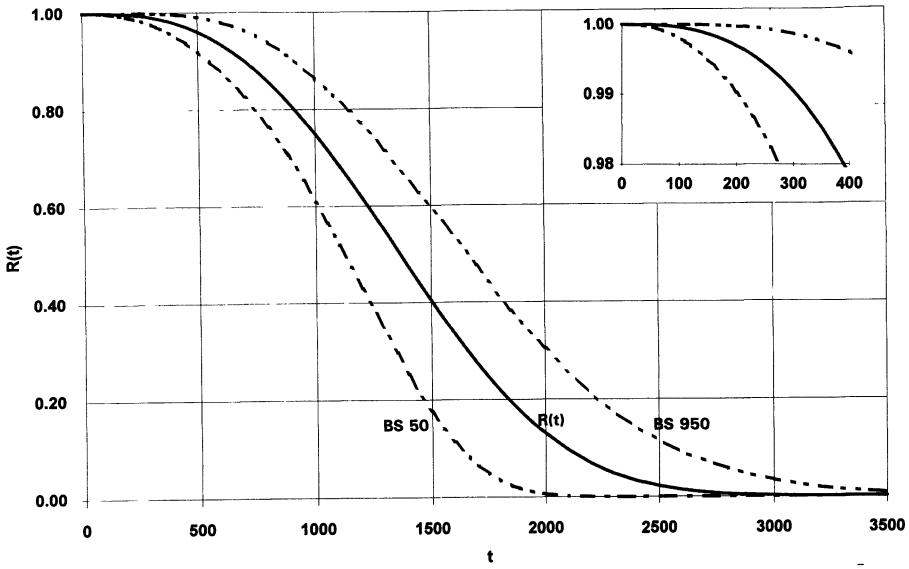

FIGURE 5
Loi de survie R(t)

Comparaison des intervalles de confiance (figures 6 et 7)

On a superposé les intervalles de confiance calculés suivant les 3 méthodes décrites au § 3.3 à ceux obtenus par la méthode du Bootstrap. On a appelé les limites à 5% et 95% :

– KS5 et KS95 : pour la méthode de Kolmogorov-Smirnov;

– B5 et B95 : pour la méthode des «bandes» paramétriques;

– R5 et R95 : pour la méthode des «rangs».

Pour la représentation de Weibull, (figure 6), on obtient un ajustement par la méthode du Bootstrap cohérent avec les autres méthodes surtout dans la zone de l'intervalle minimum, autour de $\mathrm{Ln}\ (t) = 7$.

Pour la loi de survie, (figure 7), l'intervalle de confiance s'accroît progressivement à partir de $R(0) = 1$ et se réduit naturellement lorsque $R(t)$ devient faible, ce qui n'apparaît pas pour les autres méthodes. L'intervalle de confiance correspondant aux valeurs élevées de la fiabilité, qui caractérisent la période de fonctionnement du matériel, n'est bien décrit que par la méthode du Bootstrap.

4.3. Application au cas $\gamma \neq 0$

Dans l'exemple précédent le coefficient de corrélation Rc de la droite moyenne était égal à 0,988. On peut essayer d'améliorer encore la qualité de l'ajustement en ajoutant un paramètre γ provoquant un décalage en abscisse : $\mathrm{Ln}\ (t - \gamma)$ dans la représentation de Weibull.

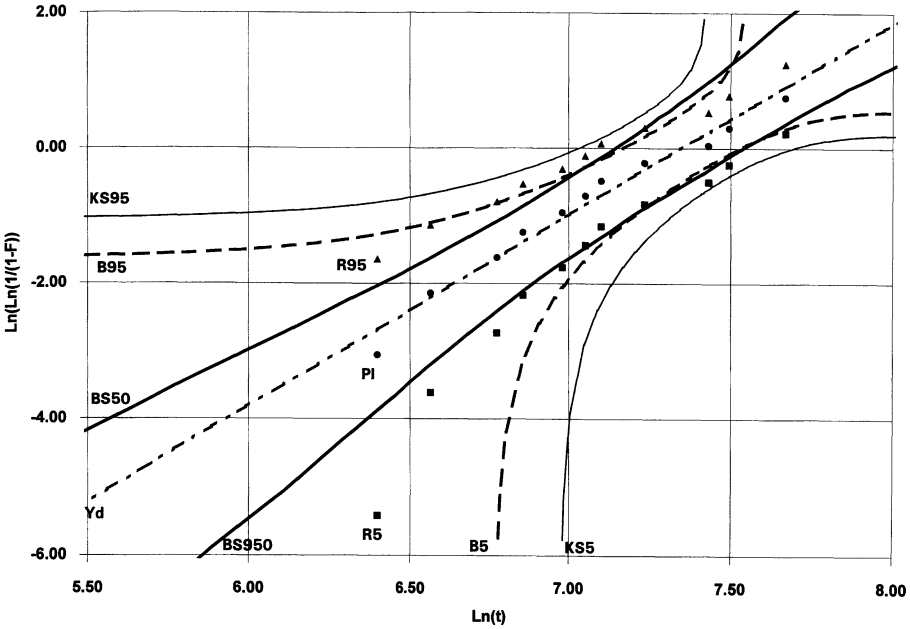

FIGURE 6
Représentation de Weibull

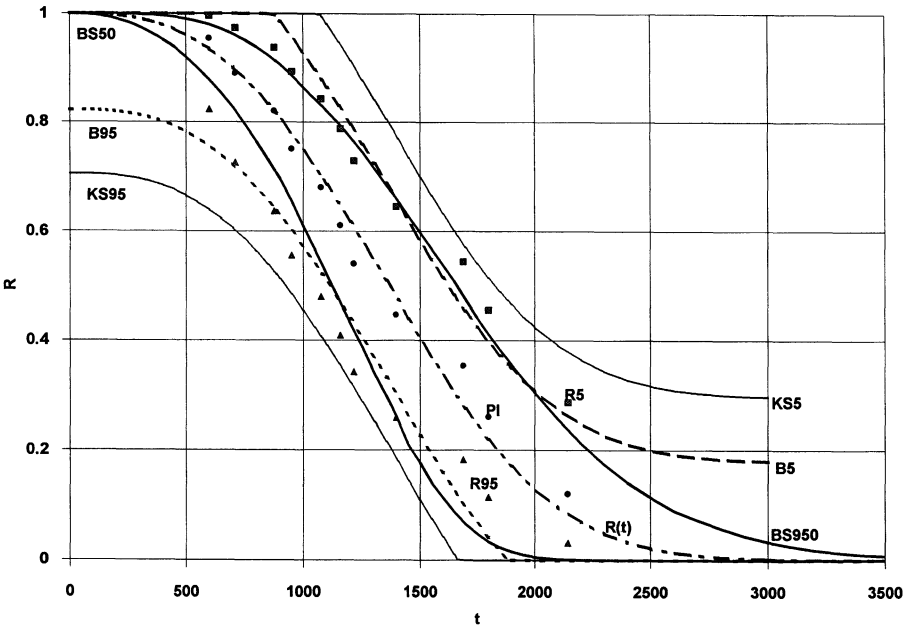

FIGURE 7
Loi de survie R(t)

La relation entre Rc et γ ne peut être écrite de manière littérale. Il est nécessaire de calculer, pour chaque valeur de γ, la valeur résultante de Rc; c'est une fonction convexe unimodale telle que représentée sur la figure 8 (1er quadrant). Cette fonction n'est pas définie lorsque γ dépasse une valeur limite, cette valeur correspondant à la durée de fonctionnement à la première défaillance observée.

Pour la population initiale on trouve sur le tableau 1 : $\gamma_{\text{lim}} = 600$.

La figure 8 montre la relation existant entre Rc et les 3 paramètres γ, β et η pour la population initiale. Chaque demi-axe correspond à un paramètre, l'étendue (valeurs entre parenthèses) est donnée entre l'intersection des 2 axes et l'extrémité du demi-axe.

Lorsque $\gamma = 0$ on retrouve les résultats du § 3.4.

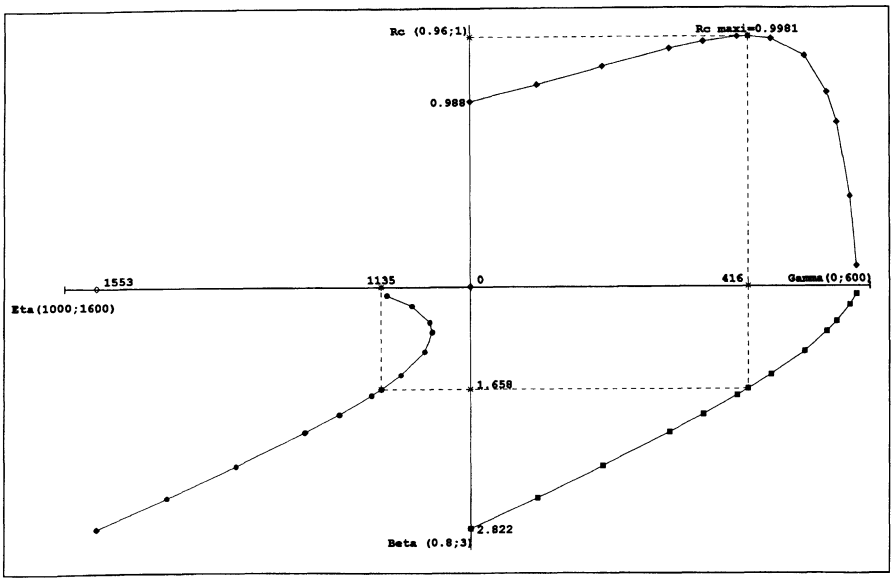

FIGURE 8
Relations Rc γ β η pour la population initiale

On détermine donc la valeur de γ qui maximise la fonction Rc (Rc maxi). On a utilisé une méthode de recherche séquentielle [11]. On calcule 4 valeurs de Rc pour 4 valeurs de γ, on retient la valeur de γ donnant Rc maximum, on calcule 4 nouvelles valeurs Rc pour 4 nouvelles valeurs de γ entourant le γ retenu précédemment, on réitère le processus jusqu'à la précision voulue.

Les calculs effectués sur la population initiale ont donné :

$$\beta = 1,658 \qquad \eta = 1135 \qquad \gamma = 416 \qquad Rc\,\text{maxi} = 0,9981$$

Pour déterminer les intervalles de confiance, on a calculé un nouvel échantillon Bootstrap de 1000 réplications. Les intervalles de confiance obtenus (toujours au

niveau 90%) sont alors les suivants :

$$\gamma \in [-440; 900] \qquad \beta \in [0,5; 4,0] \qquad \eta \in [430; 2000]$$

Afin de visualiser la relation existant entre la valeur maxi de Rc et les 3 paramètres de la loi de Weibull, on a tracé, figure 9, la représentation des résultats obtenus sur une centaine de réplications Bootstrap; on a de plus indiqué la position de la population initiale (PI).

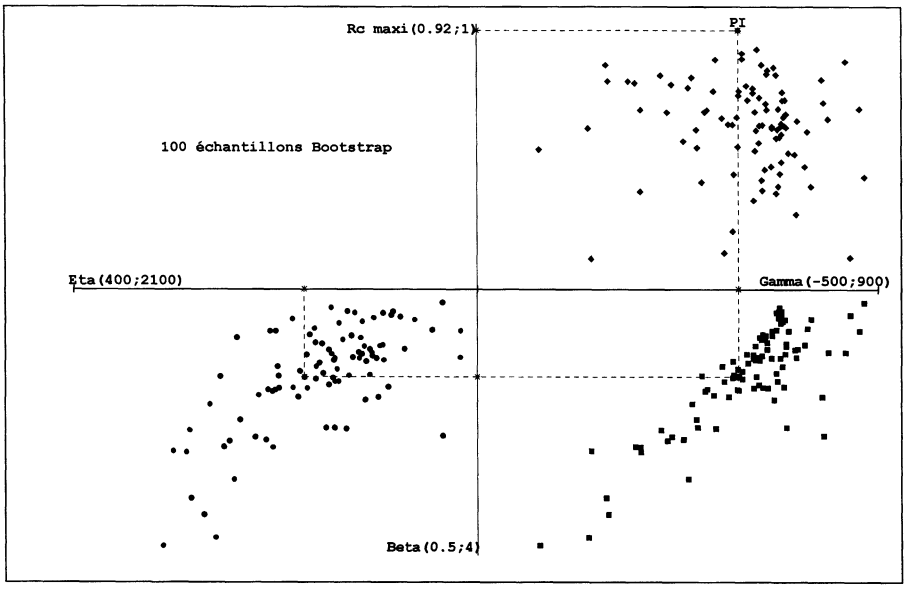

FIGURE 9
Relations Rc γ β η pour 100 réplications Bootstrap.

On remarque que les 3 paramètres ne sont pas indépendants.

On a calculé les corrélations 2 à 2 suivantes :

$\beta \cdot \gamma$	$\beta \cdot \eta$	$\eta \cdot \gamma$
-0.92	0.80	-0.89

L'étendue importante de l'intervalle de confiance observée sur γ se retrouve sur les intervalles de confiance de β et η.

Cependant une analyse plus approfondie montre que le gain obtenu sur Rc reste inférieur à 1% de la valeur initiale Rc ($\gamma = 0$) lorsque γ est inférieur à 400.

Le sous-domaine $\gamma \in [-440; 400]$ correspond à $\beta \in [2; 4]$ et $\eta \in [1200; 2000]$, on retrouve les étendues de β et η obtenues pour $\gamma = 0$.

Les intervalles de variation apportant un gain supérieur à 1% sur Rc sont alors :

$$\gamma \in [400;\ 900], \qquad \beta \in [0,5;\ 2], \qquad \eta \in [430;\ 1200]$$

On a calculé l'intervalle de confiance sur la loi de survie $R(t)$, en prenant les familles $\{\beta_i, \eta_i, \gamma_i\}$ pour calculer les R_i. La représentation graphique (figure 10) montre le nouvel intervalle de confiance obtenu.

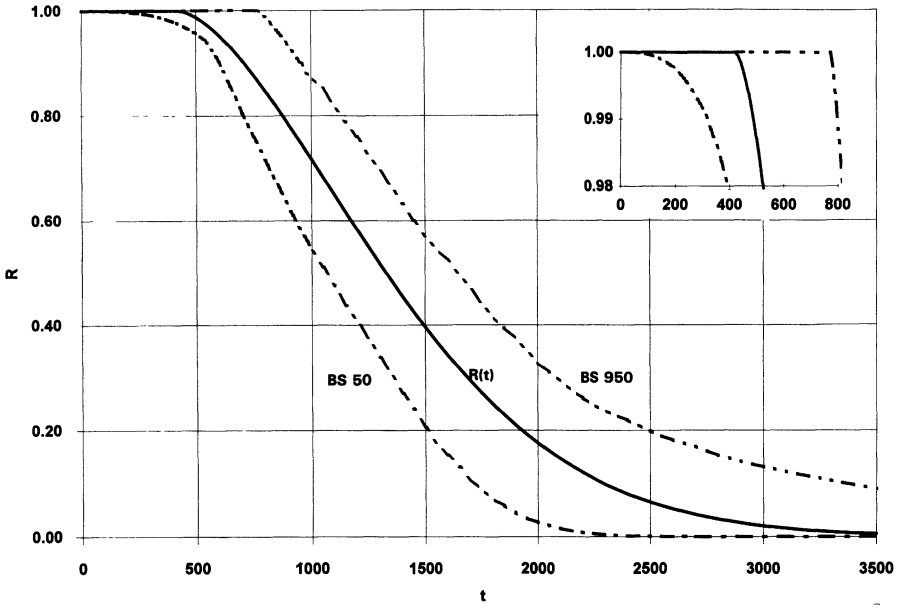

FIGURE 10
Loi de survie avec $\gamma \neq 0$

4.4. Influence du nombre de réplications Bootstrap sur la précision

Les calculs peuvent être relativement longs sur un ancien PC. Cependant sur un Pentium 133 MHz, le calcul de 1000 réplications Bootstrap ne dure que 70 s lorsque $\gamma = 0$ et 15 mn lorsque $\gamma \neq 0$. Les autres calculs pour tracer la loi de survie et son intervalle de confiance ne nécessitent que 3 mn dans notre exemple.

Nous avons étudié l'influence de la taille de l'échantillon Bootstrap sur la précision du résultat dans le cas du calcul des intervalles de confiance sur les coefficients β et η ($\gamma = 0$).

Nous avons représenté l'évolution du coefficient de variation $Cv = \sigma/m$ en fonction de la valeur moyenne m calculée sur 20 échantillons Bootstrap, figures 11 et 12, et ceci pour 100, 200, 500 et 1000 réplications Bootstrap dans le cas de la médiane et des bornes de confiance maxi et mini.

Les valeurs de β et de η de la population initiale sont de plus indiquées (PI avec $\sigma = 0$).

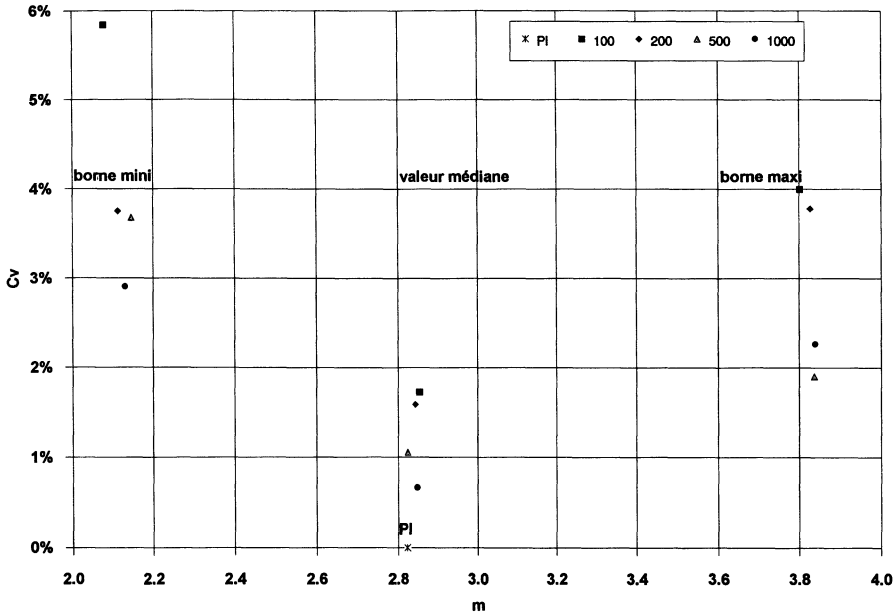

FIGURE 11
Précision sur β

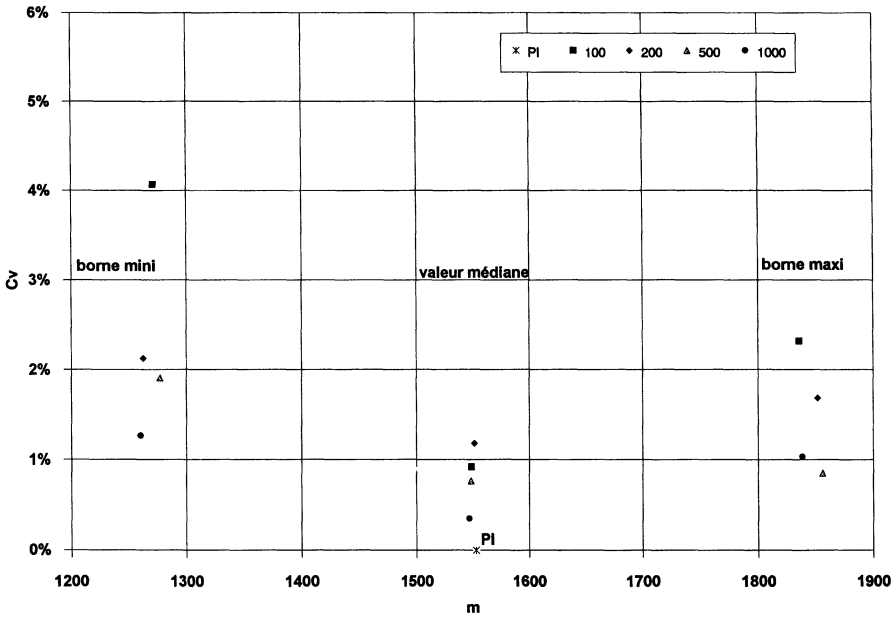

FIGURE 12
Précision sur η

Par exemple : à partir de 100 réplications Bootstrap on peut évaluer les valeurs médianes (β_{50}; η_{50}) et les bornes maxi et mini par la méthode du § 4.2; on réitère le calcul 20 fois, on obtient 6 distributions (valeurs médianes, bornes maxi et bornes mini pour β et η); on calcule alors la valeur moyenne m et l'écart type σ de chacune de ces distributions.

La dispersion des résultats, caractérisée par le coefficient de variation Cv, diminue naturellement avec l'accroissement du nombre de réplications Bootstrap. Mais à partir d'une population de 200 réplications, l'erreur relative est inférieure à 4% pour β et à 2% pour η.

Le nombre de réplications Bootstrap peut alors être ajusté suivant la précision recherchée.

5. Conclusions

Cet article s'est attaché à montrer la faisabilité et l'intérêt de la démarche Bootstrap pour déterminer la loi de survie de matériels non réparables dans le cas d'essais interrompus avec peu de défaillances.

Il est possible de déterminer, sans prendre aucune hypothèse théorique préliminaire, les intervalles de confiance des coefficients de la loi de Weibull.

La loi de survie et son intervalle de confiance sont définis et tracés automatiquement avec une meilleure précision et une meilleure qualité que par les méthodes classiques : les résultats sont cohérents avec ces méthodes mais, de plus, des courbes continues sont obtenues dans tous les cas (γ nul ou non) et surtout une très bonne définition de l'intervalle de confiance est obtenue pour une fiabilité proche de 1, phase de fonctionnement du matériel.

Cette méthode est facile à programmer et à automatiser sur un tableur PC à partir des équations données puisqu'il ne s'agit que de calculs répétitifs et de tris.

Références bibliographiques

[1] Norme AFNOR X06-501 (1984). Applications de la statistique – Introduction à la fiabilité.

[2] ABERNATHY R.B. *et al.* (1983). Weibull Analysis Handbook. *Pratt & Whitney Aircraft.*

[3] JOHNSON L.G. (1959). The statistical Treatment of Fatigue Experiments. *General Motors Corporation.*

[4] NELSON W. (1982). Applied Life Data Analysis. John Wiley & Sons New York.

[5] O'CONNOR P.D.T., HEYDEN and SON (1981). Practical Reliability. *John Wiley & Sons New York.*

[6] KANOFSKY, SRINIVASAN (1972). An approach to the construction of parametric confidence bands on cumulative distribution functions. *Biometrika*, vol 59, 3.

[7] LIGERON J.C., LYONNET P. (1992). La fiabilité en exploitation. Lavoisier Tec & doc, Paris.

[8] JOHNSON L.G. (1951). The Median Rank of Sample value in their Population with an Application to certain Fatigue studies. *Jnd Math*, vol 2.

[9] CAST (Centre d'Actualisation Scientifique et Technique) (1985). Cours : Essais de fiabilité.

[10] EFRON B., JOLIVET E., HORDAN R. (1995). Le Bootstrap et ses Applications. *Cisia*.

[11] RICHALET, RAULT, POULIQUEN (1971). Identification des processus par la méthode du modèle. *Gordon & Breach Paris, Londres, New York*.

[12] COSTESEQUE (1985). Contrôle et analyse statistique, Fiabilité. *Planec organisation, Epinay*.