

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

P. BRU

F. RUGET

## Mise en œuvre d'un modèle à coefficient aléatoire

*Revue de statistique appliquée*, tome 31, n° 4 (1983), p. 37-52

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1983\\_\\_31\\_4\\_37\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1983__31_4_37_0)

© Société française de statistique, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# MISE EN OEUVRE D'UN MODELE A COEFFICIENT ALEATOIRE

P. BRU (\*) et F. RUGET (\*\*)

## I. INTRODUCTION

Les modèles linéaires classiques à coefficients fixes ne suffisent pas toujours pour décrire les phénomènes observés car les individus diffèrent dans leur comportement, ce qui implique une variabilité des coefficients.

Le paragraphe II est consacré à quelques généralités sur les modèles de régression à coefficients aléatoires.

Dans le paragraphe III, nous considérons un modèle à coefficient aléatoire particulier dépendant du temps, pour lequel nous présentons différentes méthodes d'estimation des paramètres

- a) méthode de Reinsel ;
- b) méthode de Cooley et Prescott ;
- c) méthode des moindres carrés estimés.

Ensuite on fait certains commentaires relatifs aux différentes méthodes.

Dans le paragraphe IV, nous donnons une mise en pratique du modèle permettant à un non spécialiste d'utiliser les méthodes indiquées.

Enfin nous illustrons ce modèle en présentant une application (paragraphe V).

## II. GENERALITES SUR LES MODELES DE REGRESSION A COEFFICIENTS ALEATOIRES

### 1. Situation

Le modèle linéaire usuel est :

$$y_t = \sum_{i=1}^N z_{it} \gamma_i + \epsilon_t \quad t = 1, \dots, T \quad (2.1)$$

où  $y_t$  est une variable aléatoire observée  
les  $z_{it}$  sont des grandeurs connues non aléatoires  
les  $\gamma_i$  sont des constantes inconnues à estimer  
les  $\epsilon_t$  sont distribués indépendamment et identiquement avec moyenne 0.

---

(\*) Laboratoire de Statistique et Probabilités, E.R.A.-C.N.R.S.-591, Université Paul Sabatier, Toulouse.

(\*\*) Laboratoire de Bioclimatologie, I.N.R.A. Estrées-Mons, 80200 Peronne.

Nous envisageons maintenant quelques cas où ce modèle ne peut être utilisé directement, mais où la difficulté est “tournée” par l’introduction d’un aléa sur les coefficients  $\gamma_i$  ; on a donc le modèle :

$$y_t = \sum_{i=1}^N z_{it} \gamma_{it} + \epsilon_t \quad t = 1, \dots, T \quad (2.2)$$

a) Dans certaines applications biologiques ou sociales, la constance des coefficients  $\gamma_i$  dans des observations consécutives peut raisonnablement être contestée. Par exemple, on sait que la réponse ( $\gamma_i$ ) d’une plante à un engrais est fortement influencée par l’état physiologique de la plante et ses conditions d’environnement, parmi lesquelles on peut citer la température et les précipitations. Selon la façon dont on connaît ces facteurs, leur effet peut être pris en compte de différentes manières.

– Si température et précipitations peuvent être maintenues constantes, on peut penser que  $\gamma_{it}$  sera constant avec une bonne approximation (on a une régression classique).

– Si température et précipitations varient mais peuvent être observées, il est normal d’incorporer explicitement leur influence dans le modèle.

– Si température et précipitations varient et ne sont pas observées, on compense l’ignorance de leur comportement en permettant à  $\gamma_{it}$  de varier de façon aléatoire (dans une classe de distributions convenable, avec  $E(\gamma_{it}) = \gamma_i$ ).

b) Beaucoup d’équations économétriques sont mal spécifiées en ce sens qu’elles excluent des variables qui entreraient normalement dans l’équation.

Par exemple, considérons une équation de la forme

$$y_t = \sum_{i=1}^N \beta_i x_{it} + \sum_{j=1}^M \gamma_j z_{jt} + \epsilon_t \quad t = 1, \dots, T \quad (2.3)$$

où  $y$  est une variable endogène. Les  $x_{it}$  et  $z_{jt}$  sont les variables explicatives (exogènes).

Si l’économètre ignore le  $z_{jt}$  et met les termes correspondants dans l’erreur  $\epsilon_t$ , alors les résidus  $\epsilon_t$  se comporteront de façon pathologique. On est ainsi amené à considérer des modèles linéaires dans lesquels les coefficients des variables explicatives peuvent être soumis à une variation aléatoire.

## 2. Classification des modèles à coefficients aléatoires.

On peut classer ces modèles en deux catégories suivant le rôle que joue l’indice  $t$  (souvent, en pratique, le temps).

a) SPJØTVOLL (1977) donne une revue des modèles où cet indice n’a pas de rôle spécifique.

On considère le modèle de régression général suivant :

$$y_{ij} = \beta_{0ij} + \beta_{1ij} x_{1ij} + \dots + \beta_{p1j} x_{p1j} + e_{ij} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, s \end{array} \right. \quad (2.4)$$

où les variables indépendantes  $x_{hij}$  sont supposées fixées  
 les coefficients de régression  $\beta_{hij}$  sont aléatoires avec

$$E(\beta_{hij}) = \theta_h \quad \text{et} \quad \text{Cov}(\beta_{hij}, \beta_{kij}) = \lambda_{hk}.$$

$\beta_{hij}$  et  $\beta_{hi'j'}$  sont indépendants pour  $(i, j) \neq (i', j')$

les termes d'erreur ( $\epsilon_{ij}$ ) sont supposés indépendants de moyenne 0 et de variance  $\sigma^2$ , et indépendants des ( $\beta_{hij}$ ).

Plusieurs auteurs, tels RAO (1965), SWAMY (1970), FISK (1967), HILDRETH et HOUCK (1968), ont étudié des cas particuliers de ce modèle général (2.4).

b) Les modèles, où les variations des coefficients aléatoires dépendent du temps  $t$  sont, au moins de façon formelle, inspirés du filtre de Kalman (HANNAN (1970)). Pour une étude détaillée de ces questions, on peut consulter PAGAN (1980) et sa bibliographie.

### III. UN MODELE A COEFFICIENTS ALEATOIRES DEPENDANT DU TEMPS

#### 1. Présentation

Le modèle considéré est :

$$y_t = \beta_{ot} + x_t' \beta + \epsilon_t \quad t = 1, \dots, T \quad (3.1)$$

$$\beta_{ot} = \beta_{ot-1} + \nu_t \quad (3.2)$$

où  $x_t$  est un vecteur à  $k$  composantes de variables explicatives

$\beta$  est le vecteur des coefficients de régression, inconnu

$\beta_{ot}$  (processus de Wiener) représente ce que l'on appelle la composante permanente de la perturbation  $\beta_{ot} + \epsilon_t$  dans (3.1).

$\epsilon_t$  est le terme d'erreur usuel dans la régression, considéré comme la composante transitoire dans le terme de perturbation.

$\nu_t$  est le terme d'erreur additif indépendant superposé dans le modèle de régression.

les  $\epsilon_t$  et  $\nu_t$  sont indépendants deux à deux, identiquement distribués suivant une loi normale de moyenne 0 et de variances respectives  $\sigma_\epsilon^2$  et  $\sigma_\nu^2$ .

Le but est d'estimer les paramètres du modèle et de reconstituer la trajectoire de la composante permanente  $\beta_{ot}$  en fonction du temps.

Ce modèle a été étudié en particulier par REINSEL (1979) et COOLEY et PRESCOTT (1976).

D. COMMENGES (1980) a étudié un modèle analogue dans lequel il suppose  $\beta_{oo}$  connu ce qui n'est pas le cas dans cet article. Il sera utile de consulter sa bibliographie en complément de celle figurant dans le présent article.

Le modèle à deux aléas de BACHELET et MORLAT (1966) appartient à cette classe.

## 2. Estimation des paramètres du modèle $\beta$ , $\sigma_\epsilon^2$ et $\sigma_\nu^2$ :

### 2.1. Méthode de Reinsel

Nous allons résumer la méthode exposée par REINSEL (1979).

En prenant les différences premières de  $y_t$  et  $x_t$  dans (3.1) et en utilisant (3.2), on obtient :

$$y_t - y_{t-1} = (x_t - x_{t-1})' \beta + \nu_t + \epsilon_t - \epsilon_{t-1} \quad t = 2, \dots, T$$

Posons

$$w_t = y_t - y_{t-1}$$

$$z_t = x_t - x_{t-1} \quad t = 2, \dots, T$$

$$u_t = \nu_t + \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$$

Le modèle s'écrit alors :

$$w_t = z_t' \beta + u_t \quad t = 2, \dots, T \quad (3.3)$$

Calculant  $\text{Cov}(u_t, u_{t-s})$  pour tout  $s$ , on remarque que  $u_t$  est une moyenne mobile d'ordre 1 ; on peut donc écrire :

$$u_t = a_t - \theta a_{t-1} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta < 1$$

où  $a_t$  est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance  $\sigma_a^2$ .

On montre facilement les relations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_\epsilon^2 = \theta \sigma_a^2 \\ \sigma_\nu^2 = (1 - \theta)^2 \sigma_a^2 \\ \theta = 1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\epsilon^2} - \frac{\sigma_\nu}{\sigma_\epsilon} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \frac{\sigma_\nu^2}{\sigma_\epsilon^2}} \end{cases} \quad (3.4)$$

Définissons maintenant les vecteurs à  $(T - 1)$  composantes

$$W = (w_2, \dots, w_T)' \quad u = (u_2, \dots, u_T)'$$

et la matrice  $(T - 1) \times k$

$$Z = (z_2, \dots, z_T)'$$

(3.3) s'écrit alors

$$W = Z \beta + u \quad (3.5)$$

avec

$$E(u) = 0$$

$$V = \sigma_a^2 [(1 + \theta^2)I - \theta A] = \sigma_a^2 Q_\theta$$

où  $V$  désigne la matrice de covariance de  $u$  et où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ 1 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{matrice } (T-1) \times (T-1) \text{ dont les éléments}$$

sont égaux à 1 sur les diagonales juste au-dessus et au-dessous de la diagonale principale et nuls ailleurs.

**Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance**

Si  $\theta$  est connu, les estimateurs du maximum de vraisemblance de  $\beta$  et  $\sigma_a^2$  sont :

$$B(\theta) = (Z' Q_\theta^{-1} Z)^{-1} Z' Q_\theta^{-1} W \tag{3.6}$$

$$S^2(\theta) = \frac{1}{T-1} [W - ZB(\theta)]' Q_\theta^{-1} [W - ZB(\theta)]$$

Mais  $\theta$  n'est pas connu.

Pour estimer  $\theta$ , on utilise la méthode suivante :

**Technique du maximum de vraisemblance concentrée :**

On considère le logarithme de la fonction dite de vraisemblance concentrée  $L_c(W, \theta)$  obtenu à partir de la vraisemblance en y remplaçant  $\sigma_a^2$  par  $S^2(\theta)$ ,  $\beta$  par  $B(\theta)$  et en négligeant la constante.

$$L_c(W, \theta) = - \frac{T-1}{2} \text{Log } S^2(\theta) - \frac{1}{2} \text{Log } |Q_\theta| \tag{3.7}$$

On estime  $\theta$  par  $\hat{\theta}$  tel que

$$L_c(W, \hat{\theta}) \geq L_c(W, \theta) \quad \forall \theta \in [0, 1]$$

On prend alors  $B(\hat{\theta})$  et  $S^2(\hat{\theta})$  comme estimateurs de  $\beta$  et  $\sigma_a^2$ .

Ayant les estimations de  $\theta$  et  $\sigma_a^2$ , on a celles de  $\sigma_e^2$  et  $\sigma_v^2$  par les relations (3.4).

**Remarque :**

La procédure étant coûteuse car il faut inverser  $Q_\theta$  pour chaque valeur de  $\theta \in [0, 1]$ ; Reinsel donne une méthode pour obtenir des estimateurs du maximum de vraisemblance approximatifs pour  $\beta$ ,  $\theta$  et  $\sigma_a^2$ . Il utilise l'approximation  $\sigma_a^2 GG'$  pour la matrice de covariance  $V$ , où  $G = I - \theta L$  et

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{matrice ayant pour éléments 1 sur la diagonale}$$

juste au-dessous de la diagonale principale et 0 ailleurs. Cela revient à remplacer le premier élément de la diagonale principale de  $V$ , qui est  $\sigma_a^2(1 + \theta^2)$ , par  $\sigma_a^2$ .

## 2.2. Méthode de Cooley et Prescott

COOLEY et PRESCOTT (1976) choisissent une période de temps  $t$  et une valeur  $\beta_{ot}$  de référence, et tous les autres  $\beta_{os}$  sont exprimés en fonction de  $\beta_{ot}$ .

De la relation (3.2), on tire :

$$\beta_{os} = \begin{cases} \beta_{ot} - \sum_{j=1}^{t-s} \nu_{s+j} & \text{si } 1 \leq s < t \\ \beta_{ot} & \text{si } s = t \\ \beta_{ot} + \sum_{j=1}^{s-t} \nu_{t+j} & \text{si } t < s \leq T \end{cases} \quad (3.8)$$

Posant  $y = (y_1, \dots, y_T)'$

$$X^* = \begin{bmatrix} 1 & x'_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x'_T \end{bmatrix} \quad \text{matrice } T \times (k+1)$$

$$\beta_t^* = \begin{bmatrix} \beta_{ot} \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad e = (e_1, \dots, e_T)'$$

où

$$e_s = \begin{cases} \epsilon_s - \sum_{j=1}^{t-s} \nu_{s+j} & \text{si } 1 \leq s < t \\ \epsilon_t & \text{si } s = t \\ \epsilon_s + \sum_{j=1}^{s-t} \nu_{t+j} & \text{si } t < s \leq T \end{cases}$$

les données pour le modèle (3.1)-(3.2) peuvent être écrites comme

$$y = X^* \beta_t^* + e \quad (3.9)$$

où

$$E(e) = 0$$

$$\text{Cov}(e) = Q_t = \sigma_\epsilon^2 I + \sigma_\nu^2 R_t$$

avec  $R_t = (r_{ij})$  matrice  $T \times T$  où

$$r_{ij} = \begin{cases} \min \{|t-i|, |t-j|\} & \text{si } (t-i)(t-j) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cooley et Prescott considèrent  $\beta_{ot}$  comme un paramètre inconnu fixé et estiment le vecteur  $\beta_t^* = (\beta_{ot} \beta')$  par la méthode des moindres carrés généralisés (moindres carrés avec la métrique  $Q_t^{-1}$ ).

Pour des valeurs données de  $\sigma_\epsilon^2$  et  $\sigma_\nu^2$ , l'estimateur de  $\beta_t^*$  est

$$\hat{\beta}_t^* = (X^{*'} Q_t^{-1} X^*)^{-1} X^{*'} Q_t^{-1} y$$

on peut exprimer cet estimateur sous la forme  $\hat{\beta}_t^* = (\hat{\beta}_{ot} \hat{\beta}_t')'$  avec :

$$\hat{\beta}_t = [X'(Q_t^{-1} - Q_t^{-1} \mathbf{1} \{\mathbf{1}' Q_t^{-1} \mathbf{1}\}^{-1} \mathbf{1}' Q_t^{-1}) X]^{-1} X' [Q_t^{-1} - Q_t^{-1} \mathbf{1} \{\mathbf{1}' Q_t^{-1} \mathbf{1}\}^{-1} \mathbf{1}' Q_t^{-1}] y \quad (3.10)$$

$$\hat{\beta}_{ot} = \{\mathbf{1}' Q_t^{-1} \mathbf{1}\}^{-1} \mathbf{1}' Q_t^{-1} (y - X \hat{\beta}_t) \quad (3.11)$$

où  $X = (x_1, \dots, x_T)'$  et  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)'$  matrice  $T \times 1$ .

### 2.3. Méthode des moindres carrés à deux étapes

Reprenons le modèle (3.5)  $W = Z\beta + u$ .

La première étape consiste à estimer  $\beta$  par la méthode des moindres carrés ordinaires. L'estimateur de  $\beta$  est alors :

$$\tilde{\beta} = (Z'Z)^{-1} Z'W \quad (3.12)$$

$$\text{Posons } \tilde{u} = W - Z\tilde{\beta} = W - Z(Z'Z)^{-1} Z'W = MW$$

$$\text{où } M = I - Z(Z'Z)^{-1} Z'.$$

On a

$$\text{Var } \tilde{u} = MVM \quad (3.13)$$

où  $V$  est la matrice de covariance de  $u$ .

Mais, d'autre part,

$$V = \begin{bmatrix} 2\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\nu^2 - \sigma_\epsilon^2 & & & 0 \\ -\sigma_\epsilon^2 & & & \\ & & & -\sigma_\epsilon^2 \\ 0 & -\sigma_\epsilon^2 & & 2\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\nu^2 \end{bmatrix}$$

On peut donc estimer  $\sigma_\nu^2 + 2\sigma_\epsilon^2$  et  $-\sigma_\epsilon^2$  par

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}_\nu^2 + 2\tilde{\sigma}_\epsilon^2 = \frac{1}{T-1-k} \sum_{t=2}^T [\tilde{u}_t - \tilde{u}]^2 \\ \tilde{\sigma}_\epsilon^2 = -\frac{1}{T-1-k} \sum_{t=3}^T [(\tilde{u}_t - \tilde{u})(\tilde{u}_{t-1} - \tilde{u})] \end{array} \right. \quad (3.14)$$

$$\text{où } \tilde{u} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T \tilde{u}_t$$

d'où on tire  $\tilde{\sigma}_\epsilon^2$  et  $\tilde{\sigma}_\nu^2$ .

Ainsi, reportant  $\tilde{\sigma}_\epsilon^2$  et  $\tilde{\sigma}_\nu^2$  dans  $V$ , on obtient une estimation de  $V$ , notée  $\tilde{V}$ .



La deuxième étape consiste à estimer  $\beta$  par la méthode des moindres carrés généralisés en prenant  $\tilde{V}$  comme matrice de covariance de  $u$ . L'estimateur de  $\beta$  est alors :

$$\hat{\beta} = (Z' \tilde{V}^{-1} Z)^{-1} Z' \tilde{V}^{-1} W \quad (3.15)$$

**Propriété de  $\hat{\beta}$  :**

$\hat{\beta}$  est sans biais.

En effet, on montre facilement que  $\tilde{V}$  est une fonction paire de  $u$  ; et à partir du théorème de KAKWANI (1967), on en déduit que  $\hat{\beta}$  est sans biais.

#### 2.4. Commentaires sur les différentes approches :

a) Pour estimer les paramètres du modèle, Reinsel fait varier un des paramètres,  $\theta$ , à l'intérieur de l'intervalle  $[0, 1]$  et estime celui-ci en prenant la valeur qui maximise  $L_c$ , logarithme de la fonction de vraisemblance concentrée, dans cet intervalle. Mais il peut arriver que le maximum absolu de  $L_c$  soit à l'extérieur de  $[0, 1]$ , comme nous avons pu le constater sur plusieurs simulations que nous avons faites.

Si le maximum de  $L_c$  est en dehors de  $[0, 1]$ , la méthode de Reinsel donne 0 si la plus grande valeur de  $L_c$  dans  $[0, 1]$  apparaît en 0, et elle donne 1 si la plus grande valeur de  $L_c$  dans  $[0, 1]$  apparaît en 1, alors qu'en réalité ce  $\theta$  (0 ou 1) ne donne pas le maximum de  $L_c$ . Pour cette raison, nous avons suggéré une autre méthode : celle des moindres carrés estimés où ce problème n'apparaît plus. Mais elle comporte une difficulté : l'estimation des variances  $\sigma_e^2$  et  $\sigma_v^2$  peut être négative. Ces deux obstacles ne semblent pas liés.

D'autre part, sur des simulations que nous avons faites, et pour lesquelles le  $\theta$  correspondant au maximum absolu de  $L_c$  appartient à  $[0, 1]$ , les résultats obtenus par les approches de Reinsel et des moindres carrés à deux étapes sont à peu près identiques (c'est le cas de l'application du paragraphe V).

b) On montre (REINSEL (1979)) que les estimateurs de  $\beta$  donnés par REINSEL et COOLEY et PRESCOTT sont identiques, mais les paramétrisations adoptées par ces auteurs diffèrent pour le reste du modèle.

### 3. Reconstitution de la trajectoire des $\beta_{ot}$ :

Dans ce paragraphe, on suppose que les valeurs des paramètres  $\beta$ ,  $\theta$  et  $\sigma_a^2$  sont connues (ou que l'on en a des estimations).

**Recherche des  $\hat{b}_{ot}$  prédictions optimales des  $\beta_{ot}$  :**

Ces prédictions sont basées sur  $y_t, x_t \quad t=1, \dots, T$ .

Pour cela, on pose  $b = (\beta_{o1}, \dots, \beta_{oT})'$ .

On utilise (3.8) avec  $t = 0$  pour montrer que :

$$E(b) = \beta_{oo} \mathbf{1}$$

$$\text{Var}(b) = \sigma_v^2 \mathbf{R}_o$$

où  $R_o = (r_{ij})$  matrice  $T \times T$  avec  $r_{ij} = \min(i, j)$  et  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)'$ .  
De plus, de (3.9)  $y = X^* \beta_o^* + e$ , on déduit :

$$\begin{aligned} \text{Var}(y) &= \sigma_e^2 I + \sigma_v^2 R_o \\ \text{Cov}(b, y) &= \sigma_v^2 R_o \end{aligned}$$

Par suite, le prédicteur optimal de  $b$  :  $\hat{b} = E(b/y)$  est

$$\begin{cases} \hat{b} = (\hat{b}_{o1}, \dots, \hat{b}_{oT}) \\ \hat{b} = \beta_{oo} \mathbf{1} + \sigma_v^2 R_o [\sigma_e^2 I + \sigma_v^2 R_o]^{-1} (y - \beta_{oo} \mathbf{1} - X\beta) \end{cases} \quad (3.16)$$

et la matrice de covariance des erreurs de prédiction est :

$$\text{var}(b - \hat{b}) = \sigma_v^2 R_o - (\sigma_v^2)^2 R_o [\sigma_e^2 I + \sigma_v^2 R_o]^{-1} R_o \quad (3.17)$$

**Relation de récurrence sur  $\{\hat{b}_{ot}\}$  :**

Désignons par  $r_t$  la  $t^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $R_o$  ; on peut écrire

$$r_t = r_{t-1} + m_t$$

$m_t = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$  étant la  $t^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $M'$  où

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{matrice } T \times T \text{ triangulaire inférieure}$$

$$(3.16) \Rightarrow \hat{b}_{ot} = \hat{b}_{o,t-1} + \sigma_v^2 m_t Q_o^{-1} (y - \beta_{oo} \mathbf{1} - X\beta) \quad t = 1, \dots, T \quad (3.18)$$

avec  $\hat{b}_{oo} = \hat{\beta}_{oo}$ .

**Approximation**

Notons d'abord que :

$$MM' = R_o \quad \text{et} \quad M^{-1} = I - L \quad \text{où} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} Q_o^{-1} &= (\sigma_e^2 I + \sigma_v^2 MM')^{-1} = [M(\sigma_e^2 M^{-1} M'^{-1} + \sigma_v^2 I)M']^{-1} \\ &= M'^{-1} (\sigma_e^2 M^{-1} M'^{-1} + \sigma_v^2 I)^{-1} M^{-1}. \end{aligned}$$

Par la suite on considérera une approximation de  $Q_o^{-1}$  définie de la façon suivante :

On peut approcher la matrice  $(\sigma_e^2 M^{-1} M'^{-1} + \sigma_v^2 I)$  par  $\sigma_a^2 GG'$  où  $G = I - \theta L$  (ce qui revient à remplacer le premier élément de la diagonale principale de  $\sigma_e^2 M^{-1} M'^{-1} + \sigma_v^2 I$ , qui est  $(1 + \theta^2 - \theta) \sigma_a^2$ , par  $\sigma_a^2$ ).

En utilisant cette approximation, on obtient :

$$\hat{b}_{ot} = \hat{b}_{o,t-1} + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_a^2} m_t M'^{-1} G'^{-1} G^{-1} M^{-1} (y - \beta_{oo} \mathbf{1} - X\beta) \quad (3.19)$$

et

$$\text{Var}(b - \hat{b}) = \sigma_v^2 M M' - \frac{(\sigma_v^2)^2}{\sigma_a^2} M G'^{-1} G^{-1} M' \quad (3.20)$$

Or 
$$\frac{\sigma_v^2}{\sigma_a^2} = (1 - \theta)^2$$

$$\bullet m_t M'^{-1} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\bullet M^{-1} (y - \beta_{oo} \mathbf{1} - X\beta) = \left[ \frac{y_1 - \beta_{oo} - x'_1 \beta}{W - Z\beta} \right] \equiv u$$

où  $u = (u_1, \dots, u_T)'$  en posant  $u_1 = y_1 - \beta_{oo} - x'_1 \beta$

D'où (3.19) donne

$$\hat{b}_{ot} = \hat{b}_{o,t-1} + (1 - \theta)^2 (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) G'^{-1} G^{-1} u \quad (3.21)$$

Posons  $c = (c_1, \dots, c_T)' = G'^{-1} G^{-1} u$  et  $a = G^{-1} u$

$$(3.21) \text{ donne } \hat{b}_{ot} = \hat{b}_{o,t-1} + (1 - \theta)^2 c_t \quad (3.22)$$

De  $Ga = u$ , on tire

$$a_t = u_t + \theta a_{t-1} \quad t = 1, \dots, T \quad (3.23)$$

avec  $a_o = 0$ .

De  $c = G'^{-1} a \Leftrightarrow G'c = a$ , on tire.

$$c_t = a_t + \theta c_{t+1} \quad t = 1, \dots, T \quad (3.24)$$

avec  $c_{T+1} = 0$ .

### Mise en pratique de la méthode pour la recherche des $\hat{b}_{ot}$

Ainsi, étant donné les estimations  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\theta}$  et  $\hat{\sigma}_a^2$  et une valeur de départ optimale  $\hat{b}_{oo}$  pour  $\beta_{oo}$ , les variables explicatives optimales  $\hat{b}_{ot}$  de  $\beta_{ot}$  peuvent être obtenues comme suit :

On évalue

$$\begin{aligned} 1) \hat{u}_1 &= y_1 - \hat{b}_{oo} - x'_1 \hat{\beta} \\ \hat{u}_t &= (y_t - y_{t-1}) - (x_t - x_{t-1})' \hat{\beta} & t = 2, \dots, T \\ 2) \hat{a}_t &= \hat{u}_t + \hat{\theta} \hat{a}_{t-1} & t = 1, \dots, T \\ \hat{a}_o &= 0 \\ 3) \hat{c}_t &= \hat{a}_t + \hat{\theta} \hat{c}_{t+1} & t = 1, \dots, T \\ \hat{c}_{T+1} &= 0 \\ 4) \hat{b}_{ot} &= \hat{b}_{o,t-1} + (1 - \hat{\theta})^2 \hat{c}_t & t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (3.25)$$

D'autre part (3.20) donne

$$\text{Var}(b - \hat{b}) = \hat{\sigma}_a^2 (1 - \theta)^2 MM' - \hat{\sigma}_a^2 (1 - \hat{\theta})^4 M\hat{G}'^{-1} \hat{G}^{-1} M' \quad (3.26)$$

Il reste maintenant à trouver une valeur optimale  $\hat{b}_{oo}$  pour  $\beta_{oo}$ .

**Recherche de  $\hat{b}_{oo}$  par la méthode de prévision passée de Box et Jenkins :**

Pour cela considérons

$$Y_t = y_t - x_t' \beta \quad t = 1, \dots, T$$

avec  $Y_o = \beta_{oo}$

Alors (3.3)  $W_t = z_t' \beta + u_t \quad t = 2, \dots, T$

donne  $u_t = Y_t - Y_{t-1} \quad t = 2, \dots, T$

Or, on a vu dans le paragraphe 2.1) que  $u_t$  était une moyenne mobile d'ordre 1 et que l'on pouvait donc écrire :

$$u_t = a_t - \theta a_{t-1} \quad \text{avec} \quad \theta \in [0, 1[$$

où  $(a_t)$  est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance  $\sigma_a^2$ .

### Retournement du temps

On montre (BOX et JENKINS (1970)) que l'on peut aussi écrire  $u_t$  sous la forme

$$u_t = E_t - \theta E_{t+1} \quad (3.27)$$

où les  $E_t$  sont indépendants, identiquement distribués avec moyenne 0 et variance  $\sigma_a^2$ .

On a donc

$$u_t = Y_t - Y_{t-1} = E_t - \theta E_{t+1} \quad t = 2, \dots, T$$

On peut alors obtenir la variable explicative optimale de  $Y_o$  (c'est-à-dire de  $\beta_{oo}$ ) par la méthode de "prévision passée" (BOX et JENKINS (1970)) de la façon suivante :

On pose  $\hat{E}_{T+1} = 0$  et on évalue les  $\hat{E}_t$  basés sur (3.27) comme

$$\hat{E}_t = \hat{Y}_t - \hat{Y}_{t-1} + \hat{\theta} \hat{E}_{t+1} = \hat{u}_t + \hat{\theta} \hat{E}_{t+1} \quad t = T, \dots, 2 \quad (3.28)$$

De plus,  $E_1$  est indépendant des différences premières  $u_t = Y_t - Y_{t-1}$ ,  $t = 2, \dots, T$ ; d'où  $\hat{E}_1 = 0$ , et l'équation pour la variable explicative optimale  $\hat{Y}_o$  devient

$$\hat{E}_1 = 0 = \hat{Y}_1 - \hat{Y}_0 + \hat{\theta} \hat{E}_2$$

D'où :

$$\hat{b}_{oo} = \hat{Y}_0 = \hat{Y}_1 + \hat{\theta} \hat{E}_2 \quad (3.29)$$

On obtient donc ainsi la valeur de départ optimale  $\hat{b}_{oo}$ , et par suite les variables explicatives optimales  $\hat{b}_{ot}$  de  $\beta_{ot}$ , à partir de  $\hat{b}_{oo}$ , comme il a été décrit ci-dessus.

## IV. MISE EN PRATIQUE DU MODELE (3.1)-(3.2):

### 1. Données

$x_t$  : vecteur à k composantes de variables explicatives  
 $y_t$  : variable à expliquer

### 2. Notation

On pose

$$\begin{aligned}w_t &= y_t - y_{t-1} & W &= (w_2, \dots, w_T)' \\z_t &= x_t - x_{t-1} & Z &= (z_2, \dots, z_T)'\end{aligned}$$

Le modèle (3.1)-(3.2) s'écrit alors :

$$W = Z\beta + u$$

avec  $V = \text{Var}(u) = \sigma_a^2 [(1 + \theta^2) I - \theta A] = [(2\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\nu^2) I - \sigma_\epsilon^2 A]$

### 3. Estimation des paramètres du modèle

On utilisera la méthode de REINSEL ou celle des moindres carrés à deux étapes (la méthode de COOLEY et PRESCOTT étant voisine de celle de REINSEL).

#### 3.1. Méthode de Reinsel

1) On considère  $B(\theta)$  et  $S^2(\theta)$  les estimateurs du maximum de vraisemblance de  $\beta$  et  $\sigma_a^2$  si  $\theta$  était connu, donnés par (3.6).

2) On remplace  $\beta$  et  $\sigma_a^2$  par  $B(\theta)$  et  $S^2(\theta)$  dans la fonction de vraisemblance et on prend pour estimation de  $\theta$ , le  $\theta$  fournissant le maximum de  $L_c$  donnée par (3.7).

3) On prend alors  $B(\hat{\theta})$  et  $S^2(\hat{\theta})$  comme estimations de  $\beta$  et  $\sigma_a^2$ .

#### 3.2. Méthode des moindres carrés à deux étapes

1) On estime d'abord  $\beta$  par la méthode des moindres carrés ordinaires, donné par (3.12).

2) A partir de  $\tilde{u} = W - Z\tilde{\beta}$ , on trouve des estimations de  $\sigma_\epsilon^2$  et  $\sigma_\nu^2$  :  $\tilde{\sigma}_\epsilon^2$  et  $\tilde{\sigma}_\nu^2$  données par (3.14), et on obtient une estimation de  $V$ , notée  $\tilde{V}$ .

3) On prend alors comme estimateur de  $\beta$  :  $\hat{\beta}$  donné par (3.15).

### 4. Reconstitution de la trajectoire des $\beta_{ot}$ :

1) On détermine  $\hat{\beta}_{oo} = \hat{b}_{oo}$  par la formule (3.29) (où  $\hat{Y}_t = y_t - x_t' \hat{\beta}$  et  $\hat{E}_2$  est déterminé à l'aide de (3.28)).

2) On détermine les  $\hat{\beta}_{ot} = \hat{b}_{ot}$  à l'aide des formules (3.25).

## V. APPLICATION A L'ETUDE D'UN MODELE DE RESPIRATION VEGETALE.

La respiration (R) d'un couvert végétal pendant la nuit peut être estimée, selon McCREE (1970), à partir de la photosynthèse (P) de la journée précédente et de la masse (M) du couvert :

$$R = aP + bM$$

Le modèle de McCREE a pour fondement le principe schématique de la correspondance entre rejet de gaz carbonique respiratoire et énergie utilisée dans la plante ; celle-ci sert :

– à la transformation des assimilats de la photosynthèse (de glucides simples en glucides complexes, lipides, protides) d'où le terme de respiration de croissance proportionnel à la photosynthèse,

– au renouvellement des structures vivantes du végétal d'où le terme de respiration d'entretien proportionnel à la masse.

Les coefficients a et b sont généralement déterminés expérimentalement à partir des variations de photosynthèse provoquées sur quelques jours. La méthode employée par RUGET *et al.* (1981) consiste à utiliser les variations de photosynthèse et de masse liées au développement des plantes : comme la masse varie de façon univoque avec le temps, l'ordre des points a une signification et il est intéressant d'utiliser cette propriété.

### 1. Données expérimentales

Une culture de quatre plantes de Maïs (*Zea Mays L.*) a été réalisée dans une chambre étanche où les échanges de gaz carbonique sont mesurés en permanence : on dispose de valeurs de respiration et photosynthèse quotidiennes ainsi que, par leur bilan, de valeurs de la masse. La respiration mesurée peut être comparée à une respiration estimée à partir du modèle de McCREE. Cette estimation paraît assez satisfaisante (RUGET, 1981) mais fait apparaître dans le terme  $\delta$  <sup>(1)</sup> des périodes à valeurs systématiquement positives ou négatives, ce qui prouve qu'il ne s'agit probablement pas d'une simple erreur expérimentale.

### 2. Utilisation d'un modèle à coefficient aléatoire

La méthode de REINSEL et celle des moindres carrés estimés donnent des résultats dont la qualité est à peu près équivalente (cf. valeurs de  $\sigma_e^2$  et  $\sigma_v^2$ , 2 dernières lignes du tableau "1").

Entre la régression linéaire simple et celle qui introduit un terme supplémentaire aléatoire (méthode de REINSEL, des moindres carrés estimés) les valeurs des coefficients  $\beta_1$  et  $\beta_2$  ne sont pas modifiées d'une façon que les utilisateurs

---

(1)  $\delta$  = respiration réelle – respiration estimée.

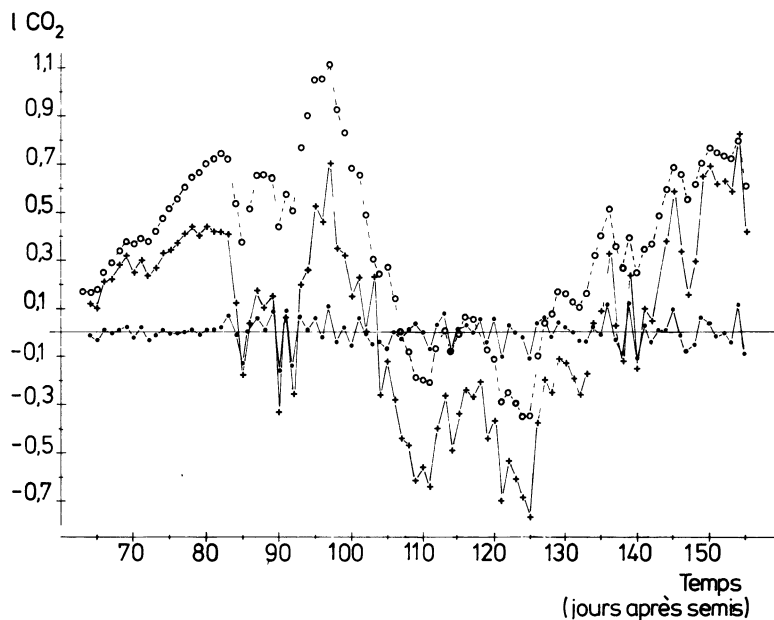


Figure 1. — Ecart entre respiration réelle et respiration estimée pour différents ajustements  
 +  $\epsilon_t$  modèle (1);  
 °  $\epsilon_t$  modèle (3) REINSEL;  
 o  $\beta_{0t}$  modèle (3) REINSEL.

Tableau 1

Modèle	Méthode de calcul	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\sigma_\epsilon^2$	$\sigma_v^2$
(1) $y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \epsilon_t$	M.C.O.		0,267	0,0031	0,143	
(2) $y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_0 + \epsilon_t$	M.C.O.	0,428	0,242	0,0025	0,124	
(3) $y_t = \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \beta_{0t} + \epsilon_t$ $\beta_{0t} = \beta_{0t-1} + v_t$	Reinsel		0,232	0,0031	0,008	0,018
	M.C.E.		0,235	0,0030	0,010	0,015

M.C.O. = moindres carrés ordinaires

M.C.E. = moindres carrés à deux étapes

potentiels de cette formule considèreraient comme importante (tableau "1"). Mais la qualité de l'ajustement est très nettement améliorée par ces dernières (cf. valeurs de  $\sigma_\epsilon^2$  du tableau 1 et Fig. 1).

Les valeurs de  $\beta_{0t}$  (Fig. 1) peuvent être interprétées comme la mise en évidence de phénomènes non pris en compte dans l'expression de McCREE. Les variations systématiques au cours du cycle de végétation, quelles que soient les condi-

tions de culture, (cf. variations de  $\delta$  in RUGET, 1981) conduisent à des interprétations dépendant du stade de développement de la culture ; deux périodes sont particulièrement nettes :

– la période précédant la floraison femelle correspond à des divisions cellulaires très actives qui s'accompagnent de *dépenses énergétiques supplémentaires* c'est-à-dire une respiration accrue par rapport aux dépenses estimées : il s'agit donc ici d'un terme "respiration de floraison" omis dans le modèle de McCREE et utilisé dans d'autres modèles (ONDOK et GLOSER, 1978).

– la période correspondant au remplissage des grains est probablement accompagnée de coûts de transformation et d'entretien plus faibles qu'auparavant : l'existence d'un terme  $\beta_{ot}$  provient alors d'une surestimation liée aux conditions particulières d'application du modèle (sur un temps très long).

L'amélioration apportée par l'adjonction à la régression linéaire simple d'un aléa à effet permanent (Fig. 2) permet d'affiner l'analyse des liaisons existant entre photosynthèse, respiration et masse : elle conduit à la mise en évidence de phénomènes nouveaux ou à la recherche d'hypothèses nouvelles pour expliquer les phénomènes observés.

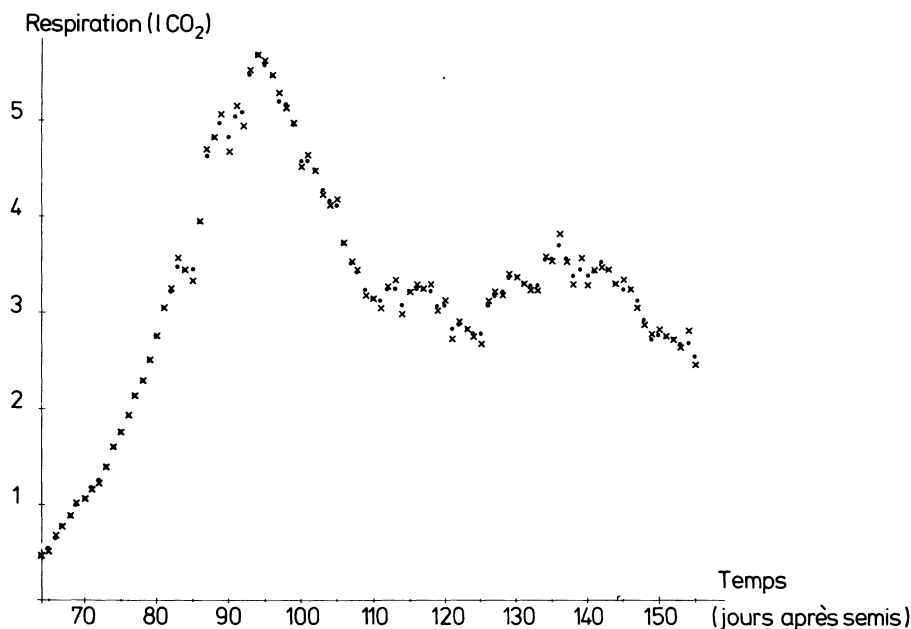


Figure 2. – Ajustement de la respiraton selon la méthode de REINSEL

x respiration réelle ;  
o respiration estimée.

## Remerciements

Nous tenons à remercier Monsieur Y. ARAGON pour tous les conseils qu'il a bien voulu nous donner tout au long de l'élaboration de ce travail.



