REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

D. BENOIST

Note sur l'article de Monsieur Goupy : « Erreur de dérive et choix de l'ordre des essais d'un plan factoriel »

Revue de statistique appliquée, tome 37, nº 1 (1989), p. 23-25

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1989__37_1_23_0>

Rev. Statistique Appliquée, 1989, **XXXVII** (1), 23-26

Note sur l'article de Monsieur Goupy

"ERREUR DE DÉRIVE ET CHOIX DE L'ORDRE DES ESSAIS D'UN PLAN FACTORIEL"

Par D. BENOIST

Monsieur GOUPY se pose le problème de l'effet d'une dérive sur les résultats d'un essai, dérive qu'il suppose proportionnelle au nombre d'essais réalisés.

La première idée qui vient à l'esprit concernant cette question est "d'ajouter" une covariable X (fonction linéaire du nombre d'essais réalisés) au modèle lié au plan d'expérience.

Pour le plan à 2^3 essais considéré par Monsieur GOUPY, avec l'ordre des essais qu'il envisage au début de son article, on obtient alors la matrice disjonctive réduite suivante, dans laquelle X a été centrée.

N° d'essai	M	A	B	C	D	E	F	G	X
1	1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	−1	−7
2	1	+1	−1	−1	−1	−1	+1	+1	−5
3	1	−1	+1	−1	−1	+1	−1	+1	−3
4	1	+1	+1	−1	+1	−1	−1	−1	−1
5	1	−1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	+1
6	1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	−1	+3
7	1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	−1	+5
8	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+7

A l'examen de cette matrice, on voit que :

- La colonne X est orthogonale aux colonnes M, D, E, F, G.
- Il existe entre les colonnes X, A, B, C une relation linéaire qui s'écrit :

$$X = A + 2B + 4C$$

La covariable X est donc confondue avec l'ensemble des colonnes A, B et C. Il serait donc maladroit d'affecter ces colonnes à des facteurs. Mieux vaut, comme le fait Mr GOUPY, chercher à les affecter à des interactions. Les colonnes à affecter aux 3 facteurs sont alors à choisir parmi D, E, F, G qui sont orthogonales à X.

On peut, avec Mr GOUPY, choisir, par exemple les colonnes G, E et D respectivement pour les facteurs 1′, 2′ et 3′.

Les interactions se trouvent alors "situées" de la manière suivante :

(1'2') en B, (1'3') en C, (2'3') en F, (1'2'3') en A

La covariable X se trouve alors confondue avec l'ensemble des interactions (1'2'), (1'3') et (1'2'3'). Elle est orthogonale à l'interaction (2'3').

Du point de vue pratique, les facteurs 2' et 3' doivent être choisis comme étant ceux pour lesquels l'effet de leur interaction est le plus vraisemblable. Alors, si on suppose que l'interaction (1'2'3') et l'une des deux interactions (1'2') et (1'3') sont négligeables, les résultats sont analysables selon l'un des deux modèles représentés symboliquement par :

$$\left.\begin{array}{l} M + 1' + 2' + 3' + (1'2') + (2'3') + X \\ \text{ou } M + 1' + 2' + 3' + (1'3') + (2'3') + X \end{array}\right\} \text{avec 1 ddl pour le résidu}$$

La présence de l'une des interactions (1'2') ou (1'3') fait que le plan n'est pas orthogonal. Par contre, si on suppose que (1'2') et (1'3') sont négligeables alors le plan est orthogonal.

Se pose maintenant la question : de combien de manières peut-on réaliser un tel plan ?

On remarque que la colonne E est confondue avec l'interaction des colonnes D et F, de même pour D vis-à-vis de E et F et pour F vis-à-vis de D et E.

On peut donc affecter les facteurs 1', 2' et 3' à l'un des 3 groupes de colonnes D, E, G ou D, F, G, ou E, F, G.

Pour chaque groupe, il y a 6 façons différentes d'affecter 1', 2' et 3'.

Pour chaque facteur, il existe 2 permutations de niveaux, soit 8 possibilités pour 3 facteurs.

Il existe donc 3 X 6 X 8 = 144 manières différentes de réaliser un plan comme celui ci-dessus. C'est bien le nombre trouvé par Mr GOUPY mais les différents ordres qu'il donne pour les essais peuvent être retrouvés :

– par les différentes affectations des facteurs.

– par les permutations des niveaux des facteurs.

Par exemple, partant du plan n° 64 (voir tableau n° 7 de Mr GOUPY), si on permute les niveaux du facteur 1', on retrouve le plan n° 58.

Une dernière remarque ! La matrice disjonctive réduite utilisée au début de cette note était fondée sur un ordre bien particulier des essais. On pourrait partir d'un ordre quelconque, différent. Par exemple, on pourrait considérer la matrice disjonctive réduite suivante (les numéros d'essais entre parenthèses sont ceux correspondants aux essais de la matrice du début).

N° d'essai	M	A	B	C	D	E	F	G	X
1(5)	1	−1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	−7
2(7)	1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	−1	−5
3(4)	1	+1	+1	−1	+1	−1	−1	−1	−3
4(2)	1	+1	−1	−1	−1	−1	+1	+1	−1
5(3)	1	−1	+1	−1	−1	+1	−1	+1	+1
6(1)	1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	−1	+3
7(8)	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+5
8(6)	1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	−1	+7

L'ordre des numéros entre parenthèses n'appartient pas à l'ensemble donné par Mr GOUPY dans son tableau n° 7.

Dans ce cas :
- X est orthogonale à C et à M.
- On a la relation linéaire $2X = 4A - B - D + 8E + F - G$

La colonne X est donc confondue avec l'ensemble des colonnes A, B, D, E, F, G.

On affectera un facteur, par exemple $1''$ à C. Les facteurs $2''$ et $3''$ seront affectés à des colonnes quelconques en prenant cependant soin qu'un facteur ne soit pas confondu avec l'interaction des deux autres. Par exemple $2''$ sera affecté à A et $3''$ à B. Alors $(1''2'')$ correspond à E, $(1''3'')$ à F, $(2''3'')$ à D et $(1''2''3'')$ à G.

Si $(1''2''3'')$ et, par exemple $(2''3'')$ sont négligeables, les résultats peuvent, dans ces conditions, être analysés selon le modèle

$$M + 1'' + 2'' + 3'' + (1''2'') + (1''3'') + X$$

avec 1 ddl pour le résidu
X qui n'est orthogonal qu'à $1''$, rend le plan non orthogonal.

Les différences entre le plan ainsi obtenu et ceux considérés précédemment sont les suivantes :

- moins de contraintes sur l'ordre des essais (randomisation plus facile).
- Perte de l'orthogonalité entre X et la plupart des actions du modèle.