

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

HABIB BENALI

BRIGITTE ESCOFIER

**Stabilité de l'analyse factorielle des correspondances multiples en cas de données manquantes et de modalités à faibles effectifs**

*Revue de statistique appliquée*, tome 35, n° 1 (1987), p. 41-51

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1987\\_\\_35\\_1\\_41\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1987__35_1_41_0)

© Société française de statistique, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## STABILITÉ DE L'ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES MULTIPLES EN CAS DE DONNÉES MANQUANTES ET DE MODALITÉS À FAIBLES EFFECTIFS

Habib BENALI et Brigitte ESCOFIER

*IRISA — Rennes*

### RÉSUMÉ

La technique que nous présentons dans cet article, permet de neutraliser l'effet de certaines perturbations en analyse des correspondances multiples. Elle résoud de façon « efficace » le problème des données manquantes et des modalités à faibles effectifs.

*Mots clés : Stabilité, Analyse des correspondances multiples, Tableau Disjonctif Incomplet, Distance.*

### SUMMARY

The technique we present in this paper allow to avoid the effect of perturbations in the case of qualitative variables this solves in an efficient way the problem of missing quantities and the problem of unfrequent response modalities.

*Key words : Stability, Multiple correspondence analysis, Incomplete disjunctive table, Distance.*

### Introduction

Une des sources de perturbation des résultats d'une analyse des correspondances multiples (A.F.C.M) est le problème des non-réponses et des réponses rares. Une variante de cette méthode proposée par B. ESCOFIER [3] permet de résoudre ce problème. Un programme (MULMD) de cette technique présentant la même structure que MULTM de S.P.A.D. [5] a été écrit. Nous comparons dans cet article les résultats de cette variante à la technique utilisée dans S.P.A.D. où les réponses rares sont ventilées au hasard sur une des autres modalités de réponses à la même question et où les réponses manquantes sont considérées comme réponses particulières.

### Notations

Un questionnaire est formé d'un ensemble  $Q$  de questions dont chacune admet un ensemble  $J_q$  de modalités de réponses. On note :

$I$  l'ensemble des individus

$J$  l'ensemble des modalités de réponses à toutes les questions  $Q$

$K_{IJ}$  le tableau disjonctif des variables indicatrices associées aux modalités de réponses

$$K_{IJ} = [K_{IJ1}, K_{IJ2}, \dots, K_{IJQ}]$$

card  $I = n$

card  $J = \text{card } J1 + \text{card } J2 + \dots + \text{card } JQ$

$\forall j \in J_q \subset J \quad K_{ij} = 1$  si l'individu  $i$  possède la modalité  $j$

ou  $K_{ij} = 0$  sinon

$$K_{i.} = \sum_{j \in J} K_{ij}$$

$$K_{.j} = \sum_{i \in I} K_{ij}$$

$$K = \sum_{i,j} K_{ij}$$

En A.F.C.M., le tableau  $K_{IJ}$  est disjonctif complet,  $K_{i.} = Q = K/n$ . Les programmes de calculs utilisent le tableau du codage condensé  $C_{IQ}$  du tableau  $K_{IJ}$  où la case  $(i, q)$  contient le numéro  $c_{iq}$  de la modalité de la question  $q$  choisie par l'individu  $i$ . La mise sous forme disjonctive des données dans cet article n'est qu'une présentation commode.

Un individu  $i$  est représenté dans  $R_j$  par son profil ligne  $\{K_{ij}/K_{i.}, j \in J\}$ , et une modalité  $j$  est représentée par son profil colonne  $\{K_{ij}/K_{.j}, i \in I\}$ .

Le nuage des individus  $N(I)$  est l'ensemble des profils lignes affectés des poids  $K_{i.}/K$ .

Le nuage des modalités  $N(J)$  est l'ensemble des profils colonnes affectés des poids  $K_{.j}/K$ .

### Méthode utilisée dans SPAD

Cette méthode préserve la structure du tableau disjonctif complet, en ventilant au hasard les réponses rares des individus sur une des modalités de réponses à la même question, et considérant comme modalités particulières les réponses manquantes.

Si la réponse manquante correspond à une attitude particulière de non-réponse, ceci est justifié. Nous nous intéressons ici au problème de données manquantes non significatives d'une attitude.

### Méthode du cumul

Pour résoudre le problème des modalités rares, cette technique consiste à les cumuler en une colonne reste et à analyser le tableau disjonctif des données contenant cette colonne; ce qui permet de garder la marge constante sur I.

Cette méthode a été testée [1], et ses résultats présentent de fortes variations. Nous n'en dirons plus rien ici.

### Méthode MULMD

Cette méthode est une variante de l'A.F.C.M; elle résoud simultanément le problème des réponses manquantes et des réponses rares, en minimisant leur influence sur le résultat; elle traite des tableaux disjonctifs « incomplets » ainsi définis :

#### *Tableau disjonctif incomplet $K'_{IJ'}$*

Le tableau  $K'_{IJ'}$  est obtenu à partir du tableau  $K_{IJ}$  en supprimant les colonnes correspondant aux modalités rares, les non-réponses à une question q étant codées zéro sur l'ensemble des modalités conservées de  $J_q$ .  $J'$  est donc le sous ensemble de J correspondant aux modalités conservées. Si l'on désigne par  $K'_i = \{K'_{ij} / i \in I\}$  et  $K'_j = \{K'_{ij} / j \in J\}$  les marges de  $K'_{IJ'}$  et par  $K'$  le total des éléments de ce tableau, on a :

$$\forall i \in I, \forall j \in J' : \begin{cases} K'_{ij} = K_{ij} \\ K'_{.j} = K_{.j} \end{cases} \quad (1)$$

Par contre  $K'$  est différent de  $K$ , et en général  $K'_i$  est différent de  $K'/n$  ( $K'_i$  n'est pas une marge constante sur I, comme ce serait le cas pour un tableau disjonctif complet).

On désignera par  $K''_{IJ'}$  le tableau disjonctif complet issu de  $K_{IJ}$ , en conservant les modalités rares, et en ajoutant des modalités de non-réponses pour les réponses manquantes.

#### *Choix d'une distance pour l'étude du tableau disjonctif incomplet $K'_{IJ'}$*

##### *Distance du KHI-DEUX*

L'A.F.C.M classique utilise la distance du KHI-DEUX entre deux profils lignes (resp. colonne) qui s'écrit :

$$\begin{aligned} d^2(i, i') &= \sum_{j \in J'} (K'/K_{.j}) [K_{ij}/K'_i - K_{i'j}/K'_{i'}]^2 \\ d^2(j, j') &= \sum_{i \in I} (K'/K'_i) [K_{ij}/K_{.j} - K_{ij'}/K_{.j'}]^2 \end{aligned}$$

### *Inconvénient de cette distance*

Dans le tableau disjonctif incomplet  $K'_{ij}$ , le problème des modalités rares (contribuant fortement à la distance entre deux profils lignes) est résolu. Par contre, si deux individus  $i$  et  $i'$  n'ont pas donné le même nombre de réponses ( $K'_{i.} \neq K'_{i'.$ ), une modalité  $j$  choisie simultanément par ces individus augmente leur distance car le terme  $K_{ij}/K'_{i.} - K_{ij}/K'_{i'.$  n'est pas nul, ce qui est un inconvénient et pose un réel problème d'interprétation. Cette métrique est donc inadaptée à l'étude de tableaux disjonctifs incomplets.

### *Distance variante du KHI-DEUX*

Pour remédier à cet inconvénient, on remplace la marge  $K'_i = (K'_{i.}, i \in I)$  par la marge constante ( $K'/n, i \in I$ ) partout où elle intervient : profil et poids des individus, métrique et origine des axes pour le nuage des profils colonne.

Les distances entre profils lignes sont analogues à celles issues du tableau disjonctif complet  $K''_{ij}$  obtenu en supprimant les termes provenant des non-réponses et des modalités rares, et les distances entre profils colonnes sont identiques à celle issues du tableau  $K''_{ij}$ .

### *Dualité et formules de transitions*

Les facteurs  $F_s$  du nuage  $N(I)$  se déduisent des facteurs  $G_s$  du nuage  $N(J)$  par les formules de transitions suivantes où  $\mu_s$  est la valeur propre d'ordre  $s$ .

$$F_s(i) = (n/\sqrt{\mu_s} \sum_{j \in J'} K_{.j}) \sum_{j \in J'} K_{ij} G_s(j) - (1/\sqrt{\mu_s} \sum_{j \in J'} K_{.j}) \sum_{j \in J'} K_{.j} G_s(j)$$

$$G_s(j) = (1/\sqrt{\mu_s}) \sum_{i \in I} K_{ij}/K_{.j} F_s(i)$$

Dans la première formule apparaît le terme

$$(1/\sqrt{\mu_s} \sum_{j \in J'} K_{.j}) \sum_{j \in J'} K_{.j} G_s(j)$$

qui représente la coordonnée du centre de gravité  $G$  du nuage  $N(J')$  sur l'axe  $F_s$ , et mesure le *décalage* du facteur quant l'origine des axes ne correspond pas à  $G$ .

Ce terme, nous le verrons en pratique est presque nul, ce qui permet d'interpréter comme en A.F.C.M classique l'abscisse d'un individu comme le barycentre des modalités qu'il a choisies. La deuxième formule est exactement celle de l'A.F.C.M.

### *Élément supplémentaire et formule de reconstitution des données*

On peut mettre des modalités en élément supplémentaire, particulièrement les modalités non-réponses et les modalités rares. L'abscisse  $G_s(j^+)$  d'une modalité supplémentaire est définie par :

$$G_s(j^+) = (1/\sqrt{\mu_s}) \sum_{i \in I} (K_{ij^+} / K_{j^+}) F_s(i)$$

A partir des formules de transition, on peut reconstituer le tableau initial en utilisant la formule :

$$K_{ij} = (K_{.j} / n) \left[ 1 + \sum_s 1/\sqrt{\mu_s} F_s(i) G_s(j) \right]$$

*Nuage N(I) des profils des lignes*

La distance entre deux profils lignes i et i' est définie par :

$$d^2(i, i') = \sum_{j \in J'} (K' / K_{.j}) [n K_{ij} / K' - n K_{i'j} / K']^2 = n^2 / K' \sum_{j \in J'} (1 / K_{.j}) [K_{ij} - K_{i'j}]^2$$

L'inconvénient rencontré dans la distance du khi-deux disparaît. L'analyse du nuage N(I) est faite à partir de son centre de gravité qui sera pris comme origine des axes.

*Nuage N(J) des profils des colonnes*

La distance entre deux profils colonnes j et j' est définie par :

$$d^2(j, j') = \sum_{i \in I} K' (n / K') [K_{ij} / K_{.j} - K_{ij'} / K_{.j'}]^2 = n \sum_{i \in I} [K_{ij} / K_{.j} - K_{ij'} / K_{.j'}]^2$$

Cette métrique possède la propriété intéressante qu'est « l'équivalence distributionnelle ».

L'analyse du nuage N(J') est faite à partir du point de coordonnées K'/n pris comme origine des axes. Les facteurs sur J' ne seront pas exactement centrés puisque le centre de gravité de N(J') est {K'\_i / K', i ∈ I}.

Considérons le tableau disjonctif complet K''\_{ij} obtenu, rappelons-le, en gardant les modalités rares, et en ajoutant des modalités de non-réponses pour les réponses manquantes. On a : J'' ⊃ J' ⊃ J, et la marge sur I de K''\_{ij} est constante. Le nuage N(J') des profils des colonnes de K''\_{ij} est un sous nuage de N(J'') associé à K''\_{ij}, les profils sont identiques et la métrique de R\_I est définie par la marge constante. On analyse alors le sous nuage N(J') du nuage complété N(J'') en gardant la métrique et le centre de gravité associé à N(J'').

## *Mise en œuvre pratique de la méthode*

### *Le programme*

Le programme MULMD présente la même structure que MULTC de SPAD [5]. Il traite des questionnaires avec non-réponses et modalités à faibles effectifs. Dans le programme principal, le tableau de Burt d'ordre  $(J', J')$  est calculé à partir du tableau du codage condensé  $C_{10}$ ; la matrice sur les profils colonne d'ordre  $(J', J')$  est calculée; sa dimension ne peut être réduite [1], ce qui est la grande particularité par rapport au programme MULTC.

### *Cas des réponses rares*

On fixe un seuil NMIN à partir duquel les modalités d'effectifs inférieurs à NMIN sont considérés comme rares; elles sont affectées à un fichier IQUES où elles sont éliminées des calculs.

### *Cas des réponses manquantes*

Les non-réponses sont générées de façon aléatoire ([4], [6]) à partir d'un tableau complet; elles sont codées sur le fichier initial comme les autres réponses; le nombre de modalités 'réponses manquantes' ainsi créé est fixé par un paramètre NABAND; elles sont lues puis éliminées des calculs.

### *Comparaison des deux méthodes*

L'étude comparative des résultats de la méthode proposée avec celle de SPAD est faite sur deux fichiers différents. Sur le premier de dimension (188, 120), on étudie dans un premier temps l'influence des modalités rares en augmentant l'effectif minimum NMIN; dans un second temps, après avoir fixé un seuil NMIN de stabilité pour ce type de perturbation, on étudie l'influence des réponses manquantes générées de façon aléatoire ([4], [6]) sur les variables les plus discriminantes du tableau initial en augmentant leur nombre.

Sur le second fichier de dimension (340, 52), où il n'y a pas de modalités d'effectifs faibles, on étudie le problème des données manquantes lorsqu'elles sont réparties sur toutes les variables.

### *Remarques*

Les deux méthodes donnent des résultats identiques pour un tableau complet n'ayant aucune modalité d'effectif inférieure à NMIN.

### *Cas des réponses rares*

Une qualité importante d'une méthode supprimant les modalités rares est la robustesse des résultats et la stabilité des configurations par rapport à de petites variations de NMIN.

**Tableau de corrélation entre facteurs de même rang pour deux valeurs successives de NMIN**

\* NMIN prend les valeurs 2 % et 3 % de l'effectif total du tableau

TABLEAU I

Méthode MULMD

	Corrélation
Axe 1	0.99
Axe 2	-0.89
Axe 3	0.84
Axe 4	-0.92
Axe 5	0.94

TABLEAU II

Méthode de SPAD

	Corrélation
Axe 1	0.97
Axe 2	-0.80
Axe 3	-0.70
Axe 4	0.83
Axe 5	-0.88

Entre deux valeurs successives de NMIN, les facteurs de la variante de l'AFCM restent plus corrélés. Cette remarque reste vraie dans le cas général où le nombre de modalités rares supprimées augmente. Au vu de ces résultats, la méthode qu'utilise SPAD semble plus sensible que la variante de l'AFCM.

**Tableau de corrélation entre facteurs de même rang des deux méthodes pour le même seuil NMIN**

\* NMIN prend les valeurs 2 %, 3 %, et 16 % de l'effectif total du tableau

TABLEAU III

	NMIN égal		
	2 % de l'effectif total	3 % de l'effectif total	16 % de l'effectif total
Facteur 1	-0.99	-0.99	-0.96
Facteur 2	-0.97	-0.94	-0.96
Facteur 3	-0.95	0.92	-0.97
Facteur 4	-0.93	0.95	0.73
Facteur 5	-0.86	0.94	-0.11

Les fortes corrélations des trois premiers facteurs au seuil NMIN égal à 16 % prouvent que les facteurs des deux méthodes varient dans le même sens; ce résultat intéressant montre que la perturbation induite par les modalités rares a même effet sur ces facteurs. Ceux-ci sont ailleurs pratiquement identiques au seuil NMIN égal à 2 %, considéré comme seuil de stabilité.



### *Cas des réponses manquantes*

Le problème des réponses manquantes est plus délicat lorsque les variables les plus discriminantes d'une analyse se trouvent touchées. On étudie la stabilité pour ce type de perturbation sur le premier fichier (188, 120) après avoir fixé le paramètre NMIN à 2 % de l'effectif total de l'échantillon. On génère 5 % de données manquantes sur une, trois puis dix variables les plus discriminantes et enfin on augmente ce seuil à 20 % pour les dix variables seulement. On retient les cinq premiers facteurs de chacune des analyses dans chaque méthode et on effectue une analyse en Composante Principale sur l'ensemble ( $4 \times 5 = 20$ ) de ces facteurs. L'inertie expliquée par les cinq premiers facteurs de l'A.C.P est de 95.17 % ce qui laisse entrevoir une « certaine » perturbation des résultats des différentes A.F.C.M. Pour visualiser cette perturbation, on représente sur les premiers plan factoriels les différents facteurs.

### *Notations sur les graphiques*

M désigne les facteurs de la méthode MULMD, et S ceux de la méthode utilisée par SPAD.

On note MI (resp. SI) les facteurs issus des tableaux sans réponses manquantes, et MIJ (resp. SIJ) les facteurs des tableaux perturbés; où I désigne le rang du facteur ( $I = 1,5$ ), et J la perturbation sur le tableau initial ( $J = 1,4$ ).

J = 1 : 5 % de données manquantes sur une variable;

J = 2 : 5 % de données manquantes sur trois variables;

J = 3 : 5 % de données manquantes sur dix variables;

J = 4 : 20 % de données manquantes sur dix variables.

Ainsi, M2 correspond au 2<sup>e</sup> facteur (sans réponses manquantes) obtenu par MULMD. S13 correspond au 1<sup>er</sup> facteur obtenu dans SPAD avec 5 % de données manquantes sur 10 variables.

On note sur les différentes figures que le décalage entre les représentations des facteurs de même rang est moins important dans la variante de l'A.F.C.M où tous les points se trouvent regroupés autour du point stable; une variation du facteur 3 apparaît (fig. 3) quand le seuil de non réponses atteint 20 % dans les dix variables les plus importantes.

Au vu de ces résultats, on a généré sur le fichier (340,52) ne comportant aucune modalité rare (où l'analyse par la technique dans SPAD et celle de la variante ont donné les mêmes résultats) 10 % de non réponses réparties de façon aléatoire sur l'ensemble des cases du tableau de données.

### *Comparaison des facteurs des deux méthodes*

Les tableaux suivants donnent les corrélations entre facteurs de même rang obtenus respectivement avec et sans non réponses.

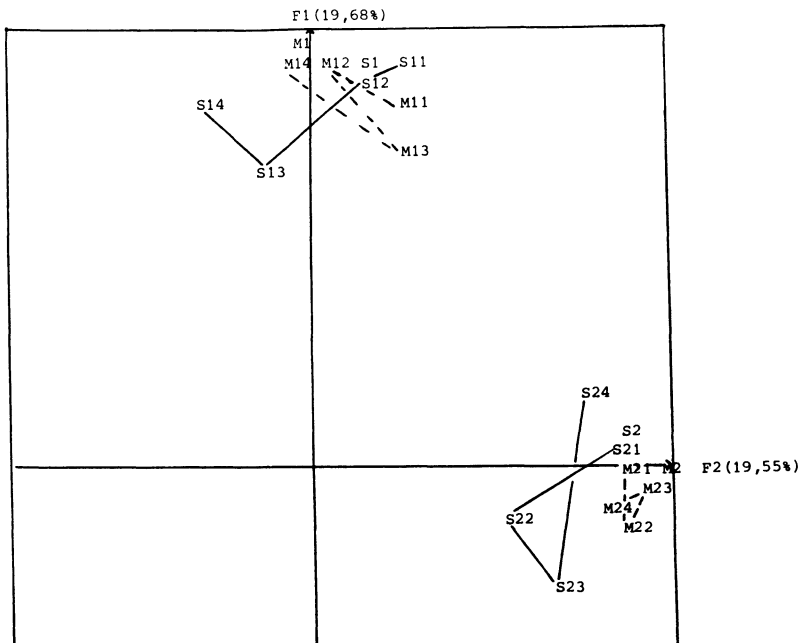


FIGURE 1

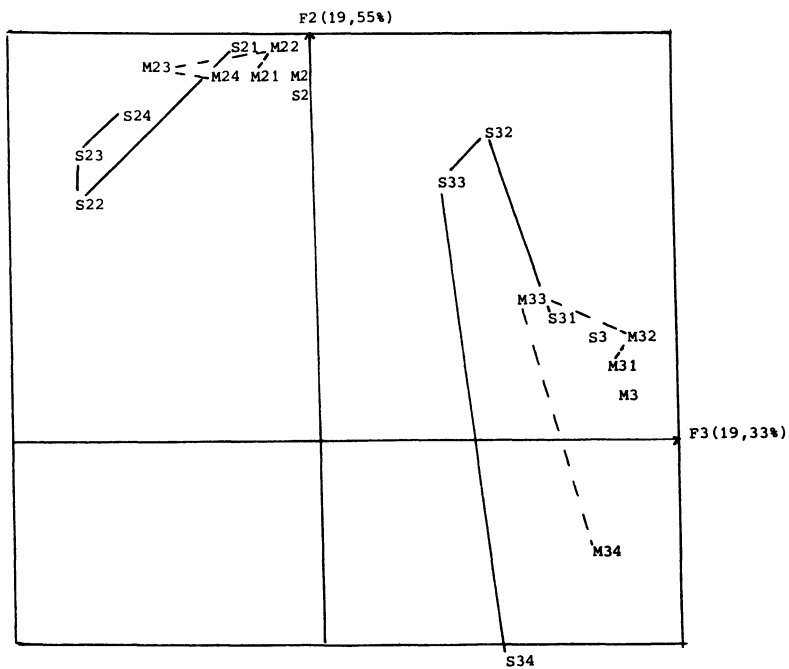


FIGURE 2

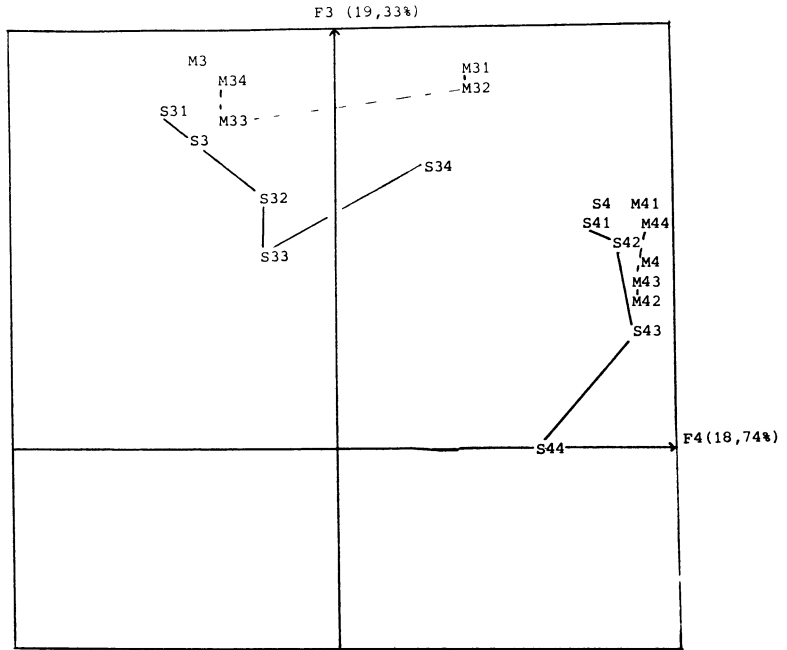


FIGURE 3

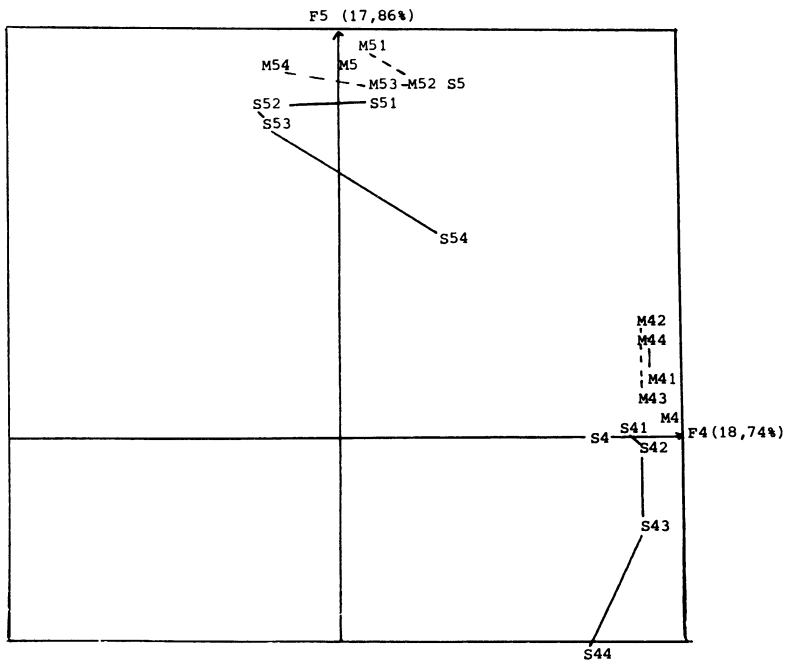


FIGURE 4

TABLEAU IV

	Analyse par la variante de l'A.F.C.M
Facteur 1	0.96
Facteur 2	0.98
Facteur 3	-0.95
Facteur 4	-0.95
Facteur 5	-0.65

TABLEAU V

	Analyse par 'SPAD'
Facteur 1	-0.98
Facteur 2	0.98
Facteur 3	0.85
Facteur 4	-0.85
Facteur 5	0.09

### Conclusion

Bien entendu, la variante de l'A.F.C.M n'exclue pas la technique utilisée dans SPAD mais la complète.

Si l'on a peu de données manquantes et de modalités à faibles effectifs, il est plus intéressant d'utiliser la technique de SPAD qui diagonalise une matrice de plus petite dimension et donne des résultats stables avec un coût calcul réduit. Par contre la variante de l'A.F.C.M trouve un compromis, devant de fortes perturbations du tableau des données entre coût calcul et stabilité des résultats, qui est très avantageux.

### Références bibliographiques

- [1] BENALI H. (1985). — Stabilité de l'analyse en composantes principales et de l'analyse des correspondances multiples en présence de certains types de perturbations — méthodes de dépouillement d'enquêtes. *Thèse de 3<sup>e</sup> cycle*. Université de Rennes 1.
- [2] BENZECRI J.P. (1973). — *L'Analyse des Données*. Tome 2 : L'Analyse des correspondances — Dunod.
- [3] ESCOFIER B. (1981). — Traitement de questionnaires avec non-réponses et analyse des correspondances avec marges modifiées et analyse multicanonique avec contrainte. *I.R.I.S.A.* — Publication Interne n° 146.
- [4] LEBART L. (1975). — Validation des résultats en analyse des données. *Rapport CREDOC-DGRST*.
- [5] LEBART L., MORINEAU A. (1982). — SPAD = Système Portable d'Analyse des Données. *CESIA*.
- [6] MORINEAU A. (1975). — Quelques générateurs de nombres pseudo-aléatoires. *Méth. et Prog. Stat. Bull — Techn. du CESIA n° 1*.