REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. MOREAU DE SAINT-MARTIN

Distribution de distances dans la sphère euclidienne

Revue de statistique appliquée, tome 28, nº 4 (1980), p. 63-66

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1980__28_4_63_0>

DISTRIBUTION DE DISTANCES DANS LA SPHERE EUCLIDIENNE

J. MOREAU de SAINT-MARTIN

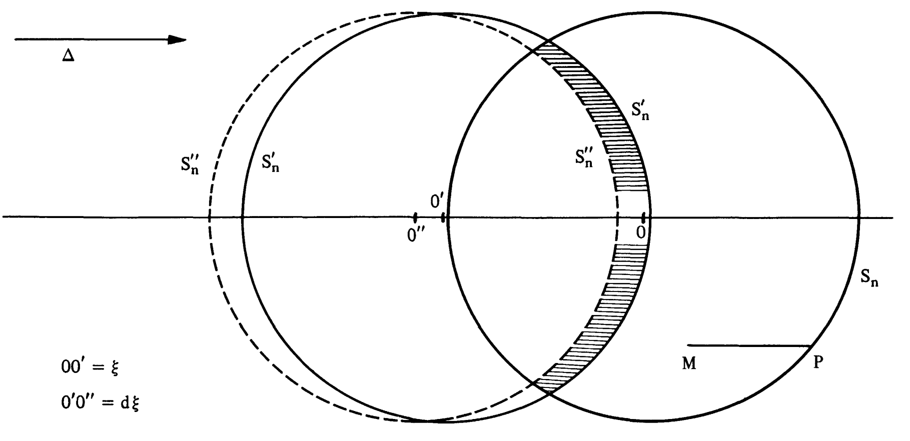
Dans une récente note ("Moyennes distantielles dans la sphère euclidienne", Revue de statistique Appliquée, 1980, vol. XVIII n° 1) E. GLOUKHIAN a posé le probème de la distribution des longueurs de vecteurs ayant

– leur origine prise au hasard à l'intérieur d'une sphère à n dimensions S ;
– leur direction prise au hasard ;
– leur extrémité sur la frontière de la sphère.

Il a déterminé la valeur de $\overline{\xi^\kappa}$, moment d'ordre κ de cette distribution. On présente ici quelques remarques sur cet intéressant problème.

1. La fonction de répartition de la variable aléatoire ξ peut être obtenue par un raisonnement direct.

Supposons fixée la direction Δ. Les vecteurs parallèles à Δ et de longueur inférieure à ξ, ayant leur extrémité sur la frontière de S_n, sont issus de points M intérieurs à S_n et extérieurs à la sphère S'_n obtenue par translation de grandeur ξ dans le sens opposé à Δ.



Mots-clés : **Probabilités géométriques.**

Le fait de fixer la direction Δ ne modifie pas la distribution uniforme des points M Le volume de la sphère S_n entaillée par S'_n , rapporté au volume total Vn (R), représente donc la fonction de répartition de la variable ξ.

Pour déterminer la densité de probabilité $f(\xi)$, considérons une sphère S''_n correspondant à $\xi + d\xi$.

$V_n(R)\, f(\xi)\, d\xi$ est le volume intérieur à S_n et S'_n , et extérieur à S''_n (hachuré sur la figure). Il a une épaisseur constante $d\xi$ parallèlement à Δ.

$V_n(R)\, f(\xi)$ est donc la mesure de la projection, parallèlement à Δ, de la portion de frontière de S'_n intérieure à S_n.

Cette projection est une sphère à (n – 1) dimensions de rayon $\sqrt{R^2 - \xi^2/4}$ donc

$$Vn(R)\, f(\xi) = \left(R^2 - \frac{\xi^2}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$f(\xi) = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{\xi^2}{4R^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\sqrt{\Pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Cette formule montre que $\xi^2/4R^2$ suit une loi Bêta de paramètres 1/2 et (n + 1)/2. On en déduit aisément le moment d'ordre k

$$\xi^k = (2R)^k \frac{B\left(\frac{k+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right)}$$

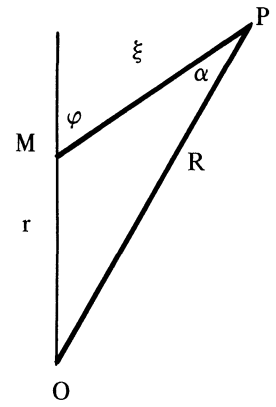
Le calcul d'une longueur ξ de probabilité donnée peut se faire avec les tables de la loi de STUDENT. En effet, en posant

$$\xi = \frac{2\,Rt}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{n+1}}}$$

On vérifie que la densité de probabilité de t est celle de la loi de STUDENT (tronquée car limitée à t positif) avec (n + 1) degrés de liberté.

2. Le calcul de E. GLOUKHIAN peut aussi être notablement simplifié par le changement de variable

$$\begin{cases} r \cos\varphi = R\cos\alpha - \xi \\ r\sin\varphi = R\sin\alpha \end{cases}$$



où l'on introduit l'angle α sous lequel le segment OM est vu de l'extrémité du vecteur ξ.

On en déduit le jacobien

$$\frac{D(r,\varphi)}{D(\alpha,\xi)} = \frac{R\cos\alpha}{r}$$

et, après réarrangement

$$f(r,\varphi)\,dr\,d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,\frac{d\xi}{R}\,d\,(\sin^{n-1}\alpha)$$

La densité de probabilité de ξ s'obtient en étudiant le domaine de variation de α à ξ donné. Il faut distinguer les cas $\xi < R$ et $\xi > R$ (car r doit être positif) mais dans les deux cas $\sin\alpha$ varie de 0 à $\sqrt{1 - \xi^2/4R^2}$

On peut aussi en tirer la distribution de l'angle α. ξ variant de 0 à $2R\cos\alpha$, la probabilité élémentaire devient

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,2\cos\alpha\,d\,(\sin^{n-1}\alpha) = \frac{2\sin^{n-2}\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha}{B\left(\frac{n-1}{2},\frac{3}{2}\right)}$$

$\sin^2\alpha$ suit donc une loi Bêta de paramètres $(n-1)/2$ et $3/2$.

3. Au lieu de fixer la direction OM ou la direction Δ, fixons maintenant l'extrémité P des vecteurs sur la frontière de Sn.

Les points M origine de vecteurs de longueur inférieure à ξ sont à l'intérieur de la sphère Sn (R) et de la sphère de centre P et de rayon ξ.

La distribution non uniforme des points M correspond précisément à la formule

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\,.\,\frac{d\xi}{R}\,.\,d\,(\sin^{n-1}\alpha)$$

En fonction des mêmes variables, le volume élémentaire a pour expression (avec les notations de la note de E. GLOUKHIAN précitée) :

$$Vn(R)\,f_1(\xi)\,f_2(\alpha)\,d\xi\,d\alpha = \frac{2\Pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\,\xi^{n-1}\sin^{n-2}\alpha\,d\xi\,d\alpha$$

La probabilité par unité de volume est ainsi

$$\frac{\cos \alpha}{Vn(R)} \left(\frac{R}{\xi}\right)^{n-1}$$

Le problème posé peut donc donner lieu à un paradoxe analogue à celui de BERTRAND (corde prise au hasard sur un cercle).

En effet, un mécanisme différent d'intervention du hasard consisterait à prendre au hasard M dans la sphère et P sur la frontière, de façon indépendante. Alors le volume intérieur aux deux sphères, rapporté au volume total Vn (R), représentera la fonction de répartition de ξ. La densité de probabilité sera

$$f_1(\xi) \int_0^{\arccos \frac{\xi}{2R}} f_2(\alpha)\, d\alpha$$

Un troisième mécanisme pourrait être de choisir, de façon indépendante, P sur la frontière, puis la direction Δ (densité $f_2(\alpha)$) enfin M au hasard sur la corde (densité $1/2R \cos \alpha$). La densité de probabilité résultante pour ξ est alors

$$\int_0^{\arccos \frac{\xi}{2R}} \frac{f_2(\alpha)\, d\alpha}{2R \cos \alpha}$$

Le problème de la distance entre un point intérieur à une sphère et un point de la frontière, s'il était posé en termes trop vagues, pourrait donc recevoir l'une ou l'autre de ces réponses aux résultats très différents.