

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. FLESSELLES

Compléments pratiques pour la détermination des éléments d'un plan de contrôle par la méthode d'Enkawa

Revue de statistique appliquée, tome 33, n° 4 (1985), p. 5-13

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1985__33_4_5_0

© Société française de statistique, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPLÉMENTS PRATIQUES POUR LA DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS D'UN PLAN DE CONTRÔLE PAR LA MÉTHODE D'ENKAWA

J. FLESSELLES

Ingénieur en Chef à la SEITA

1. POSITION DU PROBLÈME

Dans un article publié récemment par La Revue de Statistique Appliquée [1], Monsieur André VESSEREAU expose en détail la méthode proposée par le Professeur Takao ENKAWA [2] pour construire un plan de contrôle par variable, lorsque le caractère mesuré est d'écart-type inconnu.

Une solution élégante à ce problème consiste à déterminer par approximations successives la valeur de l'effectif de l'échantillon à retenir, puis à en déduire par un calcul simple la constante d'acceptation K du plan à construire. Nous désignerons dans la suite de cet exposé, cette technique d'élaboration par « itération d'ENKAWA ».

Nous renvoyons le lecteur à l'article mentionné ci-dessus et nous adoptons les mêmes notations que celui-ci en les complétant lorsqu'il y aura lieu.

2. OBJET DU PRÉSENT ARTICLE

L'exposé qui suit montre :

- d'une part que *l'on peut s'affranchir du calcul itératif*, objet de la méthode ci-dessus et déterminer directement par une formule simple l'effectif final de l'échantillon à retenir, d'où l'on déduit immédiatement la constante d'acceptation K finale du plan; et que l'itération d'ENKAWA est convergente, ce qui justifie l'adoption de la formule proposée.

- d'autre part que cette formule présentable sous forme d'une relation à trois variables (effectif de départ, constante d'acceptation initiale, effectif à retenir) *est justiciable d'un abaque à points alignés* à deux supports parallèles et un troisième support curviligne.

Cet abaque est lui-même présenté *in fine* sous une forme directement utilisable par le lecteur, et quelques indications sont données, à titre complémentaire, sur sa construction.

3. NOTATIONS

n : valeur de départ de l'effectif de l'échantillon (non arrondie)

K : valeur de départ de la constante d'acceptation du plan (σ inconnu) défini par ($\alpha = 0,05$; p_{95}) ($\beta = 0,10$, p_{10}).

[Les formules permettant le calcul de n et K , valeurs de départ sont données dans [1] page 9 sous référence (2)].

L'itération d'ENKAWA est définie par la suite d'approximations

$$\begin{aligned} n^{(1)} &= n \\ n^{(2)} &= \left[1 + \frac{3n^{(1)} K^2}{6n^{(1)} - 8} \right] n \\ &\dots\dots\dots \\ n^{(j)} &= \left[1 + \frac{3n^{(j-1)} K^2}{6n^{(j-1)} - 8} \right] n \end{aligned} \quad (1)$$

et l'on s'arrête à une valeur $n^{(f)}$ ou « valeur finale approchée » telle que les entiers immédiatement supérieurs à $n^{(f-1)}$ et $n^{(f)}$ soient les mêmes. C'est cette valeur entière commune notée N qui est finalement retenue pour n , par l'itération d'ENKAWA.

Nous désignerons par n_∞ , la limite, qui existe, de la suite $n^{(j)}$ et par K_∞ la valeur finale à adopter pour la constante d'acceptation :

$$K_\infty = \sqrt{\frac{3n_\infty - 3}{3n_\infty - 4}} K \quad \text{formule déjà proposée dans [1].}$$

Nous poserons en outre $z_j = n^{(j)} - n^{(1)} = n^{(j)} - n$.

4. CALCUL DE n_∞ , VALEUR A ADOPTER POUR L'EFFECTIF DE L'ÉCHANTILLON

Compte-tenu du changement de variable proposé ci-dessus, la formule (1) s'écrit pour l'indice $j + 1$:

$$z_{j+1} = \frac{3n^{(j)} n K^2}{6n^{(j)} - 8} = \frac{3n K^2 z_j + 3n^2 K^2}{6z_j + 6n - 8}$$

$$\begin{aligned} \text{Posant : } \alpha &= 3n K^2 &> 0 \\ \beta &= 3n^2 K^2 (=n.\alpha) &> 0 \\ \gamma &= 6 &> 0 \\ \delta &= 6n - 8 &> 0 \quad \forall n > 4/3 \quad \text{donc dès que } n \geq 2 \end{aligned}$$

$$\text{Alors } z_{j+1} = \frac{\alpha z_j + \beta}{\gamma z_j + \gamma} \quad \text{noté symboliquement.}$$

$$z_{j+1} = (M) z_j \quad M \text{ étant la matrice } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad z_\infty = \text{Lim } (M)^p . z_2 \quad p \rightarrow \infty$$

$$\text{car } z_1 = n^{(1)} - n^{(1)} = 0 \quad \text{et} \quad z_2 = (M) \cdot 0 = \frac{\beta}{\delta} = \frac{3n^2 K^2}{6n - 8}$$

Nous verrons plus loin que la suite z_j est convergente et donc que $(M)^p p \rightarrow +\infty$ a un sens.

En ce cas z_∞ est défini et est déterminé par :

$$\boxed{z_\infty = \frac{\alpha z_\infty + \beta}{\gamma z_\infty + \delta}} \quad (2)$$

z_∞ est alors la solution positive de l'équation du second degré

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0$$

Il est facile de voir ($\beta > 0$) que cette équation a toujours deux racines réelles de signes opposés.

On tire aisément :

$$\boxed{z_\infty = \frac{\alpha - \delta + \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\gamma}} \quad (3)$$

formule qui compte tenu de $z_j = n^{(j)} - n$ donne la solution du problème par

$$\boxed{n_\infty = z_\infty + n} \quad (4)$$

5. APPLICATION NUMÉRIQUE

(Nous prenons les données de départ, de l'exemple présenté dans l'article cité en référence [1]).

$$\text{Soit } n = n^{(1)} = 6,74 \quad K = 2,24$$

$$\alpha = 3K^2 n = 101,46$$

$$\beta = \alpha n = 683,81$$

$$\gamma = 6$$

$$\delta = 6n - 8 = 32,44$$

$$\text{Le discriminant } \Delta = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma$$

$$\text{vaut } 21\,175,20; \sqrt{\Delta} = 145,52$$

$$\alpha - \delta = 69,02$$

$$\text{On trouve immédiatement } z_\infty = 17,88$$

$$\text{et donc } n_\infty = 17,88 + 6,74 = 24,62 \rightarrow \underline{N = 25}$$

Ce qui confirme la valeur donnée (voir réf. [1]) par l'itération d'EN-KAWA.

$$\text{On en déduit immédiatement } K_\infty = \sqrt{\frac{3n_\infty - 3}{3n_\infty - 4}} \times K = 2,26$$

On observera, en règle générale que dès que n_∞ est « grand » c'est-à-dire $\geq 10n$, $K_\infty \neq K$: on peut facilement donner un développement limité de K_∞ dont la précision est très suffisante.

Posant $\frac{1}{n_\infty} = \varepsilon$, un calcul élémentaire montre que

$$K_{\infty} \neq K \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{6}\right) \quad \text{ou} \quad \boxed{K_{\infty} = K \times \left(1 + \frac{1}{6n_{\infty}}\right)} \quad (5)$$

On pourra facilement vérifier que cette formule est valable pour l'exemple ci-dessus.

6. CONVERGENCE DE LA SUITE z_j

Rappel

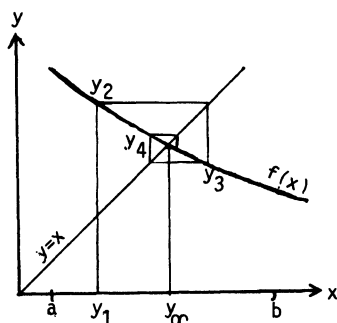
Lorsqu'une suite de valeurs y_j sont obtenues par itération fonctionnelle de la forme :

$$y_j = f(y_{j-1}) \quad \text{avec une valeur de départ } y_1,$$

une condition *suffisante* pour que la suite converge, la fonction f étant supposée continue et dérivable dans un intervalle $[a, b]$ tel que $y_1 \in [a, b]$ est que

$$0 > f'(x) > -1 \quad \forall x \in [a, b]$$

Nous ne le démontrerons pas, car ceci sortirait du cadre d'une application statistique, mais nous illustrerons cette affirmation par le simple schéma ci-après qui présentera concrètement la proposition ci-dessus (cf. [4]).



$|f'(x)| < 1$ sur a, b et $f'(x) < 0$
 $y_1, y_2 \dots y_j \dots \rightarrow y_{\infty}$ solution de $x = f(x)$.

Figure 1

Montrons que l'itération d'ENKAWA est dans ce cas : soit. $z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$.

Le graphe de l'application $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ est, compte tenu des valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ précisées en 4, une hyperbole équilatère, d'asymptotes parallèles aux axes et dont le centre a pour coordonnées $-\delta/\gamma$ et α/γ .

Soit : $-(6n - 8)/6 = 3/4 - n$ et $\frac{3K^2n}{6} = \frac{K^2n}{2}$, c'est-à-dire un

point O' d'abscisse négative (dès que $n > 3/4$ ce qui est le cas, car en pratique $n \geq 2$), et d'ordonnée positive.

Si M est le point de l'hyperbole (dans le premier quadrant) appartenant à la droite $y = x$ alors compte tenu de la position de O' , pente de $O'M <$ pente OM (toutes deux positives) [$X(O') < 0$ et $y(O') > 0$].

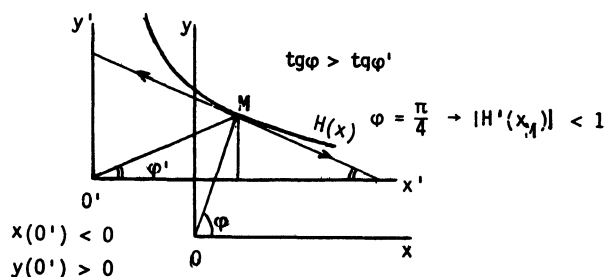


Figure 2

Comme la tangente en M à l'hyperbole est symétrique de $O'M$ par rapport à la direction oy (propriété classique de l'hyperbole équilatère).

La condition $0 > f'(x) > -1$ est réalisée en M et par continuité dans un intervalle $[a, +\infty[$ (incluant $x(M)$).

Si la valeur de départ y_1 ne correspond pas à une zone où $f'(x) > -1$ (cas très rare d'ailleurs) la valeur suivante $f(f(y_1))$ se trouve à droite de $x(M)$ et l'itération est effective.

7. LA DÉTERMINATION DE n_∞ EST JUSTICIABLE D'UN ABAQUE À POINTS ALIGNÉS

Par élimination de z_∞ entre

$$z_\infty = \frac{\alpha z_\infty + \beta}{\gamma z_\infty + \delta} \quad \text{et} \quad n_\infty = z_\infty + n$$

On obtient :

$$n_\infty - n = \frac{\alpha (n_\infty - n) + \beta}{\gamma (n_\infty - n) + \delta}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ayant les valeurs définies en 4.

Soit $n_\infty - n = \frac{\alpha n_\infty}{6n_\infty - 8}$ d'où l'on tire

$$n_\infty = \frac{3K^2 n \cdot n_\infty}{6n_\infty - 8} + n = n \left(1 + \frac{3K^2 n_\infty}{6n_\infty - 8} \right)$$

Divisant cette relation par $n \cdot n_\infty \neq 0$, on obtient

$$\frac{1}{n} = \frac{3K^2}{6n_{\infty} - 8} + \frac{1}{n_{\infty}} \quad (6)$$

Cette équation a trois variables, K , n , n_{∞} est *canonique* c'est-à-dire de la forme :

$$F_2 = A_3 F_1 + B_3$$

où

F_2 est une fonction de la seule variable n

F_1 est une fonction de la seule variable K

A_3 , B_3 des fonctions de la seule variable n_{∞} .

Cette forme linéaire par rapport à F_1 et F_2 est une condition nécessaire et suffisante (cf. réf. [3]) pour prouver que :

a) La relation (6) est justiciable d'un abaque à point alignés.

b) Cet abaque comporte deux supports rectilignes parallèles gradués fonctionnellement en F_1 et F_2 , le troisième support étant curviligne (fonctionnelle de la troisième variable n_{∞}).

8. INDICATIONS SUR LA CONSTRUCTION DE L'ABaque

L'abaque original est établi sur un format A4 $\sim 21 \times 29,7$ cm.

Les échelles F_1 et F_2 sont parallèles au grand axe. La longueur disponible est < 29 cm. D'où les modules choisis en fonction des plages à couvrir et de la précision de lecture recherchée.

Echelle F_1 : en $3K^2$ $K \text{ max} = 3 \rightarrow 3K^2 \text{ max} = 27$

On adopte le module $\ell = 1$ cm/unité

Echelle F_2 : en $1/n$ $n \text{ minimum} = 2 \quad \frac{1}{n} \text{ max} = 0,5$

On adopte le module $\ell' = 50 : 50$ cm/unité $\rightarrow F_2 \text{ max} = 25$ cm.

En réalité $\ell' = -50$ cm pour la raison expliquée ci-après.

Distance entre les échelles : non critique; on la prend aussi large que possible, de l'ordre de 18 cm (largeur de la feuille).

Courbe C_3 : C'est celle qui porte les valeurs de n_{∞} .

Une étude analytique simple montre qu'il est nécessaire d'avoir des échelles F_1 et F_2 orientées en sens contraires pour que C_3 soit effectivement *entre* les échelles. Les origines O_1 et O_2 de F_1 et F_2 sont donc décalées (abaque en N).

Si l'on pose $O_1 O_2 = 2a$ et que l'on rapporte les coordonnées x, y du point courant de C_3 à un système d'axes ayant pour origine O' au milieu de $O_1 O_2$ et pour directions $O_1 O_2$ (axe des x) et $O'Y$ parallèle aux supports de F_1 et F_2

(système d'axes obliques, très commode dans ce cas), on établit aisément (cf. réf. [3]) que

$$x = a \frac{\ell + \ell' A_3}{\ell - \ell' A_3} \quad y = \frac{\ell \ell' B_3}{\ell - \ell' A_3}$$

sont les coordonnées paramétriques du point $M(n_\infty)$ définissant C_3 ce qui devient compte tenu des valeurs (> 0 ou < 0) de ℓ et ℓ' et des expressions de A_3 et B_3

$$x = a \frac{6n_\infty - 58}{6n_\infty + 42} \quad y = - \frac{50(6n_\infty - 8)}{n_\infty(6n_\infty + 42)} \quad \text{en cm (1)}$$

La courbe se construit aisément par points et est graduée en n_∞ . Sur l'abaque original, $2a = \sqrt{27^2 + 18^2} = 32,45$ cm, $a = 16,225$ cm.

Points remarquables

Point médian :

$$x = 0 \rightarrow n_\infty = \frac{58}{6} = 9,67 \quad y = -2,59 \text{ cm}$$

$$x = a \rightarrow n_\infty = \infty \quad y = 0 \quad (\text{point commun avec } F_2)$$

$$x = -a \rightarrow n_\infty = 4/3 \rightarrow y = 0 \quad (\text{point commun avec } F_1).$$

Ce point n'est pas dans la partie utile mais permet de préciser le tracé. En ce dernier point la tangente passe par le point sur F_2 de cote $n = 4/3$.

Autres particularités

1) Le calcul des dérivées $x'(n_\infty)$ et $y'(n_\infty)$ montre qu'au point $O_2(n_\infty \rightarrow \infty)$ la pente en coordonnées oblique est $3/a$; d'où la construction de la tangente très voisine de la courbe définie par O_2 et le point $T(0, -3 \text{ cm})$. En outre il n'y a pas de point d'inflexion par $n_\infty > 0$.

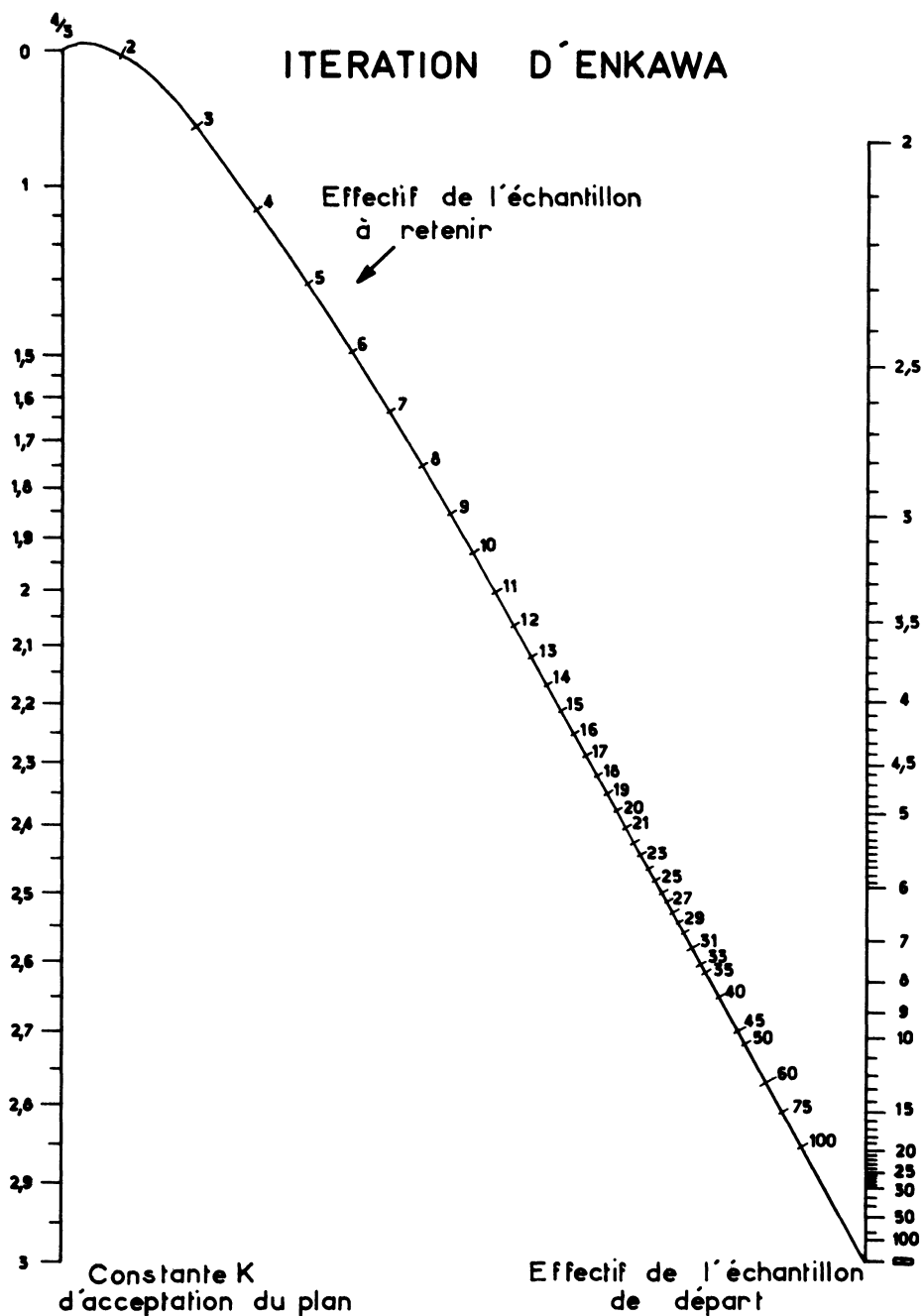
2) Si dans la formule de départ $\frac{1}{n} = \frac{3K^2}{6N_\infty - 8} + \frac{1}{n_\infty}$ on fait tendre K vers 0, cette égalité devient $\frac{1}{n} = \frac{1}{n_\infty}$ ou $n_\infty = n$, ce qui est d'une interprétation nomographique très intéressante :

Toute droite Δ passant par $K = 0$ (sur F_1) c'est-à-dire O_1 coupe la courbe $C_3(n_\infty)$ et la courbe $F_2\left(\frac{1}{n}\right)$ en des points ayant même valeur de graduation ($n = n_\infty$).

Cette circonstance permet d'aider puissamment la construction (surtout pour les petites valeurs de n) et d'en vérifier l'exactitude.

3) Le point où la tangente est parallèle à l'axe O_1O_2 qui correspond au minimum relatif de y , se détermine aisément par $y'(n_\infty) = 0$ on trouve $n_\infty = 4\frac{2}{3} = 4,67$, $x = -\frac{3a}{7}$; $y_{\min} = -3,06$.

(1) L'abaque est reproduit avec un certain rapport de réduction que nous ne connaissons pas au moment de la rédaction.



Aligner les points des deux échelles verticales correspondants respectivement à la constante K et à l'effectif de départ.

La droite coupe l'échelle curviligne en un point coté donnant l'effectif de l'échantillon à retenir.

9. UTILISATION DE L'ABAQUE

Aligner les valeurs de départ K et n respectivement lues sur les échelles F_1 et F_2 , au besoin en interpolant. La droite coupe C_3 en un point gradué à la valeur n_∞ cherchée, prendre N entier directement supérieur. K_∞ est ensuite calculé par $K_\infty = K \times \left(1 + \frac{1}{6n_\infty}\right)$, cette dernière formule étant suffisamment simple pour ne pas justifier un abaque spécial.

Exemple : $K = 2,24$ $n = 6,74 \rightarrow$ l'alignement donne $n_\infty = 24,6$

D'où : $N = 25$

$$K_\infty = 2,24 \times \left(1 + \frac{1}{6 \times 25}\right) \sim 2,26$$

10. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. VESSEREAU. — Une approximation utile pour la construction d'un plan de contrôle par variable lorsque l'écart-type est inconnu. *Revue de Statistique Appliquée*, 1985, Vol. XXXIII, n° 1, p. 5-11.
- [2] Takao ENKAWA. — *Quality*, 1980, Vol. 10, N° 4.
- [3] M. FRECHET et H. ROULLET. — *Nomographie*, Armand COLIN, Paris (1952).
- [4] E. GAU. — *Calculs numériques et graphiques*, Armand COLIN, Paris (1941), p. 174-176.

11. REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur André VESSEREAU, Inspecteur Général Honoraire des Manufactures de l'Etat qui a bien voulu encourager ce travail et Monsieur Daniel MICHIELS, Chef d'Atelier à la SEITA qui m'a prêté le concours de son habileté pour le tracé de l'abaque.