REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

SYLVIA RICHARDSON
DENIS HEMON

Autocorrélation spatiale : ses conséquences sur la corrélation empirique de deux processus spatiaux

Revue de statistique appliquée, tome 30, nº 1 (1982), p. 41-51
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1982__30_1_41_0>

AUTOCORRELATION SPATIALE : SES CONSEQUENCES SUR LA CORRELATION EMPIRIQUE DE DEUX PROCESSUS SPATIAUX

Sylvia RICHARDSON, Denis HEMON (*)

RESUME

L'existence d'autocorrélations pose des problèmes quant aux tests d'indépendance stochastique de deux processus spatiaux.

Pour apprécier de façon quantitative ces problèmes, on étudie la variance du coefficient de corrélation empirique des deux processus. Cette variance est évaluée pour différentes valeurs des autocorrélations et pour plusieurs types de processus. Il ressort clairement de ces évaluations que l'influence des autocorrélations ne peut être négligée. Ceci conduit à discuter les approches proposées pour tester l'indépendance de deux processus spatiaux.

1. INTRODUCTION

Les méthodes classiques d'analyse statistique visant à tester l'indépendance de deux variables aléatoires X et Y supposent que l'on dispose d'un échantillon de réalisations indépendantes du couple (X,Y).

Cependant lorsque ces variables sont liées à un espace géographique, elles présentent le plus souvent un certain degré d'autocorrélation spatiale. Ceci pose des problèmes du point de vue de l'analyse statistique, comme le soulignent LEBART [15], CLIFF et ORD [8] et UNWIN et HEPPLE [26]. Ces auteurs remarquent en particulier que si l'on néglige l'autocorrélation, on est souvent conduit à sous-estimer le risque de première espèce des tests employés. Pour apprécier de façon quantitative ces problèmes, nous étudions ici la variance du coefficient de corrélation empirique.

Comme dans le cas de séries temporelles, l'existence d'une corrélation entre deux processus spatiaux peut résulter de l'existence de deux tendances.. L'estimation et l'interprétation d'une tendance spatiale a fait l'objet de nombreux travaux, dont on trouvera une bibliographie dans UNWIN et HEPPLE [26]. Aussi ne consi-

(*) INSERM U.170, 16 Bis av. P.V. Couturier, 94800 VILLEJUIF.

Mots-Clés : **Processus spatiaux, autocorrélation, corrélation croisée.**

dérons-nous que des processus stationnaires définis en chaque point d'un quadrillage régulier, processus étudiés en particulier par BESAG [6] et TJØSHEIM [25].

Soient $\{X(u)\}$ et $\{Y(u)\}$ deux processus stationnaires, gaussiens, centrés et de variances finies σ_X^2 et σ_Y^2 respectivement, définis en tout point $u = (u_1, u_2)$ de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Les autocovariances de $\{X(u)\}$ seront notées :

$$C_{XX}(u, v) = E[X(u)\, X(v)]\, , \; C_{YY}(u, v) = E[Y(u)\, Y(v)],$$

en particulier Var $[X(u)] = C_{XX}(0, 0) = \sigma_X^2$, 0 représentant le point de $\mathbf{Z}^2$ dont les deux cordonnées sont égales à zéro. Pour tout sous-ensemble D_n de $\mathbf{Z}^2$ contenant d_n points, le coefficient de corrélation empirique r_{XY} entre les observations de $\{X(u)\}$, $\{Y(u)\}$ sur D_n est défini par :

$$r_{XY} = \frac{\sum\limits_{u \in D_n} X(u)\, Y(u)}{\left[\sum\limits_{u \in D_n} X(u)^2\right]^{1/2} \left[\sum\limits_{u \in D_n} Y(u)^2\right]^{1/2}}$$

Sous l'hypothèse d'indépendance mutuelle entre $\{X(u)\}$ et $\{Y(u)\}$ nous avons démontré précédemment ([23]) que la variance asymptotique de r_{XY} est donnée par :

$$\lim_{n\to\infty} d_n \operatorname{Var}(r_{XY}) = \frac{1}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} \sum_{v \in \mathbf{Z}^2} C_{XX}(0, v)\, C_{YY}(0, v), \qquad (1)$$

pour toute suite de domaines D_n de $\mathbf{Z}^2$ où les effets de bords s'estompent à l'infini, (c'est-à-dire tels que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{d_n} = 0$, b_n étant le nombre de points de $\mathbf{Z}^2$ sur la frontière de D_n). Notons que la série intervenant dans (1) converge absolument pour une large classe de processus, en particulier ceux dont les autocovariances $C_{XX}(0, v)$ et $C_{YY}(0, v)$ sont dominées par une fonction exponentielle décroissante du type $c\theta^{|v|}$, avec $|\theta| < 1$ et $c > 0$, [23].

L'expression (1) est analogue à celle de BARTLETT dans le cas de séries temporelles, [2], [3]. Remarquons qu'il suffit que l'un des processus $\{X(u)\}$, $\{Y(u)\}$ soit non autocorrelé pour que la variance asymptotique de r_{XY} ait la même valeur que dans le cas d'un échantillon de d_n couples (X, Y) indépendants c'est-à-dire $1/d_n$. Ceci est par exemple le cas en expérimentation agronomique où des parcelles disposées selon un lattice reçoivent un traitement tiré au sort. Par contre si les deux processus $\{X(u)\}$ et $\{Y(u)\}$ présentent tous deux une autocorrélation positive la relation (1) montre que la variance asymptotique de r_{XY} est supérieure à $1/d_n$.

Au § 2 nous évaluerons numériquement cette variance pour différents types de processus spatiaux. Au § 3 nous discuterons les différentes approches qui ont été proposées pour tester l'indépendance stochastique de deux processus spatiaux.

2. EVALUATION DE LA VARIANCE ASYMPTOTIQUE DE r_{XY} POUR PLUSIEURS TYPES DE PROCESSUS

2.1. PROCESSUS DONT L'AUTOCOVARIANCE DECROIT GEOMETRIQUEMENT

Considérons tout d'abord le cas où $\{X(t), t \in \mathbf{Z}\}$ et $\{Y(t), t \in \mathbf{Z}\}$ sont deux processus autoregressifs d'ordre 1 sur $\mathbf{Z}$. Dans ce cas $\{X(t), t \in \mathbf{Z}\}$ et $\{Y(t), t \in \mathbf{Z}\}$ sont également des processus de Markov, leur autocovariance est donnée par :

$$C_{XX}(0, k) = E[X(0)X(k)] = \sigma_X^2 \lambda^{|k|}, \ k \in \mathbf{Z}, \ |\lambda_1| < 1$$

$$C_{YY}(0, k) = E[Y(0)Y(k)] = \sigma_Y^2 \lambda^{|k|}, k \in \mathbf{Z}, \ |\lambda_1| < 1. \tag{2}$$

La variance asymptotique de r_{XY}, défini sur un intervalle de n points, est égale à :

$$\lim_{n \to \infty} n \operatorname{Var}(r_{XY}) = \frac{1 + \lambda_1 \lambda_2}{1 - \lambda_1 \lambda_2}, \tag{3}$$

formule obtenue par BARTLETT [2].

Cherchant à étendre la forme d'autocovariance donnée par [2] à un processus dans le plan, MARTIN [16] considère les processus "doublement géométriques" dont la structure stochastique est celle du produit de deux processus unidimensionnels satisfaisants (2) ; pour ces processus :

$$C_{XX}(0, v) = \sigma_X^2 \lambda_1^{|v_1|+|v_2|}, \ |\lambda_1| < 1, \ v \in \mathbf{Z}^2.$$

Contrairement au cas temporel $\{X(u), u \in \mathbf{Z}^2\}$ n'est plus un processus markovien et l'équation "autorégressive" qui le définit n'a pas d'interprétation naturelle. Si l'on suppose que $\{X(u)\}$ et $\{Y(u)\}$ sont tous deux des processus doublement géométriques, de paramètre λ_1 et λ_2 respectivement, l'expression (1) devient alors l'extension directe à deux dimensions de la formule (3) :

$$\lim_{n \to \infty} d_n \operatorname{Var}[r_{XY}] = \left(\frac{1 + \lambda_1 \lambda_2}{1 - \lambda_1 \lambda_2}\right)^2 \tag{4}$$

2.2. PROCESSUS MARKOVIENS ET "AUTOREGRESSIFS" DES PLUS PROCHES VOISINS

L'autocovariance de beaucoup de processus spatiaux n'est pas exprimable sous une forme analytique simple, BESAG [5]. Cependant l'expression $\sum_{v \in \mathbf{Z}^2} C_{XX}(0, v)\, C_{YY}(0, v)$ peut être calculée comme terme constant du produit des développements de Laurent des fonctions génératrices d'autocovariance des processus $\{X(u)\}$ et $\{Y(u)\}$.

a) Processus markoviens

Nous supposons que $\{X(u)\}$ et $\{Y(u)\}$ sont tous deux des processus stationnaires gaussiens, markoviens des plus proches voisins, définis par les fonctions génératrices des autocovariances suivantes :

$$F_X(z_1, z_2) = [1 - a(z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1})]^{-1}$$
$$F_Y(z_1, z_2) = [1 - b(z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1})]^{-1} \quad (5)$$

$1 - \delta < |z_1|, |z_2| < 1 + \delta$, $|a| < 1/4$, $|b| < 1/4$. L'existence de tels processus a été discutée par ROZANOV [24] et MORAN [19].

Ces processus satisfont aux relations suivantes :

$$X_{u_1,u_2} = a(X_{u_1-1,u_2} + X_{u_1+1,u_2} + X_{u_1,u_2-1} + X_{u_1,u_2+1}) + \epsilon_{u_1,u_2}, (u_1, u_2)\ \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}. \quad (6)$$

Si $\partial X(u) = \{X_{u_1-1,u_2}, X_{u_1+1,u_2}, X_{u_1,u_2-1}, X_{u_1,u_2+1}\}$ est l'ensemble des plus proches voisins de X(u), chaque variable aléatoire $\epsilon(u)$ intervenant dans (6) est gaussienne ; conditionellement à $\partial X(u)$ elle est indépendante de $\{X(u)\}$ avec $|v_1 - u_1| + |v_2 - u_2| > 1$ et centrée.

L'expression de la variance asymptotique de r_{XY} que l'on calcule à partir des fonctions génératirces des autocovariances (5) est donnée dans l'appendice. Cette expression, qui fait intervenir les intégrales elliptiques des paramètres a et b, a été tabulée par intégration numérique avec trois décimales de précision (Table 1), les valeurs des paramètres a et b sont choisies de telle sorte que les autocorrélations d'ordre 1*, ρ_X et ρ_Y, varient de 0,0 à 0,7 par pas de 0,1.

TABLE 1

Valeur asymptotique de $d_n \mathrm{Var}(r_{XY})$ pour deux processus Markoviens

ρ_X \ ρ_X	0,00	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	b
0,000	1,00								0,000
0,100	1,00	1,042							0,095
0,200	1,00	1,088	1,195						0,168
0,300	1,00	1,138	1,321	1,558					0,2123
0,400	1,00	1,192	1,469	1,866	2,444				0,2355
0,500	1,00	1,248	1,637	2,251	3,270	4,989			0,24565
0,600	1,00	1,307	1,824	2,720	4,419	7,917	15,903		0,24918
0,700	1,00	1,368	2,025	3,256	5,883	12,432	33,523	140,603	0,24994
a	0,00	0,095	0,168	0,2123	0,2355	0,24565	0,24918	0,249949	

ρ_X et ρ_Y sont les autocorrélations d'ordre 1 de $\{X(u)\}$ et $\{Y(u)\}$ respectivement. Les valeurs correspondantes de a et b peuvent être lues respectivement en bas et à droite. Pour a $>$b, les valeurs sont obtenues par symétrie.

b) Processus autorégressifs

Supposons maintenant que $\{X(u)\}$ et $\{Y(u)\}$ soient des processus stationnaires gaussiens associés aux fonctions génératrices d'autocovariance suivantes :

$$F_X(z_1, z_2) = [1 - a(z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1})]^{-2}$$
$$F_Y(z_1, z_2) = [1 - b(z_1 + z_1^{-1} + z_2 + z_2^{-1})]^{-2}$$

$1 - \delta < |z_1|, |z_2| < 1 + \delta$, $|a| < 1/4$, $|b| < 1/4$. Ces processus, qui furent considérés pour la première fois par WHITTLE [27], correspondent aux équations autorégressives :

$$X_{u_1,u_2} = a(X_{u_1-1,u_2} + X_{u_1+1,u_2} + X_{u_1,u_2-1} + X_{u_1,u_2+1}) + \epsilon_{u_1,u_2} \quad (7)$$

dans lesquelles la suite d'innovations $\{E(u)\}$, $u = (u_1, u_2)$ $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}\}$, est une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, d'espérance nulle. Notons que pour le processus markovien (6), $\epsilon(u)$ et $\epsilon(v)$ sont corrélées quand $|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2| \leqslant 2$. L'expression de la variance asymptotique de r_{XY} en fonction des paramètres des processus est donnée dans l'appendice et a été également tabulée (Table 2).

*L'autocorrélation d'ordre 1, ρ_X, est définie comme le coefficient de corrélation entre X(u) et l'un quelconque de ses plus proches voisins.

TABLE 2

Valeur asymptotique de $d_n \mathrm{Var}(r_{XY})$ pour deux processus autoregressifs

ρ_Y \ ρ_X	0,00	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	b
0,000	1,00										0,0000
0,100	1,00	1,041									0,0493
0,200	1,00	1,085	1,178								0,0945
0,300	1,00	1,130	1,282	1,458							0,1335
0,400	1,00	1,178	1,394	1,655	1,960						0,165
0,500	1,00	1,227	1,515	1,878	2,320	2,864					0,1902
0,600	1,00	1,279	1,647	2,130	2,743	3,530	4,540				0,2099
0,700	1,00	1,332	1,788	2,411	3,237	4,347	5,844	7,894			0,225
0,800	1,00	1,387	1,940	2,729	3,823	5,369	7,581	10,826	15,893		0,2364
0,900	1,00	1,444	2,094	3,096	4,541	6,710	10,045	15,403	24,838	44,846	0,2447
a	0,000	0,0493	0,0945	0,1335	0,165	0,1902	0,2099	0,225	0,2364	0,2447	

ρ_X et ρ_Y sont les autocorrélations d'ordre 1 de $\{X(u)\}$ et $\{Y(u)\}$ respectivement. les valeurs correspondantes de a et b peuvent être lues respectivement en bas et à droite. Pour a > b, les valeurs sont obtenues par symétrie.

En comparant les résultats obtenus pour les différents processus envisagés (formules (3), (4), Tables 1,2), on remarque tout d'abord que l'effet de l'autocorrélation intrinsèque des processus $\{X(u)\}$ et $\{Y(u)\}$ sur la variance du coefficient de corrélation est numériquement bien plus important dans le cas de processus spatiaux que dans celui des séries temporelles. Par exemple pour $\rho_X = \rho_Y = 0{,}3$, la "taille corrigée" d'un N-échantillon est de N/1,20 pour une série temporelle satisfaisant (2), tandis qu'elle est de N/1,56 pour le processus markovien dans $\mathbf{Z}^2$ défini par (6).

Par ailleurs les valeurs données pour les processus markoviens (Table 1) sont plus élevées que celles correspondant aux processus autorégressifs (Table 2) et aux processus doublement géométrique. Néanmoins quand ρ_X est plus petit que 0,3, les valeurs données pour les trois processus sont voisines.

3. DISCUSSION

L'analyse de la corrélation de deux séries temporelles est classiquement conduite en étudiant les corrélations croisées ou le spectre croisé. La plupart des concepts utilisés dans ce type d'analyse peuvent être étendus au cas des séries spatiales. Avant d'envisager de façon détaillée les différentes méthodes proposées, il est bon de rappeler les difficultés intrinsèques à l'étude des processus spatiaux.

La première de ces difficultés tient à l'absence d'un ordre naturel sur $\mathbf{Z}^2$. Ceci exclue en particulier la possibilité d'utiliser la distinction entre le passé et le futur pour interpréter les corrélations, PIERCE et HAUGH [22]. De ce point de vue, il est clair que l'analyse de séries à la fois spatiales et temporelles est particulièrement informative, GRANGER [11]. Une seconde difficulté tient à l'arbitraire du choix de la taille des unités géographiques considérées : on sait en effet que les résultats des analyses statistiques dépendent du degré d'agglomération de ces unités. Enfin, les observations sont souvent disposées de manière irrégulière dans l'espace ce qui interdit une analyse spectrale classique. Dans le cas d'un quadrillage irrégulier, on peut toutefois donner un sens à une décomposition hiérarchique en variations locales, départementales et régionales, comme le proposent par exemple CLIFF et ORD [9] et CURRY [10].

Les coefficients de corrélation croisés sont couramment employés dans l'analyse de la liaison de deux séries temporelles, HAUGH et BOX [14], PIERCE [21]. HANNAN [13] a établi la normalité asymptotique de ces coefficients sous certaines hypothèses. BENNETT [4] a suggéré d'entendre cette approche à l'étude de la liaison entre deux processus spatiaux. Si l'on se place dans le cas de processus stationnaires sur $\mathbf{Z}^2$ et d'un domaine d'échantillonnage regulier assez grand, on peut estimer les autocorrélations $\dfrac{C_{XX}(0\,,v)}{\sigma_X^2}$, $\dfrac{C_{YY}(0\,,v)}{\sigma_Y^2}$ d'un grand nombre de processus de manière consistante, GUYON et PRUM [12]. On peut alors estimer de façon consistante une approximation de la variance de r_{XY} en utilisant une version tronquée de la formule (1).

Plusieurs auteurs ont étudié des modifications du modèle de régression linéaire. LEBART [15] fixe la structure de la matrice de variance-covariance des résidus en la décomposant suivant des "niveaux de contiguités" décroissants. Cela lui permet d'estimer les paramètres du modèle par la méthode des moindres carrés généralisés et d'apprécier la perte d'information due à la dépendance spatiale. Cette décomposition de la matrice de variance-covariance peut s'appliquer au cas où les variables sont mesurées aux sommets d'un graphe quelconque ; elle suppose que la covariance de deux variables dépende uniquement de leur niveau de contiguité sur le graphe et qu'elle soit nulle au delà d'une certaine distance. Généralisant les modèles de régression des séries chronologiques, ORD [20] étudie différents modèles mixtes régressifs-autorégressifs dans lesquels interviennent une matrice de voisinage supposée connue à un facteur de proportionalité près, ρ. Il discute la qualité des estimateurs de régressions et de ρ et compare l'estimateur du maximum de vraisemblance à plusieurs alternatives. Comme dans le cas de Lebart, ces modèles ne supposent pas une structure régulière de l'espace et la matrice de voisinage est adaptée au cas particulier considéré. Une approche empirique visant à prendre en compte l'effet des autocorrélations dans le modèle linéaire a été proposée par MARTIN [17]. Elle consiste à transformer $\{X(u)\}$ et $\{Y(u)\}$ en leur différence d'ordre 1, c'est-à-dire à supposer essentiellement $\rho = 1$ avant d'effectuer une régression linéaire. Martin étudie l'effet de cette procédure par des méthodes de Monte Carlo et montre qu'en supposant $\rho = 1$ les estimateurs des paramètres de régression sont en général meilleurs qu'en négligeant les autocorrélations ($\rho = 0$).

Plusieurs auteurs se sont préoccupés de la définition d'une mesure de corrélation sur des unités que l'on pouvait en principe subdiviser ou regrouper. Les méthodes proposées sont toutes fondées sur l'idée d'une décomposition hiérarchique des variations de chaque processus. CURRY [10] estime les paramètres d'un modèle dans lequel la valeur prise par le processus Y en un point u est une combinaison linéaire des différentes composantes hiérarchiques du processus X. CLIFF et ORD [9] utilisent une analyse de variance emboîtée en postulant que la corrélation entre $\{X(u)\}$ et $\{Y(u)\}$ est dûe à un facteur commun à chaque niveau hiérarchique. BESAG [7] propose un test non paramétrique qui fait intervenir toutes les permutations d'unités à l'intérieur d'un même bloc hiérarchique.

Les méthodes décrites ci-dessus apportent des solutions partielles au problème général de l'analyse de la corrélation entre deux processus spatiaux. Certaines présentent un caractère empirique impliquant la connaissance de la structure de la matrice de variance-covariance. D'autres adoptent des méthodes développées pour les séries chronologiques, dans ce cas la validité de certains résultats asymptotiques utilisés reste à établir. Les problèmes d'inférence statistique concernant l'indépendance de deux processus spatiaux restent donc encore ouverts, l'importance de l'effet des autocorrélations justifie que des travaux complémentaires leur soient consacrés.

REMERCIEMENTS

Nous remercions vivement Micheline IMBERT pour la préparation de ce manuscrit.

APPENDICE

a) LA VARIANCE ASYMPTOTIQUE DE r_{XY} DANS LE CAS DE DEUX PROCESSUS DE MARKOV

Le terme constant $P_1(a, b)$ du produit $F_X(z_1, z_2) . F_Y(z_1, z_2)$ est égal à

$$P_1(a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{a-b}\left[a \sum_{t=0}^{\infty} \binom{2t}{t}^2 a^{2t} - b \sum_{t=0}^{\infty} \binom{2t}{t}^2 b^{2t} \right] & , a \neq b \\ \sum_{t=0}^{\infty} (2t+1) \binom{2t}{t}^2 a^{2t} & , a = b \end{cases} \qquad (8)$$

Les séries constituant (i) peuvent être exprimées au moyen des séries hypergéométriques de Gauss, ABRAWOWITZ et STEGUN [1] 15.1.1 :

$$F(k, \ell, m, z) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(k)_t (\ell)_t}{(m)_t} \frac{z^t}{t!}$$

$(k)_t = k(k+1) \ldots .(k+t-1)$. On obtient

$$\sum_{t=0}^{\infty} \binom{2t}{t}^2 a^{2t} = F(1/2, 1/2, 1, 16a^2)$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} (2t+1) \binom{2t}{t}^2 a^{2t} = F(3/2, 1/2, 1, 16a^2)$$

On peut utiliser les relations qui lient les séries hypergéométriques aux intégrales elliptiques de la 1ère et 2e espèce quand on veut les évaluer numériquement :

$$F(1/2 . 1/2 . 1, z) = \frac{2}{\Pi} K(z)$$

$$F(3/2, 1/2 . 1, z) = \frac{2}{\Pi} \frac{1}{1-z} E(z)$$

avec

$$K(z) = \int_0^{\Pi/2} (1 - z \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \quad \text{et} \quad E(z) = \int_0^{\Pi/2} (1 - z \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta ,$$

ABRAMOVITZ et STEGUN [1] 17.3.9 et 17.3.10.

En conséquence

$$P_1(a, b) = \begin{cases} \dfrac{2}{\Pi} \dfrac{1}{a-b} [aK(16a^2) - bK(16b^2)] & , a \neq b \\ \dfrac{2}{\Pi} \dfrac{1}{1-16a^2} E(16a^2) & , a = b . \end{cases}$$

MORAN [18] a remarqué que :

$$\sigma_X^2 = \frac{2}{\Pi} K(16a^2), \sigma_Y^2 = \frac{2}{\Pi} K(16b^2).$$

On obtient donc finalement pour $a \neq b$:

$$\lim_{n\to\infty} d_n \operatorname{Var}[r_{XY}] = \frac{\Pi}{2} \frac{1}{a-b} \left[\frac{a}{K(16b^2)} - \frac{b}{K(16a^2)}\right],$$

tandis que pour $a = b$:

$$\lim_{n\to\infty} d_n \operatorname{Var}[r_{XY}] = \frac{\Pi}{2} \frac{1}{1-16a^2} \frac{E(16a^2)}{[K(16a^2)]^2}$$

b) LA VARIANCE ASYMPTOTIQUE DE r_{XY} DANS LE CAS DE DEUX PROCESSUS AUTOREGRESSIFS

Le terme constant $P_2(a, b)$ du produit $F_X(z_1, z_2) \cdot F_Y(z_1, z_2)$ est égal à

$$P_2(a,b) = \begin{cases} \dfrac{2}{\Pi} \dfrac{1}{(a-b)^2} \left[\dfrac{b^2}{1-16b^2} E(16b^2) + \dfrac{a^2}{1-16a^2} E(16a^2)\right] \\ + \dfrac{2}{\Pi} \dfrac{2ab}{(a-b)^3} [bK(16b^2) - aK(16a^2)] & , a \neq b \\ F(5/2, 1/2, 1, 16a^2) + 20a^2 F(7/2, 3/2, 2, 16a^2), & a = b. \end{cases}$$

On peut exprimer $F(5/2, 1/2, 1, z)$ et $F(7/2, 3/2, 2, z)$ en fonction des intégrales elliptiques $K(z)$ et $E(z)$ à l'aide des relations de récurrence suivantes :

$$5F\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2},2,z\right) = 2F\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},1,z\right) + 3F\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},2,z\right)$$

$$3F\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},2,z\right) = 2\frac{(1-z)}{z}\left[F\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},1,z\right) - F\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},1,z\right)\right]$$

$$2F\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},1,z\right) = \frac{2}{1-z}\left[4F\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},1,z\right) - 3F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},1,z\right)\right]$$

$$F\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},1,z\right) = \frac{1}{3(1-z)}\left[2(2-z)F\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},1,z\right) - F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,z\right)\right]$$

Finalement remarquant que dans ce cas $\sigma_X^2 = P_1(a, a)$ et $\sigma_Y^2 = P_1(b, b)$ est défini par (8), on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} d_n \operatorname{Var}[r_{XY}] = \frac{P_2(a,b)}{P_1(a,a)\,P_1(b,b)}$$

REFERENCES

[1] M. ABRAMOWITZ and I.A. STEGUN. – *Handbook of Mathematical Functions.* Dover, New-York, 1965.

[2] M.S. BARTLETT. – Some aspects of the time-correlation problem in regard to tests of significance. *J.R. Statist. Soc.*,9 8, 536-543, 1935.

[3] M.S. BARTLETT. – *An Introduction to Stochastic Processes,* 2nd edn. Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

[4] R.J. BENNETT. – *Spatial Time Series.* Pion, London, 1980.

[5] J.E. BESAG. – On the correlation structure of some two-dimensional stationary processes. *Biometrika,* **59**, 43-48, 1972.

[6] J.E. BESAG. – Spatial interaction and the statistical analysis of lattice system (with discussion) *J.R. Statist, Soc.,* **B 36,** 192-236, 1974.

[7] J.E. BESAG and P.J. DIGGLE. – Simple Monte Carlo tests for spatial pattern. *J.R. Statist. Soc.,* **C 26,** 327-333, 1977.

[8] A.D. CLIFF and J.K. ORD. – Model building and the analysis of spatial pattern in human geography (with discussion). *J.R. Statist. Soc.,* **B 37,** 297-348, 1975.

[9] A.D. CLIFF and J.K. ORD. – *The effects of spatial autocorrelation on geographical modelling.* University of Warwick Technical Report, 1978.

[10] L. CURRY. – A bivariate spatial regression operator. *Canadian Geographer,* **16,** 1-14, 1972.

[11] C.W.J. GRANGER. – Spatial data and time series analysis. In *Studies in Regional Sciences* (A.J. Scott, ed), 1-24. London : Pion, 1969.

[12] X. GUYON et B. PRUM. – Estimations et tests relatifs aux processus spatiaux réguliers du second ordre, Publication n° 201, Université d'Orsay, 1976.

[13] E.J. HANNAN. – *Multiple Time Series.* John Wiley and Sons, New-York, 1970.

[14] L.D. HAUGH and G.E.P. BOX. – Identification of dynamic regression (distributed lag) models connecting two time series. *J. Amer. Statist. Assoc.,* **72,** 121-130, 1977.

[15] L. LEBART. – Analyse statistique de la continguité. *Pub. Inst. Stat. Univ. Paris,* **18,** 81-112, 1969.

[16] R.J. MARTIN. – A subclass of lattice processes applied to a problem in planar sampling. *Biometrika,* **66,** 209-17, 1979.

[17] R.L. MARTIN. – On spatial dependence, bias, and the use of first spatial differences in regression analysis. *Area,* **6,** 185-94, 1974.

[18] P.A.P. MORAN. – A Gaussian Markovian process on a square lattice. *J. Appl. Prob.,* **10,** 54-62, 1973.

[19] P.A.P. MORAN. – Necessary conditions for Markovian processes on a lattice. *J. Appl. Prob.,* **10,** 605-612, 1973.

[20] J.K. ORD. – Estimation methods for models of spatial interaction. *J. Am. Statist. Assoc.,* **70,** 120-6, 1975.

[21] D.A. PIERCE. – R^2 Measures for time series. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **74**, 901-910, 1979.

[22] D.A. PIERCE and L.D. HAUGH. – Causality in temoral systems, characterizations and a survey. *J. Econometrics*, 5, 265-293, 1977.

[23] S.T. RICHARSON and D. HEMON. – On the variance of the sample correlation between two independant lattice processes. *J. Appl. Prob.*, **18**, 943-8, 1981.

[24] Yu. A. ROZANOV. – On the Gaussian homogeneous fields with given conditional distributions. *Theor. Prob. Appl.*, **12**, 381-391, 1967.

[25] D. TJOSTHEIM. – Statistical spatial series modelling. *Adv. Appl. Probl.*, **10**, 130-154, 1978.

[26] D.J. UNWIN and L.W. HEPPLE. – The statistical analysis of spatial series. *The Statistician*, **23**, 211-27, 1974.

[27] P. WHITTLE. – On stationary processes in the plane. *Biometrika*, **41**, 434-449, 1954.