Revue de statistique appliquée

F. Chartier

Validité de l'approximation de Poisson pour la borne supérieure d'un intervalle de confiance relatif à une proportion

Revue de statistique appliquée, tome 26, nº 2 (1978), p. 37-43

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1978__26_2_37_0>

VALIDITÉ DE L'APPROXIMATION DE POISSON POUR LA BORNE SUPÉRIEURE D'UN INTERVALLE DE CONFIANCE RELATIF A UNE PROPORTION

F. CHARTIER

Les abaques figurant aux pages suivantes constituent une extension de ceux présentés dans un article récent [1]. Rappelons brièvement l'objet de ces abaques.

La borne supérieure de l'intervalle de confiance unilatéral à $1 - \alpha$, du type $[0, p_s]$, ou bilatéral à $1 - 2\alpha$, du type $[p_i , p_s]$, pour le paramètre p de la loi binomiale B (n , p), est la racine p_{sB} de l'équation en p :

$$\sum_{x=0}^{k} C_n^x \, p^x (1 - p)^{n-x} = \alpha$$

où k est la valeur observée de la variable aléatoire binomiale.

Les tables numériques de la loi binomiale permettent de déterminer la valeur de cette racine. Cependant ces tables ne sont pas d'un usage très courant,de sorte que, chaque fois que l'on se trouve dans les conditions d'application de l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson, à savoir : n assez grand et p assez petit, de telle manière que le produit m = np soit de l'ordre de quelques unités, on a recours à cette loi approchée. Toutefois, plutôt que la table da la loi de Poisson, on utilise les fractiles de la variable χ^2, ce qui est strictement équivalent, mais plus commode. On a ainsi pour valeur approchée de p_{sB} l'approximation de Poisson :

$$p_{sP} = \frac{1}{2n} \chi^2_{1-\alpha} \, (2k + 2).$$

Systématiquement pour des valeurs finies de n et positives de p, on a :

$$e = p_{sP} - p_{sB} > 0$$

Les abaques figurant aux pages suivantes présentent pour chacune des valeurs usuelles de $1 - \alpha$: 0,9 ; 0,95 ; 0,975 ; 0,99 et 0,995, les courbes donnant e = 0,005 ; 0,01 ; 0,02 et 0,04 en fonction de n et de k, les deux paramètres à partir desquels on forme l'intervalle de confiance.

Mots-clés : **Approximation de Poisson, Estimation d'une proportion, Intervalle de confiance.**

Ainsi, sur l'abaque marqué $1 - \alpha = 0{,}95$, on voit que :

si $n = 60$ et $k = 5$: e est compris entre 0,005 et 0,01
si $n = 80$ et $k = 5$: e est inférieur à 0,005.

Effectivement, les valeurs arrondies au millième de p_{sB}, p_{sP} et e sont, pour $1 - \alpha = 0{,}95$:

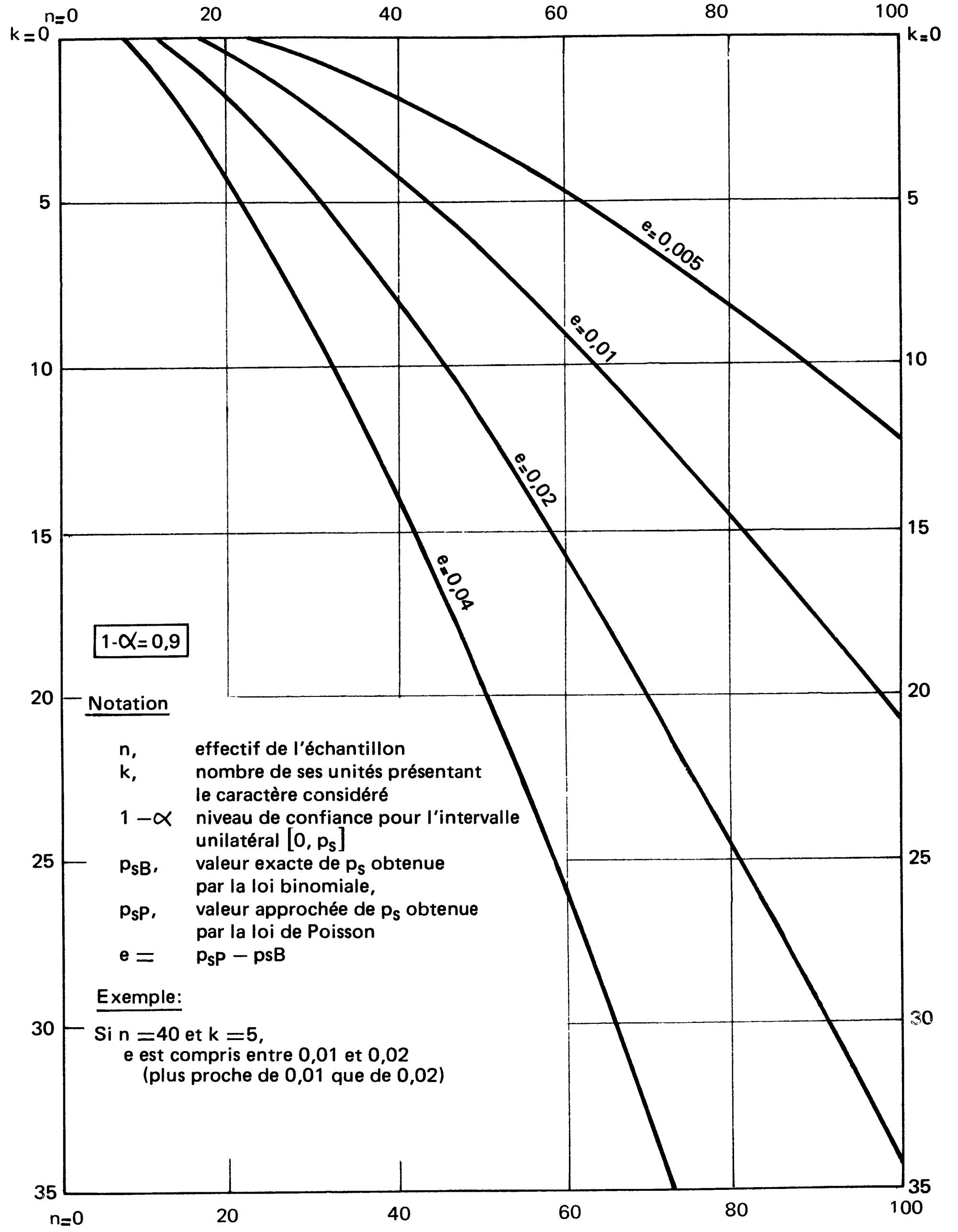
n	k	p_{sB}	p_{sP}	$e = p_{sP} - p_{sB}$
60	5	0,167	0,175	0.008
80	5	0,127	0,131	0,004

Le mode de construction des abaques figurant aux pages suivantes a été le même que pour les précédents, cités en [1] : pour diverses valeurs de k, on a déterminé la valeur de n telle que e soit sensiblement égal à chacune des valeurs considérées : 0,005 ; 0,01 ; 0,02 ou 0,04. On a ensuite tracé les courbes joignant les divers points (k , n) ainsi obtenus.

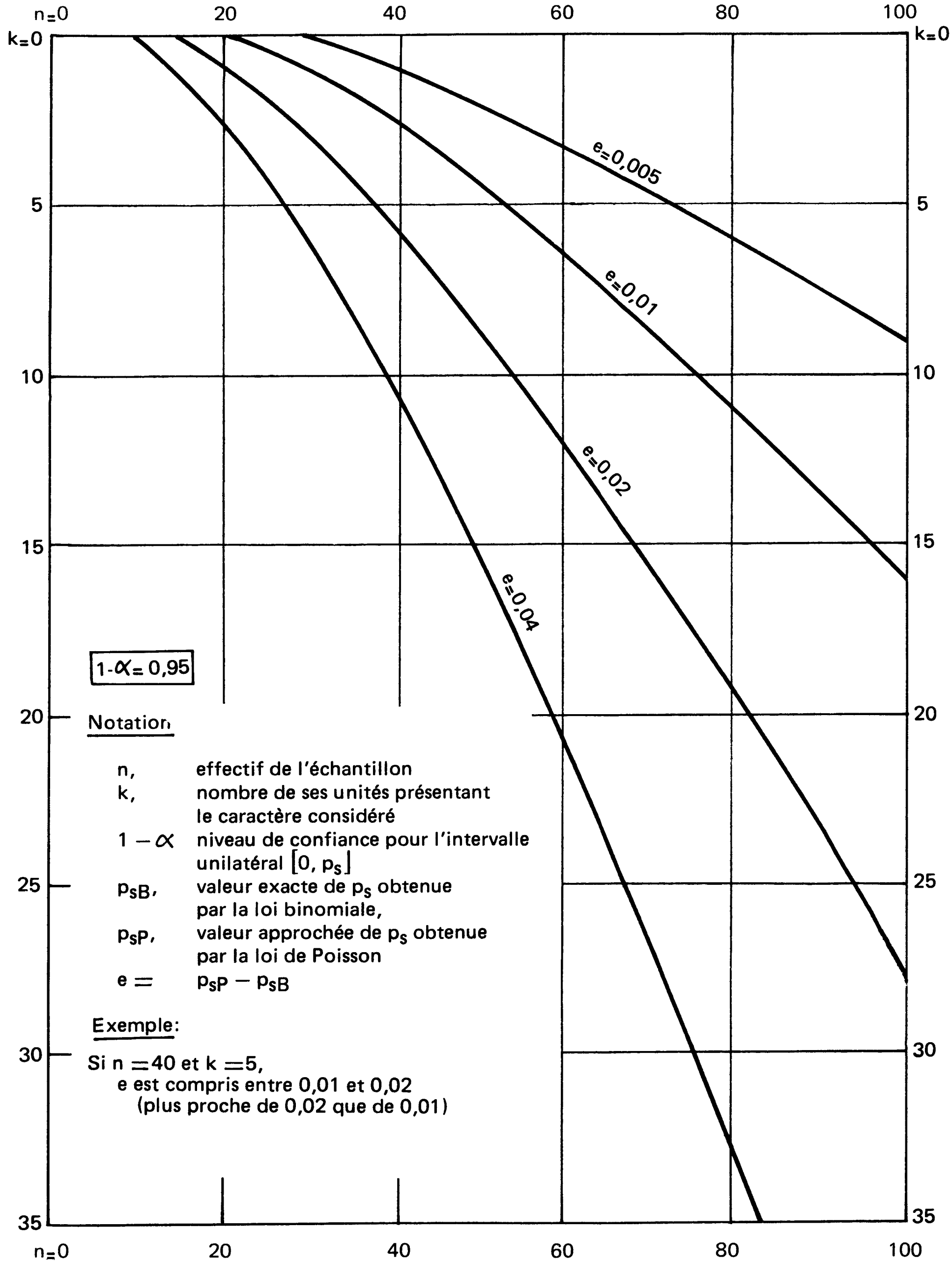
BIBLIOGRAPHIE

[1] F. CHARTIER et E. MORICE. – Validité de l'approximation de Poisson pour les bornes d'un intervalle de confiance relatif à une proportion. *Revue de Statistique Appliquée,* 1977 vol. XXV, n° 2, p. 27/32.

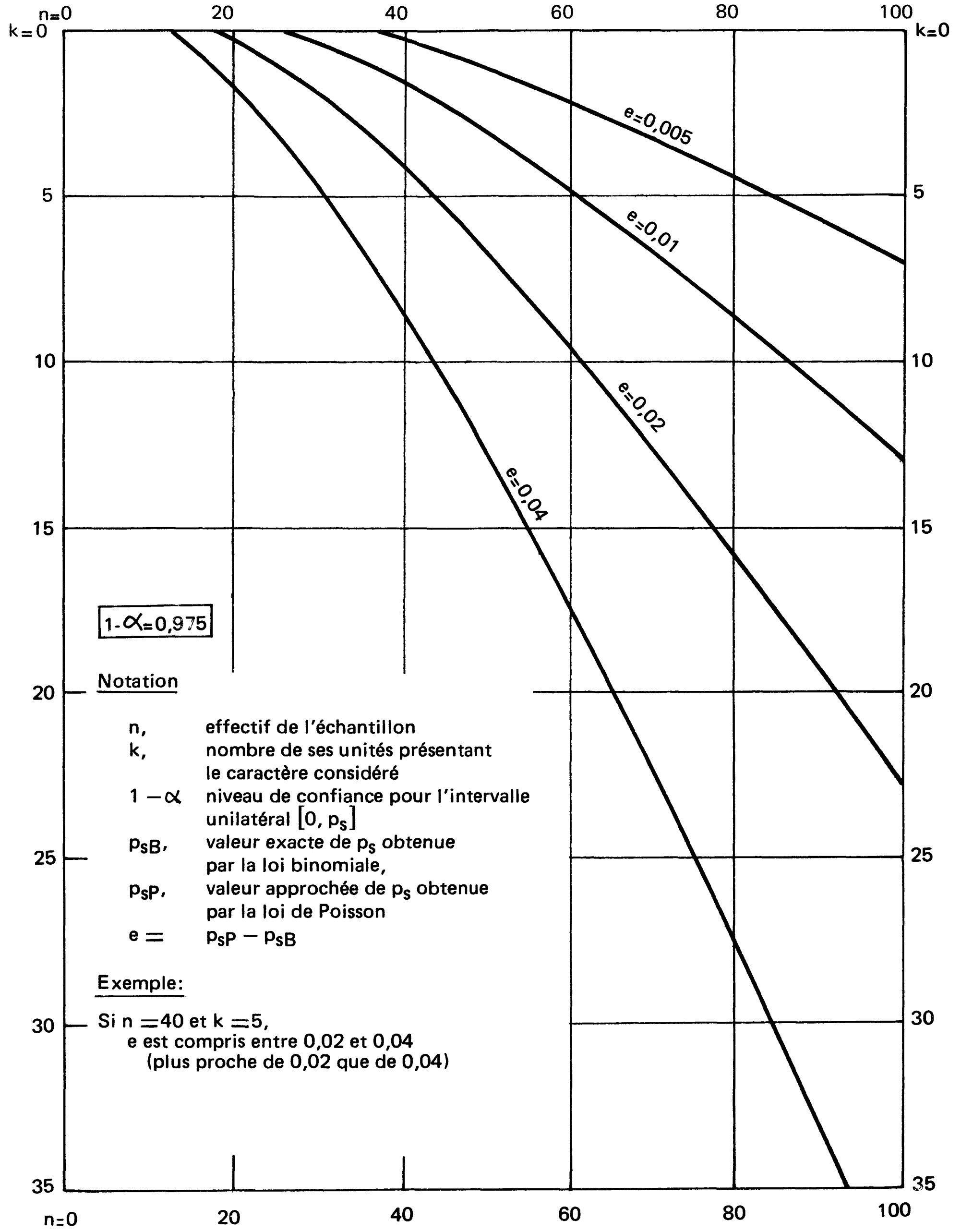
Abaque 1


n=0
20
40
60
80
100
k=0
k=0
5
10
15
20
25
30
35
e=0,005
e=0,01
e=0,02
e=0,04
1-α=0,9
Notation
n, effectif de l'échantillon
k, nombre de ses unités présentant le caractère considéré
1 − α niveau de confiance pour l'intervalle unilatéral [0, p_s]
p_{sB}, valeur exacte de p_s obtenue par la loi binomiale,
p_{sP}, valeur approchée de p_s obtenue par la loi de Poisson
e = p_{sP} − psB
Exemple:
Si n = 40 et k = 5,
e est compris entre 0,01 et 0,02
(plus proche de 0,01 que de 0,02)
n=0

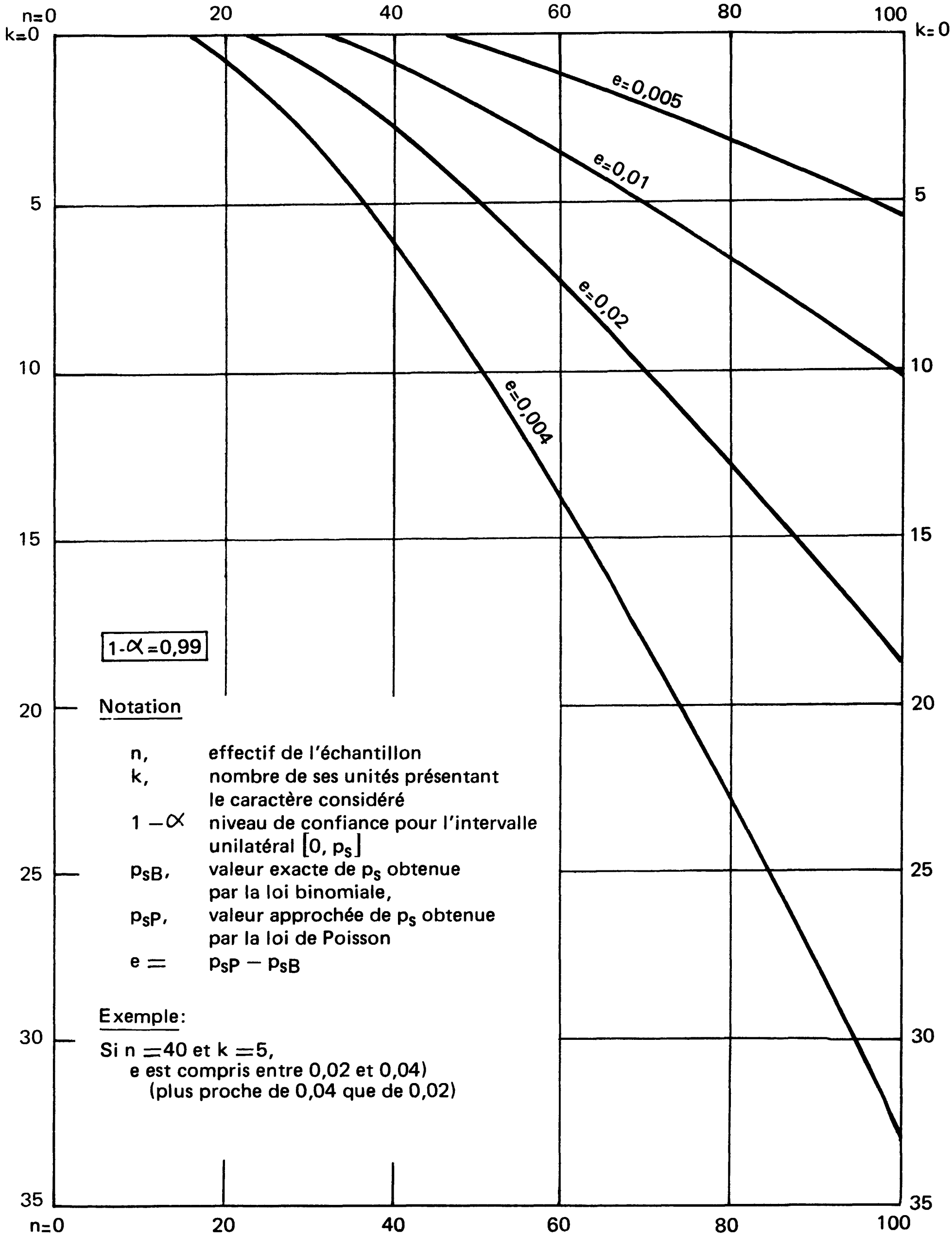
Abaque 2


n=0
20
40
60
80
100
k=0
5
10
15
20
25
30
35
e=0,005
e=0,01
e=0,02
e=0,04
1-α= 0,95
Notation
n, effectif de l'échantillon
k, nombre de ses unités présentant le caractère considéré
1 − α niveau de confiance pour l'intervalle unilatéral [0, p_s]
p_{sB}, valeur exacte de p_s obtenue par la loi binomiale,
p_{sP}, valeur approchée de p_s obtenue par la loi de Poisson
e = $p_{sP} - p_{sB}$
Exemple:
Si n = 40 et k = 5,
e est compris entre 0,01 et 0,02
(plus proche de 0,02 que de 0,01)

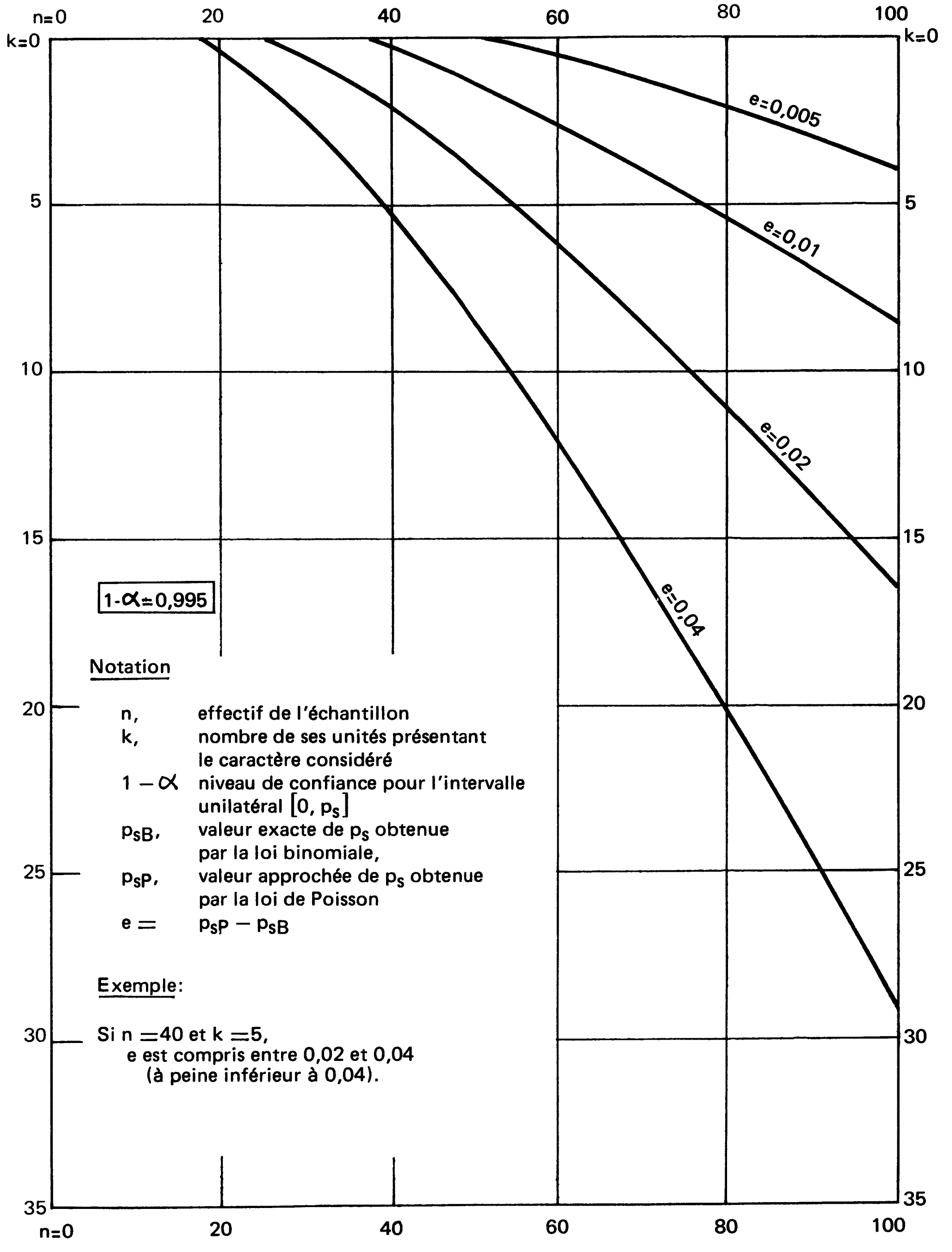
Abaque 3


n=0
20
40
60
80
100
k=0
k=0
5
10
15
20
25
30
35
e=0,005
e=0,01
e=0,02
e=0,04
1-α=0,975
Notation
n, effectif de l'échantillon
k, nombre de ses unités présentant le caractère considéré
1 − α niveau de confiance pour l'intervalle unilatéral [0, p_s]
p_{sB}, valeur exacte de p_s obtenue par la loi binomiale,
p_{sP}, valeur approchée de p_s obtenue par la loi de Poisson
e = $p_{sP} - p_{sB}$
Exemple:
Si n = 40 et k = 5,
e est compris entre 0,02 et 0,04
(plus proche de 0,02 que de 0,04)
n=0
20
40
60
80
100

Abaque 4


n=0
k=0
20
40
60
80
100
k=0
5
10
15
20
25
30
35
n=0
e=0,005
e=0,01
e=0,02
e=0,004
1-α=0,99
Notation
n, effectif de l'échantillon
k, nombre de ses unités présentant le caractère considéré
1 − α niveau de confiance pour l'intervalle unilatéral [0, p_s]
p_{sB}, valeur exacte de p_s obtenue par la loi binomiale,
p_{sP}, valeur approchée de p_s obtenue par la loi de Poisson
e = $p_{sP} - p_{sB}$
Exemple:
Si n = 40 et k = 5,
e est compris entre 0,02 et 0,04)
(plus proche de 0,04 que de 0,02)

Abaque 5


n=0
20
40
60
80
100
k=0
5
10
15
20
25
30
35
e=0,005
e=0,01
e=0,02
e=0,04
1-α=0,995
Notation
n, effectif de l'échantillon
k, nombre de ses unités présentant le caractère considéré
1 – α niveau de confiance pour l'intervalle unilatéral [0, p_s]
p_{sB}, valeur exacte de p_s obtenue par la loi binomiale,
p_{sP}, valeur approchée de p_s obtenue par la loi de Poisson
e = $p_{sP} - p_{sB}$
Exemple:
Si n = 40 et k = 5,
e est compris entre 0,02 et 0,04
(à peine inférieur à 0,04).