Revue de statistique appliquée

J. David

Un nouveau coefficient permettant d'interpréter la non-linéarité d'une loi de Weibull comme un effet du déverminage

Revue de statistique appliquée, tome 32, nº 4 (1984), p. 51-56
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1984__32_4_51_0>

UN NOUVEAU COEFFICIENT PERMETTANT D'INTERPRETER LA NON-LINEARITE D'UNE LOI DE WEIBULL COMME UN EFFET DU DEVERMINAGE

J. DAVID

Direction de la Qualité. Automobiles Peugeot

RESUME

L'existence d'un coefficient γ non-nul n'est pas toujours la meilleure interprètation pour une distribution de WEIBULL non-rectiligne : un nouveau coefficient permet d'interprèter cette forme de distribution comme l'effet d'un déverminage.

I. INTRODUCTION

La plupart des distributions de défaillances peuvent être représentées, avec des paramètre convenablement choisis, par la loi de WEIBULL dont la fonction de répartion s'écrit :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{pour } x < \gamma \\ F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta} & \text{pour } x \geqslant \gamma \end{cases}$$

où : η, positif, est le paramètre d'échelle
γ, positif ou nul, est le paramètre de position
β, positif, est le paramètre de forme

Dans le papier à échelles fonctionnelles d'Alan PLAIT, la courbe représentative peut être :

– si $\gamma = 0$: rectiligne,
– si $\gamma > 0$: une courbe dont la concavité est orientée en bas à droite.

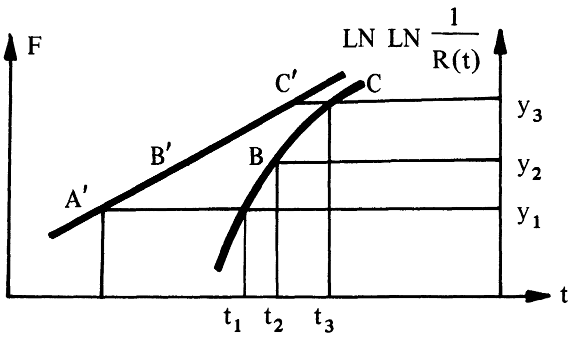
Quand la courbe représentative est une droite, on trouve très facilement les deux coefficients :

β, grâce à un quart de cercle, ou une échelle verticale, gradué en pente
η, abscisse du point d'ordonnée nulle de la droite tracée (ordonnée mesurée sur l'échelle verticale de droite, en Log Log).

Ces deux paramètres sont importants : β indique la nature du défaut ($\beta < 1$: défaillance de jeunesse ; $\beta = 1$: défaillance aléatoire ; $\beta > 1$: défaillance d'usure) ; η permet de calculer la durée de vie moyenne par l'intermédiaire d'un coefficient qui dépend de β : $\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$

Quand la courbe représentative n'est pas rectiligne, on ne peut pas déterminer la pente β immédiatement. Pour obtenir la pente β, il faut transformer la courbe

Mots-clés : **Weibull ; Distribution non-rectiligne ; coëfficient ; Déverminage.**



en droite : pour cela, on transforme les points de la courbe en leur faisant subir une translation horizontale en soustrayant à l'abscisse de chacun une même quantité γ

En prenant sur la courbe représentative trois points A, B, C tels que :

$$y_3 - y_2 = y_2 - y_1 = 1$$

on calcule γ à partir des abscisses de ces points par

$$\gamma = \frac{t_1\, t_3 - t_2^2}{t_1 + t_3 - 2t_2}$$

γ s'interprète comme un temps d'utilisation garanti sans incident.

Cependant il existe des cas où cette interprètation n'est pas la meilleure.

Dans une production de série peu maîtrisée, il y aura fatalement quelques défauts de réalisation, lesquels vont engendrer, peu après la mise en service du lot de pièces, des incidents de jeunesse.

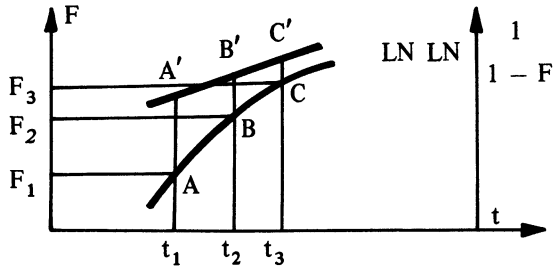
Si le lot est mis en service sans contrôle de fonctionnement, son suivi en fiabilité donnera une distribution de WEIBULL dont le début sera normalement une droite de faible pente.

Si, au contraire, toute – ou partie de – la production est soumise à un essai de fonctionnement d'une certaine durée, un "DEVERMINAGE", les incidents de jeunesse les plus précoces apparaîtront pendant cet essai, dans une proportion δ, les produits correspondants seront réparés ou remplacés et, apres la mise en service du lot, les incidents aparaîtront suivant un mode qui ne sera pas naturel (puisqu'une proportion δ d'incidents de jeunesse ne pourront pas apparaître) et cela se traduira, dans le suivi en fiabilité, par une distribution de WEIBULL courbe dont la concavité sera elle aussi orientée en bas à droite.

La méthode ci-après permet d'estimer la proportion δ de pièces dont l'essai a permis l'élimination.

II. METHODE PROPOSEE

Recherche d'un coefficient δ permettant de transformer en droite une loi de Weibull courbe



Si un tel paramètre existe, en augmentant d'une même quantité δ les fréquences observées pour différents points, les points transformés seront alignés, ce qui se traduira par :

$$F(t) + \delta = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$$

On choisit sur la courbe trois points A, B, C de coordonnées respectives $t_1\ F_1 \quad t_2\ F_2 \quad t_3\ F_3$

La pente du segment AB est :

$$\beta_{1,2} = \frac{\mathrm{LNLN}\dfrac{1}{1-F_2} - \mathrm{LNLN}\dfrac{1}{1-F_1}}{\mathrm{LN}\,t_2 - \mathrm{LN}\,t_1}$$

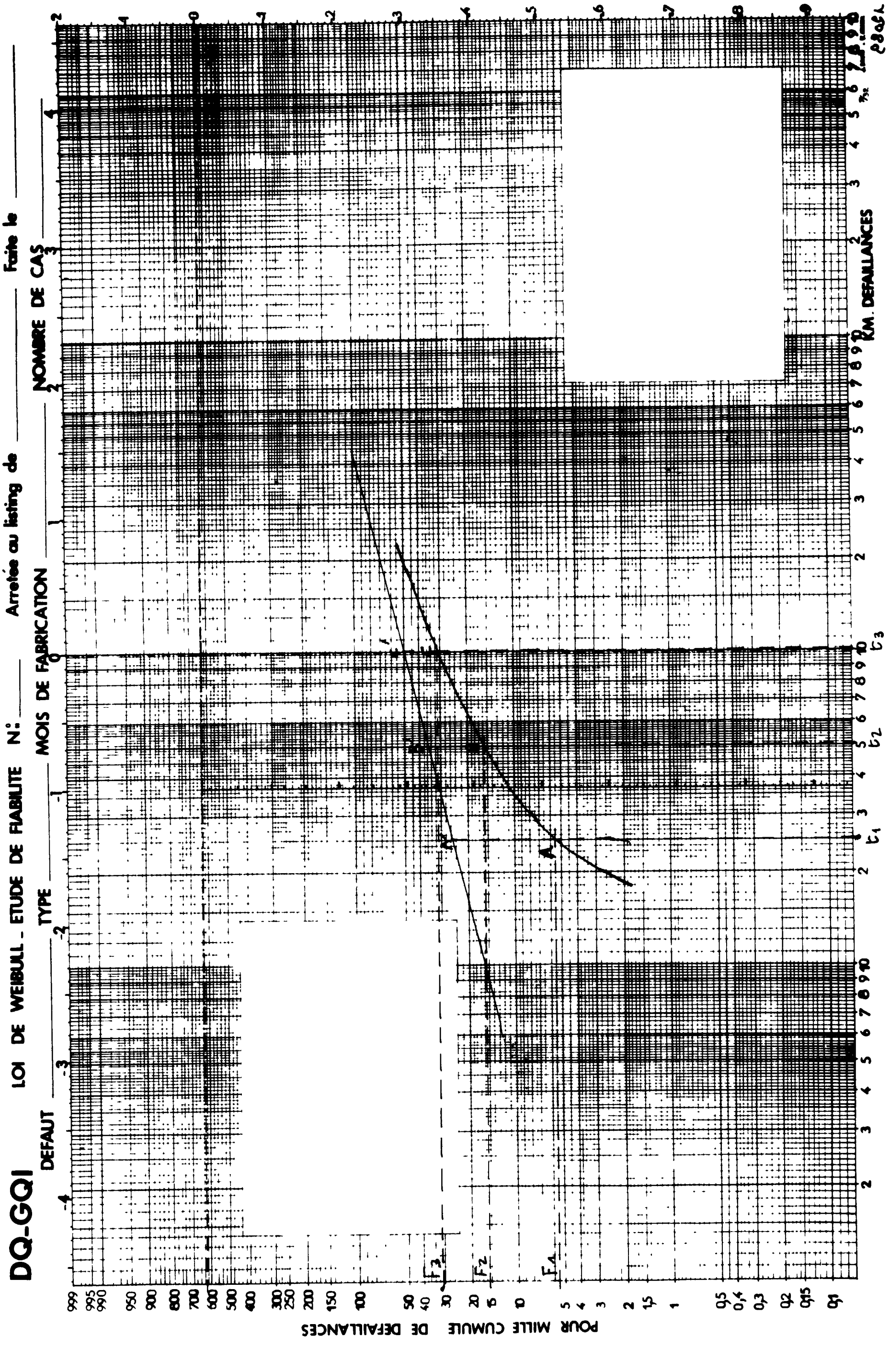
et celle du segment BC est :

$$\beta_{2,3} = \frac{\mathrm{LNLN}\dfrac{1}{1-F_3} - \mathrm{LNLN}\dfrac{1}{1-F_2}}{\mathrm{LN}\,t_3 - \mathrm{LN}\,t_2}$$

Si, après avoir augmenté de δ les trois fréquences observées, les points transformés sont alignés, on aura :

$$\frac{\mathrm{LNLN}\dfrac{1}{1-F_2-\delta} - \mathrm{LNLN}\dfrac{1}{1-F_1-\delta}}{\mathrm{LN}\,t_2 - \mathrm{LN}\,t_1} = \frac{\mathrm{LNLN}\dfrac{1}{1-F_3-\delta} - \mathrm{LNLN}\dfrac{1}{1-F_2-\delta}}{\mathrm{LN}\,t_3 - \mathrm{LN}\,t_2}$$

cette équation exprime que les transformés des segments AB et BC ont la même pente. Il est dès maintenant possible de calculer δ par tâtonnement, avec un calculateur programmable, quels que soient les points A, B, C.


DQ-GQI
LOI DE WEIBULL - ETUDE DE FIABILITE N°:
Arretée au listing de
Faite le
DEFAUT
TYPE
MOIS DE FABRICATION
NOMBRE DE CAS
KM. DEFAILLANCES
POUR MILLE CUMULE DE DEFAILLANCES

Cherchons néanmoins une construction et une formule qui permettront de déterminer δ sans tâtonnement.

Comme $\mathrm{LN}\, a - \mathrm{LN}\, b = \mathrm{LN}\dfrac{a}{b}$,

$$\frac{\mathrm{LN}\dfrac{\mathrm{LN}\dfrac{1}{1-F_2-\delta}}{\mathrm{LN}\dfrac{1}{1-F_1-\delta}}}{\mathrm{LN}\dfrac{t_2}{t_1}} = \frac{\mathrm{LN}\dfrac{\mathrm{LN}\dfrac{1}{1-F_3-\delta}}{\dfrac{1}{1-F_2-\delta}}}{\mathrm{LN}\dfrac{t_3}{t_2}}$$

On voit qu'on peut rendre les dénominateurs égaux avec :

$\mathrm{LN}\dfrac{t_2}{t_1} = \mathrm{LN}\dfrac{t_3}{t_2}$, c'est-à-dire : $\dfrac{t_2}{t_1} = \dfrac{t_3}{t_2}$, donc en choisissant les points A, B, C de telle sorte que la projection de B sur l'axe des temps soit au milieu du segment déterminé par les projections de A et C.

Il vient alors :

$$\mathrm{LN}\frac{\mathrm{LN}\dfrac{1}{1-F_2-\delta}}{\mathrm{LN}\dfrac{1}{1-F_1-\delta}} = \mathrm{LN}\frac{\mathrm{LN}\dfrac{1}{1-F_3-\delta}}{\mathrm{LN}\dfrac{1}{1-F_2-\delta}}$$

et, en prenant les exponentielles des deux membres :

$$\left(\mathrm{LN}\frac{1}{1-F_2-\delta}\right)^2 = \mathrm{LN}\frac{1}{1-F_1-\delta} * \mathrm{LN}\frac{1}{1-F_3-\delta}$$

Cette équation, ne peut pas être résolue en δ. Remarquons que :

$$\mathrm{LN}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

et que, au début d'une distribution de Weibull, les fréquences cumulées sont faibles : les quantités sous logarithmes sont assez proches de 1 pour qu'on puisse n'utiliser que le terme en x du développement.

Alors :

$$(F_2 + \delta)^2 = (F_1 + \delta)(F_3 + \delta)$$

$$F_2^2 + 2F_2\delta + \delta^2 = F_1F_3 + (F_1 + F_3)\,\delta + \delta^2$$

$$\delta = \frac{F_2^2 - F_1F_3}{F_1 + F_3 - 2F_2}$$

d'où la REGLE :

On choisit sur la courbe trois points A, B, C dont les abscisses (en Log t) satisfont : $x_3 - x_2 = x_2 - x_1$. Leurs ordonnées sont F_1, F_2, F_3. La fréquence, correspondant à la proportion de produits éliminés par le déverminage, est approximativement :

$$\delta = \frac{F_2^2 - F_1F_3}{F_1 + F_3 - 2F_2}$$

III. EXEMPLE D'APPLICATION

Un produit industriel, suivi en fiabilité au début de sa mise en service, a donné les résultats concrétisés par la courbe jointe.

On choisit les points :

$$A \begin{cases} t_1 = 25 \\ F_1 = \ 0{,}0053 \end{cases} \quad B \begin{cases} t_2 = 50 \\ F_2 = \ 0{,}0156 \end{cases} \quad C \begin{cases} t_3 = 100 \\ F_3 = \ 0{,}03 \end{cases}$$

On a bien la condition imposée :

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{t_2}{t_1} = 2$$

On a alors :

$$\delta = \frac{0{,}0156^2 - 0{,}0053*0{,}03}{0{,}0053 + 0{,}03 - 2*0{,}0156} = \frac{0{,}00024336 - 0{,}000159}{0{,}0353 - 0{,}0312}$$

$$= \frac{0{,}00008436}{0{,}0041} = 0{,}02058$$

La fréquence d'incidents éliminés par le déverminage peut être estimée à 2,06 %.