Revue de statistique appliquée

O. Lavialle
E. M. Qannari
C. Vidal

Agrégations d'ordres sous contrainte : classement de produits à partir de données sensorielles

Revue de statistique appliquée, tome 38, nº 4 (1990), p. 61-73
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1990__38_4_61_0>

Rev. Statistique Appliquée, 1990, **XXXVIII** (4), 61-73

AGRÉGATIONS D'ORDRES SOUS CONTRAINTE : CLASSEMENT DE PRODUITS A PARTIR DE DONNÉES SENSORIELLES

O. LAVIALLE (1), E.M. QANNARI (2), C. VIDAL (1)

(1) Ecole Nationale d'Ingénieurs des Travaux Agricoles de Bordeaux.
(2) Ecole Nationale d'Ingénieurs des Techniques des Industries Agricoles et Alimentaires de Nantes

RÉSUMÉ

Après avoir ramené le problème de l'évaluation sensorielle de produits par plusieurs juges selon des critères hédoniques à un problème de comparaisons par paires, nous cherchons un classement des produits tenant compte à la fois de ces comparaisons et d'un ordre donné a priori. Des solutions optimales par l'application d'un algorithme d'affectation quadratique sont recherchées pour établir ce classement.

Mots-clés : *analyse sensorielle, comparaisons par paires, graphes de surclassement, scores.*

ABSTRACT

We here reduce the problem of the sensory evaluation of products based on hedonic criteria and carried out by several judges to a paired comparisons problem and we try to obtain a placing of the products which take both this comparaisons and an a priori order into account. An optimal classification between products is obtained by the use of an algorithm of quadratic assignment.

Key-words : *sensory analysis, paired comparisons, preference graph, scores.*

1. Introduction

Le traitement de données sensorielles multicritères se fait essentiellement par le biais de l'analyse des données classique. Celle ci permet de constituer des groupes de produits semblables sur l'ensemble des critères et conduit ainsi à une classification de ces produits.

Cette approche descriptive, dans le cas de critères reposant sur des évaluations hédoniques, est généralement insuffisante en matière d'aide à la décision multicritère. En effet, on a souvent besoin de :

– trouver le «meilleur» produit,
– sélectionner un groupe de «bons» produits,

– éliminer certains produits,
– classer tous les produits.

Ces évaluations hédoniques se font soit simplement en terme de préférences globales (comparaisons par paires), soit en terme de valuation de ces préférences par critère (rangs, échelles structurées ou non). Dans le cas d'une valuation de préférences par critères, on peut construire des graphes de surclassement [ROY,VINCKE,BRANS-1976] permettant, en fait, de transformer les données en données de comparaisons par paires.

De là, on peut établir un classement des produits par la construction soit d'un préordre, soit d'un ordre -total ou partiel- (méthode des scores [DAVID-1987] agrégation des préférences [BARTHELEMY,MONJARDET-1981]).

Dans un premier temps, nous ramenons donc tout problème d'évaluation sensorielle à un problème de comparaisons par paires. Mais pour établir un classement entre des produits, on peut être amené également à tenir compte d'un ordre donné a priori. C'est le cas par exemple si l'on veut obtenir le meilleur «rapport qualité/prix» entre des produits. Pour cela, on cherche un ordre qui tienne compte à la fois des évaluations sensorielles et de l'ordre défini par une fonction téchnico-économique telle que, par exemple, le coût de fabrication.

Ce problème de classement sous contrainte d'un ordre a priori est étudié dans cet article en introduisant une fonction qui englobe des méthodes de classement proposées dans la littérature concernant le sujet.

2. Méthode de surclassement

2.1. Relation de surclassement

Les méthodes de surclassement font partie des méthodes d'aide à la décision multicritère [SHARLIG-1985]. Leur principe est de construire entre deux produits, une relation prenant en compte l'ensemble des critères. La relation utilisée ici est inspirée de la méthode ELECTRE I [ROY-1968]. Elle permet, à partir d'évaluations multicritères, d'aboutir à un graphe de surclassement.

Soit $X = x_1, ..., x_n$ un ensemble d'objets. Un produit x_i surclasse un produit x_j si x_i est au moins aussi bon que x_j pour une majorité de critères, sans être nettement plus mauvais que lui sur les autres critères. La première condition débouche sur un indice de concordance. Les critères étant pondérés, l'indice de concordance $c(x_i, x_j)$ est la somme des poids des critères pour lesquels x_i est au moins aussi bon que x_j. Cet indice doit être supérieur ou égal à une valeur p_1 appelée seuil de concordance $(0 < p_1 \leq 1)$. La seconde condition débouche quant à elle sur un indice de discordance $d(x_i, x_j)$ calculé à partir du critère pour lequel la comparaison entre x_i et x_j est la plus défavorable à x_i.

Cet indice doit être inférieur à une valeur q_1 appelée seuil de discordance $(0 < q_1 < 1)$.

La relation x_iSx_j est donc établie à partir de ces deux conditions :

$$x_iSx_j \iff \left| \begin{array}{l} c(x_i, x_j) \geq p_1 \\ d(x_i, x_j) < q_1 \end{array} \right.$$

Remarques :

* *S est réflexive : x_iSx_i, car $c(x_i, x_i) = 1$ et $d(x_i, x_i) = 0$.*

* *Entre deux produits x_i et x_j toutes les situations sont possibles, en particulier ou bien x_iSx_j et x_jSx_i ou bien ni x_iSx_j, ni x_jSx_i.*

Soit $V\tau$ la matrice d'éléments :

$$v_{\tau ij} \left| \begin{array}{l} = 1 \textit{ si } x_iSx_j \\ = 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

2.2. Graphe valué

Lorsque les produits sont soumis à plusieurs évaluations (soit par plusieurs juges, soit par le même juge à plusieurs reprises), une relation de surclassement est construite pour chacun des jugements.

Chaque jugement permet de construire le graphe de surclassement $G\tau$ de matrice incidente $V\tau$.

Soit $V = \sum_{1 \leq \tau \leq m} V\tau$,

le graphe valué G associé à $V = [v_{ij}]$ est appelé graphe de surclassement généralisé. C'est une simple superposition des graphes $G\tau$ [VIDAL,YEHIA-1990].

2.3. Matrice de préférences

La relation S étant réflexive, on obtient un nouveau graphe de matrice d'incidence $A = [a_{ij}]$ définie par :

$$a_{ij} = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } i = j \\ v_{ij} & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Cette matrice est une matrice de préférences : a_{ij} représente le nombre de fois où l'objet x_i a été préféré à x_j.

Nous avons ramené le problème de choix multicritère par plusieurs juges à un problème de comparaisons par paires en considérant la matrice $A = [a_{ij}]$ ($mij = aij + aji$ n'étant pas généralement une valeur constante, A n'est pas la matrice d'un tournoi).

3. Méthodes de classement

On se propose de classer les objets $x_1, ..., x_n$ à partir de la matrice A en cherchant des bijections ρ de X dans $I = \{1, 2, ...n\}$ minimisant un critère donné.

Ainsi, lorsque tous les $m_{ij}(i, j = 1, ..., n)$ sont constants, le critère d'agrégation des préférences le plus courant consiste à calculer le score obtenu par chaque objet et à classer les objets selon les scores décroissants. Le score $s(i)$ de l'objet x_i étant le nombre de fois où x_i est préféré aux autres.

$$s(i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Dans le cas où les valeurs m_{ij} ne sont pas des constantes, plusieurs méthodes visant à minimiser le nombre d'arcs de G à inverser pour que celui-ci devienne transitif ont été proposées. Une généralisation de ces méthodes est la suivante. Soit D l'ensemble des bijections de X dans I et Ψ une application à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On se propose de chercher les bijections ρ de Δ minimisant la fonction :

$$F(\rho) = \sum_{\rho(x_j) < \rho(x_i)} a_{ij} \Psi(x_i, x_j, \rho) = \sum a_{ij} \delta_{ij}^{\rho} \Psi(x_i, x_j, \rho)$$

$$\text{où} \quad \left| \begin{array}{ll} \delta_{ij}^{\rho} & = 1 \text{ si } \rho(x_i) > \rho(x_j) \\ & = 0 \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

– si Ψ est constante, on obtient la méthode de classement de Slater [SLATER-1961], consistant à minimiser le nombre d'arcs à inverser pour que le graphe soit transitif,

– si pour tout (x_i, x_j, ρ) de $X \times X \times \Delta$, on pose :

$$\Psi(x_i, x_j, \rho) = \rho(x_i) - \rho(x_j),$$

on retrouve la fonction objectif exposée par Frey et Yehia [FREY,YEHIA-1986] qui pénalise les arcs à inverser par la distance entre les rangs des deux objets concernés,

– si on pose :

$$\Psi(x_i, x_j, \rho) = \frac{\rho(x_i) - \rho(x_j)}{m_{ij}}$$

on retrouve la méthode proposée par Kano et Sakamoto [KANO,SAKAMOTO-1983].

Le fondement des deux dernières méthodes est de considérer que si x_i a été préféré à x_j et si la bijection ρ place x_i après x_j, il est d'autant plus grave d'inverser l'arc reliant x_i à x_j que l'écart entre $\rho(x_i)$ et $\rho(x_j)$ est grand.

Ce raisonnement explique la pondération par $\rho(x_i) - \rho(x_j)$, pondération justifiée aussi par le fait que pour un tournoi généralisé (tous les m_{ij} constants) ces méthodes sont équivalentes à la méthode des scores. Il est cependant évident que d'autres choix de la fonction Ψ seraient plus judicieux dans certains cas particuliers.

4. Agrégation sous contrainte d'ordre

4.1. Position du problème

Parallèlement à la matrice de préférences A, on se donne un ordre a priori défini par la bijection ρ_o de Δ. Soit $\overline{\rho}_o$, la bijection donnant l'ordre inverse de celui de ρ_o. Le problème est alors de trouver des classements qui réalisent un compromis entre ρ_o et les préférences relatées par la matrice A. Nous nous proposons de chercher les bijections ρ, éléments de Δ minimisant :

$$F(\rho) = \sum a_{ij}\delta_{ij}^{\rho}[\Psi(x_i, x_j, \rho) + \delta_{oij}^{\overline{\rho}}\varphi(x_i, x_j, \overline{\rho}_o)].$$

Le principe de ce critère d'optimisation est conforme à l'idée développée dans le paragraphe précédent. La quantité $\delta_{oij}^{\overline{\rho}}\varphi(x_i, x_j, \overline{\rho}_o)$ correspond à une «pénalité» supplémentaire chaque fois que x_i est moins bien classé que x_j dans l'ordre défini par ρ et mieux classé dans l'ordre a priori.

4.2. Cas particuliers

– En règle courante, il semble naturel de prendre $\varphi(x_i, x_j, \overline{\rho}_o) = \Psi(x_i, x_j, \overline{\rho}_o)$. Ainsi à partir du critère de Slater, on définit simplement le critère qui tient compte de l'ordre ρ_o donné a priori par :

$$\min_{\rho\in\Delta} \mathcal{L}(\rho) = \min_{\rho\in\Delta}[\sum a_{ij}\delta_{ij}^{\rho}(1 + \delta_{oij}^{\overline{\rho}})]$$

On voit intuitivement que le cas Slater avec contrainte d'ordre a priori ρ_o, se ramène à un Slater sans contrainte sur la matrice de préférences $B = [b_{ij}]$ avec :

$$\left|\begin{array}{l} .\ b_{ij} = 2a_{ij} \text{ si } \overline{\rho}_o(x_i) > \overline{\rho}_o(x_j) \text{ soit encore } \rho_o(x_i) < \rho_o(x_j), \\ .\ b_{ij} = a_{ij} \text{ sinon,} \end{array}\right.$$

cela revient à donner un poids double à tout arc (x_i, x_j) conforme à l'ordre défini par ρ_o. Ainsi une bijection ρ plaçant x_i derrière x_j (à l'inverse de ρ_o) conduit à une valeur de la fonction objective dans laquelle cette inversion est doublement pénalisée.

– A partir du critère pénalisant les arcs à inverser par la distance entre les rangs, la contrainte supplémentaire dûe à l'ordre ρ_o conduit à une nouvelle fonction objectif :

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum a_{ij}\delta^{\rho}_{ij}[\rho(x_i) - \rho(x_j) + \delta^{\overline{\rho}}_{\mathrm{o}ij}(\overline{\rho}_{\mathrm{o}}(x_i) - \overline{\rho}_{\mathrm{o}}(x_j))].$$

4.3. Contrainte technico-économique

Lorsque l'on introduit une contrainte supplémentaire liée à un critère technico-économique (coût de production par exemple), on peut penser l'ajouter aux critères d'évaluation et considérer, donc, un ensemble de $(p+1)$ critères. Cette façon de procéder n'est pas satisfaisante si l'on veut privilégier ce critère.

Ce critère induit un ordre ρ_{o} sur lequel on peut appliquer l'idée précédemment développée. Il est dommage, cependant, de perdre l'information correspondante en se limitant aux rangs associés. Si nous définissons, à partir des valeurs de ce critère, un poids $s(i)$ pour chaque objet, il est alors plus judicieux de tenir compte, dans la fonction à optimiser, de ces poids.

Néanmoins, pour donner aux deux termes de la fonction $\mathcal{L}(\rho)$ une importance comparable et indépendante de l'échelle de mesure du critère considéré, nous proposons de normaliser les poids $s(i)$. Ainsi en posant $t(i)(i = 1, 2, ..., n)$ la valeur du critère pour l'objet x_i, on a :

$$s(i) = \sigma(\Psi)\frac{t(i)}{\sum_i t(i)}$$

où $\sigma(\Psi)$ est une constante dépendant du choix de la fonction Ψ.

Il parait alors naturel de poser $\varphi(x_i, x_j, \overline{\rho}_{\mathrm{o}}) = \Psi(x_i, x_j, s)$, (en remarquant qu'ici s n'est pas une permutation, mais une application de X dans R^+) et de choisir comme critère :

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum a_{ij}\delta^{\rho}_{ij}[\Psi(x_i, x_j, \rho) + \delta^{\overline{\rho}}_{\mathrm{o}ij}\Psi(x_i, x_j, s)].$$

– A partir du critère de Slater $\Psi(x_i, x_j, s) = 1$ et donc l'information supplémentaire apportée par les poids $s(i)$ est perdue.

Nous retrouvons la fonction précédente :

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum a_{ij}\delta^{\rho}_{ij}(1 + \delta^{\overline{\rho}}_{\mathrm{o}ij})$$

– A partir du critère pénalisant les arcs à inverser par la distance entre les rangs, la constante de normalisation des poids est égale à :

$$\sigma(\Psi) = \frac{n(n+1)}{2}$$

(car $\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + ... + n$ est la somme des rangs d'une permutation).

Alors $s(i) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{t(i)}{\sum_i t(i)}$ et

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum a_{ij}\delta^{\rho}_{ij}[\rho(x_i) - \rho(x_j) + \delta^{\overline{\rho}}_{oij}(s(i) - s(j))].$$

5. Comparaisons par paires valuées

5.1. Matrice des écarts

Une expérience de comparaisons par paires sera dite valuée si, pour chacun des m jugements, les résultats de la comparaison de deux objets x_i et $x_j (i, j = 1, 2, ..., n)$ indiquent non seulement une préférence, mais un degré de préférence (mesuré par une échelle). Nous obtenons ainsi, outre la matrice de préférences A, une matrice B, appelée matrice des écarts définie par :

$$B = [b_{ij}](i, j = 1, 2, ..., n) \text{ avec } b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b^k_{ij}$$

où b^k_{ij} est le degré par lequel le produit x_i surclasse le produit x_j au cours du jugement k.

S'il existe un lien évident entre les coefficients a_{ij} et b_{ij}, les premiers coefficients ne sont pas conséquence directe des seconds et on peut avoir par exemple $a_{ij} > a_{ji}$ et $b_{ij} < b_{ji}$. Cette remarque montre que l'on ne peut pas se contenter de la matrice B pour établir un classement, car cela reviendrait à privilégier les scores (en terme de rencontres sportives) sur les résultats en terme de gains (pertes).

Ramenons ce problème au cas précédent, en définissant un critère de performance T sur l'ensemble X des objets. Soit, pour chaque objet x_i :

$$t(i) = \sum_j b_{ij}$$

Il suffit alors d'opter pour une stratégie de classement (choix de la fonction Ψ) et de proposer, en guise de classements qui synthétisent les comparaisons par paires valuées, les classements minimisant le critère défini à partir de Ψ et la contrainte définie par le critère de performance T.

5.2. Application

En s'inspirant de ELECTRE II [ROY,BERTIER-1973], on peut construire, à partir d'une analyse multicritère par plusieurs juges, des niveaux de préférence. Ceci permet à l'utilisateur d'introduire une mesure du degré de préférence entre deux produits.

* Soit p_1, p_2, p_3 avec $0 < p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq 1$

* Soit q_1, q_2, q_3 avec $0 < q_3 \leq q_2 \leq q_1 < 1$

Pour chaque jugement multicritère, nous construisons ainsi une partition de $X \times X$ en quatre classes de préférences $C0$, $C1$, $C2$, $C3$ définies par :

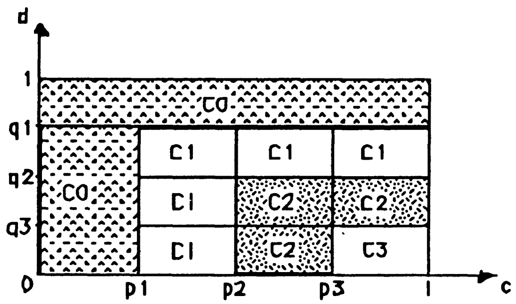
si $\left| \begin{array}{l} p_3 \leq c(x_i, x_j) \\ d(x_i, x_j) < q_3 \end{array} \right.$ alors $(x_i, x_j) \in C3$

sinon si $\left| \begin{array}{l} p_2 \leq c(x_i, x_j) \\ d(x_i, x_j) < q_2 \end{array} \right.$ alors $(x_i, x_j) \in C2$

sinon si $\left| \begin{array}{l} p_1 \leq c(x_i, x_j) \\ d(x_i, x_j) < q_1 \end{array} \right.$ alors $(x_i, x_j) \in C1$

sinon $(x_i, x_j) \in C0$

Soit graphiquement :



La classe $C0$ correspond aux couples (x_i, x_j) pour lesquels x_i ne surclasse pas x_j. Nous obtenons ainsi pour un jugement t, une matrice carrée des écarts entre les n produits, soit $E\tau = [e\tau_{ij}]$ avec

$$\left| \begin{array}{l} e\tau_{ij} = \alpha_1 \text{ si } (x_i, x_j) \in C1, \\ e\tau_{ij} = \alpha_2 \text{ si } (x_i, x_j) \in C2, \\ e\tau_{ij} = \alpha_3 \text{ si } (x_i, x_j) \in C3, \\ e\tau_{ij} = 0 \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

où $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ sont des constantes choisies par l'utilisateur en fonction de son problème particulier.

Soit $E = [e_{ij}] = \sum_{1 \leq \mathcal{T} \leq m} E\mathcal{T}$ et $B = [b_{ij}]$ définie par :

$$b_{ij} = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } i = j, \\ \\ e_{ij} \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

Nous affectons à chaque produit un «score» :

$$t(i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{ij}}{m}$$

où m est le nombre de jugements (supposé constant pour chacun des produits).

Ces indices $t(i)$ permettent de définir un préordre total sur les objets (ordre d'indice décroissant). En normalisant ces scores nous obtenons :

$$s(i) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{t(i)}{\sum_i t(i)}$$

5.3. Remarque

Le résultat peut être influencé par les valeurs données à p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 qui fixent le découpage en classes. Selon une indication des rapporteurs, cette difficulté pourrait être surmontée en utilisant un indice de crédibilité du surclassement. L'indice adopté dans ELECTRE III [ROY-1978] pourrait, par exemple, convenir.

6. Exemple numérique

Les élèves de l'E.N.I.T.A. de Bordeaux organisent depuis deux ans, un concours de dégustation de foies gras «FOIE GRAS ET TRADITION» avec pour objectif de récompenser le producteur ou conserveur qui présente le meilleur produit.

Pour ce faire un jury de cinq professionnels évalue les foies gras entiers selon quatre critères : la présentation générale (notée sur 2), la présentation de la coupe (notée sur 4), l'odeur (également notée sur 4) et enfin le goût, jugé prépondérant, (noté sur 15). Le classement est simplement obtenu en faisant la moyenne des notes (sur 25) que chaque juge attribue aux produits.

En conservant les pondérations (2,4,4,15), nous appliquerons l'algorithme aux résultats du concours 1988 (section oie).

TABLEAU 1
Résultats du concours
«Foie gras et tradition» 1988-section oie

		Produits									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	aspect(2)	2	1	1	2	1	2	1	2	1	1
JUGE 1	coupe(4)	2	2	3	4	1	4	2	3	1	2
	odeur(4)	4	2	3	4	1	4	3	3	2	2
	goût(15)	12	6	12	13	10	12	10	10	9	10
	aspect(2)	1	2	0	2	0	1.5	2	1	0	2
JUGE 2	coupe(4)	2	3	2	4	0.5	1	1.5	3	0	1
	odeur(4)	1.5	2	3	3	0.5	3	4	0.5	4	2
	goût(15)	5	3	7	8	1	5	7	4	5	4
	aspect(2)	1.5	1	0.5	1	1	1.5	0.5	1.5	0.5	1.5
JUGE 3	coupe(4)	2.5	2	2	3	2	3.5	1	2.5	2	2.5
	odeur(4)	2	1.5	3	1.5	1.5	2	1.5	3	3	2
	goût(15)	8	5	11	7	9	3	7	6	11	8.5
	aspect(2)	0.5	1.5	0.5	1.5	0.5	1.5	1	1.5	0	1
JUGE 4	coupe(4)	1	1.5	3	3	3	2	2	3.5	1	1
	odeur(4)	0	1	1	3	0	3	3	3.5	1	0
	goût(15)	5	8	2	5	0	8	5	10	5	5
	aspect(2)	0.5	0.5	1	1.5	0	1	1.5	1.5	1	1.5
JUGE 5	coupe(4)	1	1	2	2	0	2	1.5	2.5	1	2
	odeur(4)	2	1	1.5	2	0	3	2	2.5	2	2
	goût(15)	4	4	6.5	5	4	8	7	7	6	8.5

Le classement par la moyenne des notes donne : **4 8 6 3 7 10 1 9 2 5**

Compte tenu des seuils de concordance et de discordance choisis, ($p_1 = 0.84$ et $q_1 = 0.6$), on construit la matrice des préférences :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 4 & 0 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui conduit, à partir du critère pénalisant les arcs à inverser par la distance entre les rangs, aux ordres optimaux :

8 6 4 10 7 1 3 9 2 5

6 8 4 10 7 1 3 9 2 5

avec **min F(ρ) = 96**

Rappel : $F(\rho) = \sum a_{ij}\delta_{ij}^{\rho}[\rho(x_i) - \rho(x_j)]$

$$\text{où} \left| \begin{array}{ll} \delta_{ij}^{\rho} & = 1 \text{ si } \rho(x_i) > \rho(x_j), \\ & = 0 \text{ sinon.} \end{array} \right.$$

* En introduisant des écarts de préférences (avec $p_2 = 0.92$, $p_3 = 1$, $q_2 = 0.4$ et $q_3 = 0$), on construit une matrice des écarts :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 & 1 & 6 & 1 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 9 & 0 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ 8 & 8 & 6 & 0 & 8 & 4 & 7 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 3 & 7 & 0 & 6 & 3 & 7 & 6 \\ 5 & 5 & 3 & 1 & 7 & 2 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 4 & 8 & 4 & 4 & 8 & 3 & 6 & 0 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

et, partant, les « scores » des produits :

$$\begin{array}{ll} s(1) = 4.86 & s(6) \quad = 8.68 \\ s(2) = 1.91 & s(7) \quad = 6.59 \\ s(3) = 4.86 & s(8) \quad = 8.15 \\ s(4) = 9.72 & s(9) \quad = 2.78 \\ s(5) = 1.04 & s(10) \ = 6.42 \end{array}$$

ces scores induisent les ordres :

4 6 8 7 10 1 3 9 2 5

4 6 8 7 10 3 1 9 2 5

En appliquant l'algorithme de calcul correspondant au critère pénalisant les arcs à inverser par la distance entre les rangs, nous obtenons l'ordre optimal :

4 6 8 10 7 1 3 9 2 5

avec $\mathcal{L}(\rho)$ = **98.52.**

Cet ordre n'est ni celui des scores, ni un de ceux obtenus par $A[a_{ij}]$. C'est pourtant celui qui minimise la fonction objectif globale.

Essayons d'expliquer les différences entre les classements obtenus.

– Le produit 3 est classé quatrième si l'on effectue simplement la moyenne des notes, il est classé septième si l'on utilise par contre la matrice des préférences avec le critère pénalisant les arcs à inverser par la distance entre les rangs. Ce mauvais résultat du produit 3 par les méthodes de surclassement est du au fait que ce produit est mal noté au niveau de l'aspect, mais le faible poids de ce critère, fait qu'il est mieux classé par la moyenne des notes. Les méthodes multicritères font aussi appel aux poids, mais l'indice de discordance donne à certains critères mineurs une plus grande importance. En d'autre terme, le point faible du foie 3 fait qu'il ne mérite pas d'être bien classé.

– Le produit 4 est toujours en tête, excepté pour le classement sur les seules préférences a_{ij}. Par cette méthode, il doit sa troisième place au fait qu'il est plus souvent surclassé par les autres produits, mais très légèrement en fait. Comme d'un autre coté, son score est bien meilleur que celui des foies 6 et 8, il retrouve sa première place par la méthode tenant compte des écarts de préférence.

Bibliographie

BARTHELEMY JP., MONJARDET.B. (1981)-The median procedure in cluster analysis and social choice theory, *Mathematical social sciences*, 1, pp 235-267 , N.H.PUB COMPANY.

DAVID H. (1987) - Ranking from unbalanced paired comparaisons data, *Biometrika*, 4,2 pp 432-436.

FREY J.J., YEHIA ALCOUTLABI A. (1986) - Comparaisons par paires : une interprétation et une généralisation de la méthode des scores, RAIRO - *Recherche opérationnelle*, Vol 20 n° 3 pp 213-227.

KANO M., SAKAMOTO A. (1983) - Ranking the vertices of a weighted digraph using the length of forwards arcs, *Networks* Vol 13 n° 1, pp 143-151.

ROY B., VINCKE P., BRANS J.P. (1976) - Aide à la décision multicritère, Introduction à la table ronde consacrée à «L'aide à la décision multicritère : applications administratives, économiques et industrielles».

ROY B. (1968) - Classement et choix en présence de points de vue multiples. (la méthode ELECTRE). *RIRO* n° 8, pp 57-75.

ROY B. BERTIER B. (1973) - La méthode ELECTRE II. Une application au média-planning, *OR '72, M. ROSS (éd)*, North-Holland Publishing Company, pp 291-302.

ROY B. (1978) - Un algorithme de classements fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples, *Cahiers du Centre d'Etude de Recherche Opérationnelle*, Vol 20, n° 1, pp 3-24.

SCHARLIG A. (1985) - Décider sur plusieurs critères, *Presses polytechniques romandes.*

SLATER P. (1961) - Inconsistencies in schedule of paired comparaisons, *Biometrika* Vol 48, pp 303-312.

VIDAL C., YEHIA ALCOUTLABI A. (1990) - Méthode d'aide à la décision sur des évaluations multicritères, *MISH*, n° 110.