

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

MAURICE DUMAS

## Sur les tests dérivés de la loi de Kolmogorov

*Revue de statistique appliquée*, tome 25, n° 1 (1977), p. 35-55

<[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1977\\_\\_25\\_1\\_35\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1977__25_1_35_0)>

© Société française de statistique, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR LES TESTS DÉRIVÉS DE LA LOI DE KOLMOGOROV

Maurice DUMAS

Ingénieur en chef de l'artillerie navale (E. R.)

## TABLE DES MATIERES

|                                                                                                      | Pages |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 1. Introduction et notations..                                                                       | 36    |
| 2. Le test K.S. et son application graphique                                                         | 37    |
| 3. Remarques sur le test K.S.                                                                        | 37    |
| 4. Application numérique du test K.S.                                                                | 39    |
| Exemple                                                                                              | 39    |
| 5. Cas où H est une loi normale.                                                                     | 40    |
| 6. Cas I : La loi normale H, bien déterminée, est quelconque..                                       | 40    |
| 7. Cas II : Les paramètres de la loi normale H sont déterminés par $m = \bar{x}$ et $\sigma = s$ .   | 41    |
| 8. Cas III : Les paramètres $m$ et $\sigma$ de la loi H ont été déterminés par une droite de Henry.. | 41    |
| 9. Exemple tiré d'une étude technique..                                                              | 44    |
| a) Position du problème..                                                                            | 44    |
| b) Graphique de Henry.                                                                               | 44    |
| c) Tests divers.                                                                                     | 45    |
| d) Discussion statistique..                                                                          | 46    |
| e) Discussion technique.                                                                             | 46    |
| 10. Bibliographie.                                                                                   | 47    |
| Table I et Table II.                                                                                 | 48-50 |

## RESUME

L'auteur examine le cas du test de Kolmogorov-Smirnov, et celui du test de Lilliefors ; il formule à leur sujet quelques remarques qui le conduisent à établir différentes tables numériques, grâce auxquelles l'application de l'un et de l'autre de ces tests est rendue très simple, particulièrement en ce qui concerne le cas où la loi hypothèse est normale.

**Mots-clés :** Loi de Kolmogorov. Test de Kolmogorov-Smirnov. Test de Kolmogorov-Lilliefors.

Tests de normalité. Droite de Henry. Contrôle des fabrications.

Il établit de plus une liaison entre ces tests et la construction de Henry ; il montre que des courbes critiques, concrétisant des tests, peuvent être tracées sur un graphique de Henry, et comment l'on peut se rapprocher ainsi d'un test de normalité.

## 1 – INTRODUCTION ET NOTATIONS

Le test dérivé le plus directement de la loi de Kolmogorov est connu sous le nom de Test de Kolmogorov-Smirnov (Test K.S.). Il met en cause une série de  $n$  mesures  $x_i$ , avec :

$$1 \leq i \leq n \quad x_{i-1} \leq x_i,$$

à laquelle nous faisons correspondre :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n \quad \text{et} \quad s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1).$$

Le test K.S. s'applique lorsque l'on se propose de décider s'il y a lieu de rejeter l'hypothèse d'après laquelle la série de mesures proviendrait d'une certaine loi continue, entièrement déterminée ; soit  $F(x)$  la fonction de répartition de cette loi, dite loi hypothèse, ou loi H. En particulier, il s'applique au cas où H est la loi normale, entièrement déterminée par ses deux paramètres  $m$  et  $\sigma$ , connus ; plus particulièrement encore, il s'applique au cas où  $m$  et  $\sigma$  sont définis à partir de la série elle-même, au moyen des relations suivantes, mettant en cause des estimations classiques :

$$m = \bar{x} \quad \text{et} \quad \sigma = s. \quad (1)$$

Ce dernier cas particulier a été envisagé par MASSEY [2] puis étudié par LILLIEFORS [3] au moyen d'une méthode de Monte-Carlo ; l'aboutissement a été le test de Kolmogorov-Lilliefors (dit dans la suite : test L.) auquel sont associées des valeurs numériques inférieures, à conditions égales, à celles que le test K.S. conduirait à considérer si l'on ne tenait pas compte des coïncidences que traduisent les relations (1).

Dans ce qui suit, nous nous proposons de montrer que la mise en oeuvre graphique du test K.S. peut être plus simple que si la théorie était suivie pas à pas ; de la sorte, le recours à ce test – le théorème de K. est “un des joyaux de la statistique mathématique” comme l'a écrit G. DARMOIS dans une préface [1] – pourra devenir encore plus fréquent qu'aujourd'hui.

Par voie de conséquence, la mise en oeuvre du test L. peut, elle aussi, être très simple.

En outre, nous nous proposons de relier les deux tests aux études que permet l'établissement d'une droite de Henry.

## 2 – LE TEST K.S. ET SON APPLICATION GRAPHIQUE

a) L'application du test K.S. suppose que l'on ait admis un risque de première espèce, soit  $\alpha$  ce risque, et que l'on dispose d'une table donnant la valeur de la "différence"  $D$ , correspondant à  $n$  et à  $\alpha$ . MASSEY [2] a donné une telle table ; STEPHENS [4] et [5] a donné pour  $D$  des valeurs un peu différentes des précédentes ; remarque est faite que  $D$  est indépendante du rang  $i$  des mesures prises en considération pour l'application du test.

b) Sous sa forme graphique (Fig. 1), le test K.S. revient à ceci :

- tracer la courbe de répartition de  $H$ , c'est-à-dire la courbe  $F(x)$  ;
- lire sur la table la valeur de  $D$  correspondant aux données ;
- tracer de part et d'autre de la courbe  $F(x)$  les "courbes critiques" inférieure et supérieure, déduites l'une et l'autre de la courbe  $F(x)$  par une translation d'amplitude  $D$ , parallèlement à l'axe des ordonnées ; si la graduation de cet axe n'est pas linéaire, cette "translation" déforme la courbe ;
- porter les points représentatifs des mesures de la série ; pour cela, à l'abscisse  $x_i$ , faire correspondre 2 points, d'ordonnées respectives  $i/n$  et  $(i-1)/n$  ; il y a donc à porter  $2n$  points, dont 1 sur chacune des ordonnées 0 et 1 ;
- rejeter l'hypothèse si même un seul des points ainsi portés se situe à l'extérieur du domaine limité par les courbes critiques.

c) Le cas particulier où  $H$  est une loi normale est examiné séparément ( $n^\circ 5$  et suivants).

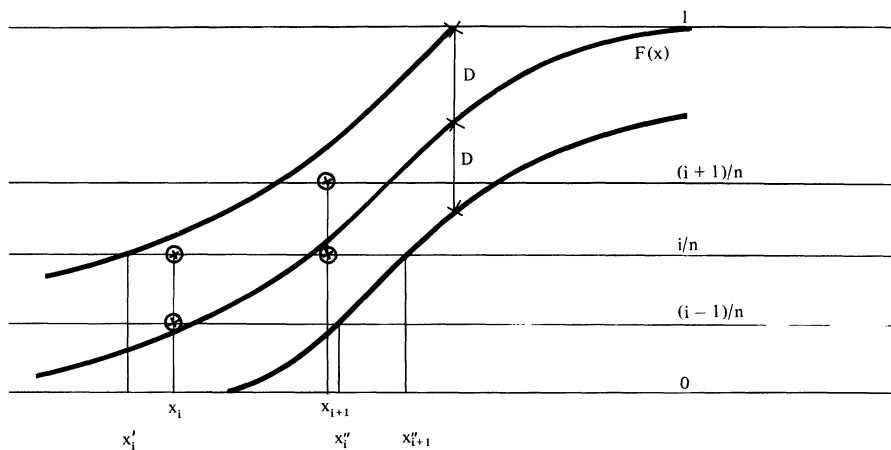


Figure 1 – Test K.S. du n° 2.

## 3 – REMARQUES SUR LE TEST K.S.

a) Sur la droite d'ordonnée  $i/n$  sont portés à la fois les points d'abscisses  $x_i$  et  $x_{i+1}$ .

Appelant, relativement à l'ordonnée  $i/n$ , "valeur critique inférieure (supérieure)" l'abscisse du point de rencontre de la droite d'ordonnée  $i/n$  avec la courbe critique supérieure (inférieure), il y a lieu à rejet de l'hypothèse du fait d'un point d'ordonnée  $i/n$  :

– soit si  $x_i$  est inférieure à la valeur critique inférieure, désormais désignée par  $x'_i$  ;

– soit si  $x_{i+1}$  est supérieure à la valeur critique supérieure, désormais désignée par  $x''_{i+1}$ .

N.B. – Aucun des cas  $x_i > x''_{i+1}$  et  $x_{i+1} < x'_i$  n'est à considérer ; en effet, par exemple,  $x_i > x''_{i+1}$  entraîne que sur l'ordonnée  $(i-1)/n$  il y ait  $x_i > x''_i$  ; d'où rejet.

b) Du fait du a ci-dessus, il y a rejet si  $x_i$  est extérieur à l'intervalle  $(x'_i, x''_i)$ .

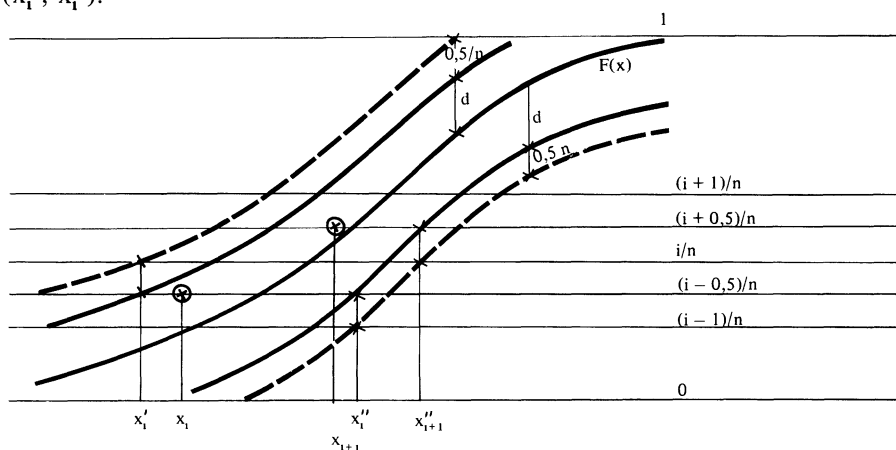


Figure 2 – Test K.S. du n° 3.

Le rapprochement des figures 1 et 2 montre que, relativement à la mesure  $x_i$ , on ne change aucunement le résultat du test si, à cette mesure  $x_i$ , l'on ne fait correspondre sur le graphique qu'un seul point (Fig. 2), au lieu de 2 points (Fig. 1), à la double condition d'une part, que ce point soit sur l'ordonnée  $(i-0,5)/n$ , et d'autre part, que les courbes critiques soient rapprochées de la courbe  $F(x)$ , de manière que leurs distances à cette courbe deviennent  $\mp d$ , avec :

$$d = D - 0,5/n.$$

Ainsi l'application graphique du test K.S. se trouve simplifiée puisqu'il n'y a plus à porter que  $n$  points au lieu de  $2n$  ; aucun de ces nouveaux points ne se trouve sur une ordonnée extrême.

N.B. – En rapport avec ce qui précède, les points critiques d'abscisses  $x'_i$  et  $x''_i$ , sont à placer graphiquement sur une seule et même ordonnée (c'est-à-dire l'ordonnée  $(i-0,5)/n$ , qui est aussi celle du point d'abscisse  $x_i$ ) comme sur la figure 2, et non plus l'un sur l'ordonnée  $i/n$  et l'autre sur l'ordonnée  $(i-1)/n$ , comme sur la figure 1.

#### 4 – APPLICATION NUMERIQUE DU TEST K.S.

Au niveau  $\alpha$  admis, il y a lieu de rejeter l'hypothèse d'après laquelle la série de  $n$  mesures proviendrait de la loi  $H$ , si même une seule des mesures  $x_i$  se situe en dehors de l'intervalle critique  $(x'_i, x''_i)$  défini indifféremment :

– d'après les considérations des numéros 2b et 3a, par :

$$F(x'_i) = \frac{i}{n} - D \quad ; \quad F(x''_{i+1}) = \frac{i}{n} + D,$$

ce qui donne 
$$F(x''_i) = \frac{i-1}{n} + D ;$$

– d'après les considérations du numéro 3b, par :

$$F(x'_i) = \frac{i-0,5}{n} - d \quad ; \quad F(x''_i) = \frac{i-0,5}{n} + d, \quad \text{avec} \quad d = D - \frac{0,5}{n}.$$

L'application numérique du test K.S. est particulièrement simple si l'on utilise la table I, laquelle donne, multipliées par 1000, les valeurs de  $(i-0,5)/n$  et de  $d = D - 0,5/n$ , les valeurs de  $D$  ayant été celles de MASSEY [2].

La table I donne en outre, suivant trois variantes, la manière d'utiliser les quantités données, les trois variantes conduisant naturellement aux mêmes conclusions.

La variante A correspond directement à l'application graphique du test. Les variantes B et C font intervenir les quantités  $\frac{i-0,5}{n} \mp d$ , qui peuvent d'ailleurs être tabulées indépendamment de  $H$ .

La variante C convient au mieux lorsque  $H$  sert d'hypothèse à bien des reprises, car une table des valeurs critiques peut être établie une fois pour toutes.

*Exemple.* Soit à tester au niveau  $\alpha = 0,20$ , l'hypothèse d'après laquelle une certaine série de  $n = 14$  mesures proviendrait de la loi normale réduite ; les calculs ne sont faits ici que dans le cas de la mesure  $x_9 = 0,90$  de cette série.

La consultation d'une table de la loi normale réduite fait connaître  $F(0,90) = 0,816$ . Sur la table I on trouve qu'à  $n = 14$  et  $i = 9$  correspond  $(i-0,5)/n = 0,607$  ; et qu'à  $n = 14$  et  $\alpha = 0,20$  correspond  $d = 0,238$ .

Suivant la variante A, les deux valeurs critiques de  $(i-0,5)/n = 0,607$  sont :

$$0,816 - 0,238 = 0,578 \quad \text{et} \quad 0,816 + 0,238 > 1.$$

Suivant la variante B, les deux valeurs critiques de  $F(x_i) = 0,816$  sont :

$$0,607 - 0,238 = 0,369 \quad \text{et} \quad 0,607 + 0,238 = 0,845.$$

Suivant la variante C, les deux valeurs critiques de  $x_9 = 0,90$ , sont  $x'_9$  et  $x''_9$ , valeurs déterminées, après exécution des calculs de la variante B, par

$F(x') = 0,369$  et  $F(x'') = 0,845$  ; d'où :

$$x'_9 = -0,334 \quad \text{et} \quad x''_9 = 1,015.$$

Conclusion : D'après la seule mesure considérée, l'hypothèse ne serait pas à rejeter.

## 5 – CAS OU H EST UNE LOI NORMALE

Pour l'application du test K.S. au cas où H est une loi normale, on peut établir des tables grâce auxquelles cette application est encore plus directe qu'avec la table I. A cette particularité s'ajoute le fait déjà signalé plus haut (n° 1) de l'existence du test L.

Remarque étant faite que les tests K.S. et L. ne sont pas des tests de normalité, et que leur application implique que les paramètres  $m$  et  $\sigma$  de H soient bien déterminés, nous sommes amené à distinguer plusieurs cas.

Dans le cas I,  $m$  et  $\sigma$  n'ont aucunement été tirés de la série de  $n$  mesures considérée ; c'est le cas par exemple où l'on se propose de comparer cette série à ce qui peut être attendu d'une loi normale (la loi H) sur laquelle l'attention a été attirée par des raisonnements ou des expériences antérieures.

Dans les cas II et III,  $m$  et  $\sigma$  ont été tirés de la série considérée, parce que l'on se propose de résumer cette série par seulement deux valeurs numériques, caractérisant respectivement moyenne et dispersion des mesures ; ce que l'on demande alors au test, c'est de faire apparaître s'il serait déraisonnable de s'en tenir à un résumé aussi simple que celui envisagé. Bien entendu, ce résumé devrait inclure également la valeur de  $n$ , en l'absence de laquelle ce résumé n'aurait aucune valeur pratique.

## 6 – CAS I : LA LOI NORMALE H, BIEN DETERMINEE, EST QUELCONQUE ;

en particulier, les paramètres  $m$  et  $\sigma$  de H ont été déterminés indépendamment de la série de mesures.

Le cas où  $m$  et  $\sigma$  sont quelconques se ramène au cas  $m = 0$  et  $\sigma = 1$  (cas de la loi normale réduite) en remplaçant chaque  $x_i$  par sa valeur réduite  $(x_i - m)/\sigma$ .

A partir d'une table  $F(u)$  de la loi normale réduite, on calcule les valeurs critiques  $u'_i$  et  $u''_i$  par application de la variante C de la Table I ; les relations sont donc :

$$F(u) = \frac{i - 0,5}{n} \pm d \quad \text{avec} \quad d = D - \frac{0,5}{n},$$

$u$  étant positif ou négatif suivant que  $F(u)$  est supérieur ou inférieur à 0,50 ; leur application a donné les valeurs des colonnes K de la Table II. Ainsi.

repreuant l'exemple numérique du numéro 4, traité suivant la variante C, les valeurs critiques (soit  $-0,334$  et  $1,015$ ) figurent directement dans la colonne K20, pour  $n = 14$  et  $i = 9$  de la table II.

*Remarque.* Ce qui précède montre que, pour  $n$  donné, on peut, avant tout calcul, tracer sur un papier à échelle fonctionnelle loi normale, les courbes critiques définies par les  $u'_i$  et  $u''_i$ , pour les différentes valeurs de  $\alpha$  que l'on envisage d'utiliser. De la sorte, après calcul des valeurs réduites  $(x_i - m)/\sigma$ , le test K.S. s'applique graphiquement de façon très simple. Bien entendu, le point correspondant à  $x_i$  est à porter sur l'ordonnée  $(i - 0,5)/n$ .

## 7 – CAS II : LES PARAMETRES DE LA LOI NORMALE H SONT DETERMINES PAR $m = \bar{x}$ ET $\sigma = s$ .

a) Le cas où H est déterminé en fonction de la série de mesures par les égalités  $m = \bar{x}$  et  $\sigma = s$ , est celui où le test L, présenté au n° 1, peut être substitué au test K.S., avantageusement de différents points de vue. Tout ce qui a été dit relativement au test K.S. s'applique au test L. ; il y a seulement à utiliser les différences, soit  $D_L$ , tabulées par LILLIEFORS [3], à la place des différences D dites plus haut. En particulier, les nouvelles valeurs critiques  $v'_i$  et  $v''_i$  sont définies par

$$F(v) = \frac{i - 0,5}{n} \pm \left( D_L - \frac{0,5}{n} \right) .$$

Il y a donc lieu de remplacer dans la table II, les  $u'_i$  et  $u''_i$  des colonnes K, par les  $v'_i$  et  $v''_i$  des colonnes L. La remarque du n° 6 reste valable, sous réserve que ce même remplacement soit effectué.

Il est à noter que, les valeurs  $D_L$  ayant été obtenues par une méthode de Monte-Carlo, il est téméraire de s'en servir dans des conditions qui ne sont pas en accord avec celles des essais de l'auteur.

b) Le cas II peut être traité graphiquement : voir d) du n° suivant.

## 8 – CAS III : LES PARAMETRES $m$ ET $\sigma$ DE LA LOI H ONT ETE DETERMINEES PAR UNE DROITE DE HENRY

*Remarque liminaire.* Le cas III, puisqu'il ne se confond pas avec le seul cas (cas II) où le test L. est applicable, doit être traité au moyen des valeurs du test K.S. ; mais on peut espérer qu'une future expérimentation permettra de rapprocher pour le cas II, le test K.S. du test L. (voir, au n° 10, la remarque au sujet de [2] MASSEY) ; l'on pourrait donc être tenté, toujours pour le cas III, de se référer au test L., mais des précautions seraient alors à prendre (paragraphe c) ci-dessous).



a) Le cas où  $H$  est déterminée par une droite de HENRY construite d'après la série de  $n$  mesures, est particulièrement intéressant étant donné que, à notre avis, une étude sur le graphique de HENRY et un recours au test de K.S. (ou  $L$ ), sont deux opérations qui se complètent heureusement l'une l'autre. Développer ce point serait sortir du cadre de la présente note ; il y a seulement lieu de remarquer ceci :

1) Sur un graphique de HENRY, il est possible de reporter de part et d'autre de la droite, retenue comme compensant au mieux les mesures de la série, (droite de HENRY), les valeurs critiques des mesures  $x_i$ , calculées à l'aide, par exemple, de la table II ; comme à ces valeurs critiques sont associés des risques  $\alpha$  bien déterminés, l'ensemble constitue un véritable test, aussi complet qu'il peut être désiré, et intéressant à connaître même si, dans l'état actuel des choses, il se présente comme étant peu puissant. Pour le moins, on obtient par le tracé des lignes joignant les points critiques, une précieuse indication visuelle sur les écarts pouvant exister, sans que cela soit surprenant, entre les points expérimentaux et la droite de HENRY correspondante ; une indication différente, mais répondant à la même préoccupation, a été mentionnée dans [6], sous la désignation de "Lignes  $L\ 25$  et  $L\ 75$ ".

2) Le graphique de HENRY est valablement établi si l'on adopte  $(i - 0,5)/n$  comme estimation de la fréquence cumulée de  $x_i$  ; lorsqu'il en est ainsi, les points critiques de  $x_i$  se placent (N.B. du n° 3b) sur la même ordonnée (soit :  $(i - 0,5)/n$ ) que le point  $x_i$  lui-même.

Il est à noter que, pour l'établissement d'un graphique de HENRY :

— d'une part, la table I donne les valeurs de  $(i - 0,5)/n$ , qui sont utiles en cas d'emploi d'un papier à échelle fonctionnelle, loi normale ;

— d'autre part, la table II, dans sa dernière colonne, donne  $u_i$  d'après  $F(u_i) = (i - 0,5)/n$  pour  $i$  supérieur à  $0,5\ n$  ; en utilisant convenablement cette dernière valeur, on se libère de la sujétion d'avoir recours à un papier à échelle fonctionnelle, loi normale, et l'on peut opérer sur une simple feuille de papier quadrillé.

En outre, l'utilisation des ordonnées  $(i - 0,5)/n$  et du papier quadrillé peut être faite à l'aide de tables existantes [6].

3) Si pour l'étude en cause l'on adopte non pas l'estimation  $(i - 0,5)/n$ , mais  $i/n$ , ou  $i/(n + 1)$  ou etc, l'étude n'en sera pas modifiée, à condition que les valeurs critiques de  $x_i$  soient bien portées sur la même ordonnée que  $x_i$ .

b) Puisque la série de mesures a fait l'objet d'une étude graphique, à savoir celle qui a conduit à la droite de HENRY dont les paramètres  $m$  et  $\sigma$  ont été retenus, il est tout naturel d'appliquer le test K.S. sous sa forme graphique, particulièrement expressive. Pour cela :

— calculer les quantités  $m + u'_i \sigma$  et  $m + u''_i \sigma$  ;

— porter les points ayant ces quantités pour abscisses sur la même ordonnée que le point d'abscisse  $x_i$  ;

— rejeter l'hypothèse si même un seul des points d'abscisse  $x_i$  se situe hors de l'intervalle des deux points de même ordonnée.

**Remarque.** Il n'est pas toujours nécessaire de calculer en totalité les  $m + u\sigma$  qui sont au nombre de  $2n$ . En effet, les points correspondant à ces quantités se situent sur deux courbes dont l'allure générale est simple ; cette allure est celle des courbes tracées sur la figure 3, comme elle est aussi celle des courbes L25 et L75, citées en a) ci-dessus. Il suffit donc pratiquement d'opérer ainsi :

- calculer les  $m + u\sigma$  seulement pour trois valeurs de  $i$ , voisines respectivement de 0 ( $i$  petit), de  $0,5 n$  et de  $n$  ;
- porter sur le graphique les 6 points correspondant à ces trois valeurs ;
- tracer les courbes passant par ces points et ayant comme allure générale, celle dite plus haut ;
- conclure immédiatement ou bien, s'il y a doute, repérer les valeurs de  $i$  pour lesquelles le point  $x_i$  se situe trop près d'une courbe pour que l'on ait pu conclure, puis calculer les  $m + u\sigma$  qui renseigneront sur ce point, et conclure.

| $i$            | $x_i$ | Courbe I             | Courbe S              |
|----------------|-------|----------------------|-----------------------|
| $i \leq 0,5 n$ |       | 1500<br>$- 425 v_i'$ | 1500<br>$- 425 v_i''$ |
| 1              | 925   | 1165                 | "                     |
| 2              | 1053  | 1295                 | "                     |
| 3              | 1127  | 1409                 | 917                   |
| 4              | 1276  | 1516                 | 1119                  |
| 5              | 1345  | 1624                 | 1259                  |
| $i > 0,5 n$    |       | 1500<br>$+ 425 v_i'$ | 1500<br>$+ 425 v_i''$ |
| 6              | 1430  | 1741                 | 1376                  |
| 7              | 1857  | 1881                 | 1484                  |
| 8              | 1925  | 2083                 | 1591                  |
| 9              | 2028  | "                    | 1705                  |
| 10             | 2034  | "                    | 1835                  |

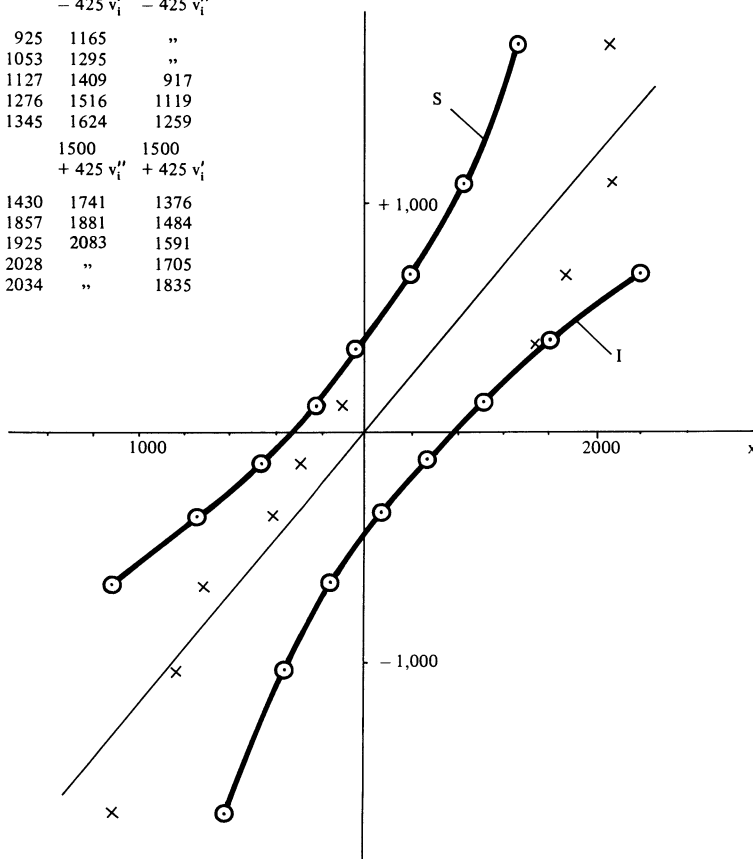


Figure 3 (Exemple du n° 9) – Graphique de HENRY et points critiques du test de LILLIE-FORS, pour  $\alpha = 0,200$

x points expérimentaux

o points critiques correspondants.

c) Dans la construction ci-dessus on s'en est tenu strictement au test K.S., puisque l'on a eu recours (table II) aux  $u$  et non pas aux  $v$  du test L ; si l'on choisit de se référer au test L, on peut opérer exactement comme plus haut, sauf à remplacer les  $u$  par les  $v$ , et seulement à la condition d'avoir l'attention attirée sur ce qu'en agissant de la sorte, on s'expose à une sévérité accrue c'est-à-dire à être amené à rejeter l'hypothèse — ou encore ( $n^{\circ}$  5) à être incité à ne pas résumer la série de  $n$  mesures par seulement les  $m$  et  $\sigma$  déduits de la droite de HENRY tracée — plus souvent que si l'on s'en était tenu strictement au test K.S.

d) Le cas II peut être traité graphiquement dans les mêmes conditions que le cas III, mais en utilisant valablement les  $v$  de la table II au lieu des  $u$  ; c'est d'ailleurs ce qui est fait au  $n^{\circ}$  9.

e) A supposer que la double étude sur un graphique de HENRY conduise à rejeter les hypothèses correspondant respectivement au cas II et au cas III, on est conduit à penser que la série de mesures n'appartient ni à la loi normale définie par les estimations sans biais de ses paramètres, ni à la loi normale que le graphique de HENRY a fait apparaître comme cadrant "au mieux" avec les mesures. Il semble donc que cette double étude, sans qu'elle puisse être considérée en toute rigueur comme constituant un test de normalité, est bien près de mériter cependant d'être considérée comme tel.

## 9 — EXEMPLE TIRE D'UNE ETUDE TECHNIQUE

### a) Position du problème

La série de  $n = 10$  mesures reproduite sur la figure 3 représente les durées de vie de lampes à incandescence d'un même modèle, provenant d'un même atelier, ou, plus exactement, de lampes que l'on ne sait distinguer l'une de l'autre par aucun détail technique de leur élaboration, ou encore, de lampes appartenant à un même lot technique. Le problème technique qui se pose est de déterminer ce que l'on peut valablement retenir de la série de mesures, et notamment si l'on est incité par cette dernière à agir sur le processus de fabrication.

Nous avançons que toute étude du genre de celle-ci, doit commencer par l'établissement d'un graphique de HENRY ; elle peut être poursuivie comme il est indiqué plus loin.

### b) Graphique de HENRY

Se reporter à la case  $n = 10$  de la table II, puis, disposant d'un simple papier quadrillé, faire choix d'échelles linéaires convenables, à la fois pour les durées de vie (axe des  $x$ ) et pour les  $u_i$  de la table II.

Porter sur le graphique les 10 points représentatifs des mesures, points marqués d'une croix sur la figure 3. L'ordonnée de  $x_i$  correspond à  $(i - 0,5)/n$ .

Aucune droite de HENRY n'est tracée, étant donné que les points venant d'être portés apparaissent comme ne pouvant pas être bien compensés par une

droite ; il se trouve même que la disposition d'ensemble de ces points donne à penser que, peut-être, la série étudiée résulte d'un mélange de deux séries d'origines différentes. Finalement, il apparaît comme particulièrement intéressant de soumettre la série donnée à différents tests, avant de conclure.

### c) Tests divers

1) *Test K.S.* Comme aucune droite de HENRY n'a été tracée, on ne dispose pas de valeurs de  $m$  et  $\sigma$ , nécessaires pour appliquer le test en cause.

2) *Test L., forme numérique.* Un calcul donne :

$$\bar{x} = 1500 \quad \text{et} \quad s^2 = 1620500/9 = 425^2.$$

Il y a lieu de se référer aux colonnes L et à la case  $n = 10$  de la table II, puis, pour toutes les valeurs de  $i$ , de calculer les valeurs critiques de  $x_i$  et de les comparer à  $x_i$ .

Ainsi, pour  $i = 5$  et pour  $\alpha = 0,20$ , les valeurs critiques de  $x_5 = 1345$  sont :

$$1500 - 0,568 \times 425 = 1259 \quad \text{et} \quad 1500 + 0,292 \times 425 = 1624.$$

Finalement, aucune valeur  $x_i$  ne conduit à rejeter l'hypothèse soumise au test.

*Remarque :* Si l'on avait complété les calculs ci-dessus, par celui des valeurs réduites  $(x_i - \bar{x})/s$ , on aurait eu à comparer directement ces valeurs aux  $v'_i$  et  $v''_i$  de la table II.

Ainsi, pour  $i = 5$ , la valeur réduite est  $(1345 - 1500)/425$ , soit  $-0,365$ , valeur qui se trouve être comprise entre  $-0,568$  et  $0,292$ .

3) *Test L., forme graphique. Construction préliminaire :* Sur la figure 3 porter :

- d'une part, la droite définie par les valeurs  $m = 1500$  et  $\sigma = 425$  ;
- d'autre part, tous les points représentatifs des valeurs critiques, calculées comme il est dit à propos du test L, forme numérique ;
- puis tracer les deux courbes réunissant ces points entre eux : ce sont les courbes critiques.

Cette construction préliminaire ne fait pas partie du test L. exposé ici ; son but est de faire apparaître quelle est véritablement l'allure générale de ces courbes et leurs positions par rapport à la droite représentative de la loi normale en cause dans le test.

*Test.* Calculer comme plus haut, les valeurs critiques correspondant seulement à trois valeurs de  $i$ , à savoir 2, puis 5 et 9 ;

- porter sur le graphique de HENRY les six points critiques correspondants ;
- tracer approximativement les deux courbes critiques, sachant qu'elles passent par les points critiques, et qu'elles ont pour allure générale, celle que l'on connaît, attendu que l'allure générale des courbes critiques tracées sur la figure 3 au cours de la construction préliminaire, est valable en toute circonstance ;

– reconnaître que les courbes critiques tracées approximativement, contiennent entre elles tous les points  $x_i$ , sauf peut-être, avec les données de l'exemple traité, ceux correspondant à  $x_6$  (éventuellement, trop faible) et à  $x_7$  (éventuellement trop fort) ;

– élucider ce dernier point par les calculs de  $1500 - 425 u'_6$  et de  $1500 + 425 u''_7$ .

Ainsi dans le cas présent, le nombre des calculs nécessaires a été de 8, au lieu de 20 calculs du test L, forme numérique ; la différence aurait été encore plus grande si  $n$  avait été supérieur à 10.

4) *Test de SHAPIRO et WILK*. Les calculs, non détaillés ici, conduisent à :

$$W = 0,894.$$

Les valeurs critiques de  $W$  aux niveaux tabulés (soit  $\alpha = 0,01 - 0,02 - 0,05 - 0,10$  et  $0,50$ ) permettent de situer  $0,894$  au voisinage de  $0,20$ .

#### d) Discussion statistique

Le graphique de HENRY a fourni les enseignements dits plus haut (n° 9b).

Le test L ne conduit pas à rejeter l'hypothèse de base de ce test, et cela, même au niveau  $\alpha = 0,20$ , qui est un niveau sévère en ce sens qu'il entraîne des rejets d'hypothèse bien plus fréquents que les niveaux  $0,05$  et surtout  $0,01$ .

Le test de normalité de SHAPIRO et WILK conduit au même résultat général que le test L.

#### e) Discussion technique

D'une façon générale, hypothèse est faite qu'une fabrication bien réglée donne lieu à une distribution normale des mesures, et qu'en cas de distribution normale, la fabrication apparaît comme d'autant mieux réglée que la dispersion de cette distribution est plus faible. En conséquence, le fait qu'une distribution soit considérée comme normale ne fournit au technicien aucune indication, si ce n'est qu'elle lui donne confiance dans le processus suivi ; mais il lui reste toujours à continuer son étude en vue de réduire la dispersion des mesures.

Ainsi, dans les conditions de l'exemple traité, le technicien n'est pas incité par les tests à intervenir dans le processus d'élaboration du produit. Mais il a l'attention attirée par le graphique de HENRY — que, s'il possède quelques notions élémentaires de statistique, il a été capable de construire lui-même sur une feuille de papier quadrillé, puis d'interpréter — sur l'éventualité d'un trouble équivalant à un mélange de deux fabrications ; réfléchissant sur cette indication, il se dit que l'effectif  $n = 10$  de la série dont il a disposé, est bien trop faible pour renseigner sur un mélange éventuel.

Finalement, ou bien ce technicien est en période d'essais, et il fera en sorte d'effectuer de nouvelles mesures sur un échantillon de grand effectif ; ou bien, la fabrication étant en cours, il portera particulièrement son attention sur tout ce qui pourrait confirmer ou infirmer l'indication donnée par le graphique de HENRY. De toute façon, jusqu'à plus ample informé, il évi-

tera de considérer que les valeurs  $\bar{x} = 1500$  et  $s = 425$ , qui, associées à  $n = 10$ , résument la série par deux estimations sans biais, résument valablement la fabrication.

## 10 – BIBLIOGRAPHIE

[1] DUGUE D. — Traité de statistique théorique et appliquée. Masson. Ouvrage visé au n° 1.

[2] MASSEY F.J.Jr. — The KOLMOGOROV-SMIRNOV test for goodness of fit. *Am. Statistical Ass. Journal* - 1951, pp. 68-78.

Note contenant une table pouvant servir à prolonger la table I pour  $n = 1 - 2$  et 3, et pour  $n = 25 - 30$  et 35.

Les notations étant dans ce qui suit celles de notre texte, MASSEY note que l'on doit s'attendre à ce que l'ajustement de  $m$  et de  $\sigma$  aux valeurs correspondantes de l'échantillon, "soit par calcul, soit par ajustement visuel à une ligne droite sur un papier à échelle fonctionnelle" ait pour conséquence une réduction de  $D_{n,\alpha}$  ; il appuie cela par une expérience de Monte Carlo ayant comporté le tirage de 100 distributions de chacune 10 valeurs d'une population normale ; chaque distribution a été représentée sur un papier à échelle fonctionnelle, et une droite a été tracée au mieux ; parmi les résultats de l'expérience figure notamment ceci que seulement une observation, sur 100, dépassa le point critique de  $\alpha = 0,20$ , d'après le  $D$  du test K.S. D'autres résultats sont rappelés par FERIGNAC dans [8].

*Remarque.* Des deux cas envisagés par MASSEY, l'ajustement par calcul a été développé par LILLIEFORS, tandis que l'ajustement visuel — c'est-à-dire l'ajustement par droite de HENRY — reste à traiter plus complètement qu'il ne l'a été par les 100 distributions de MASSEY. Pour ce faire, l'opérateur aura à éliminer des droites qui, même si elles compensent "au mieux" les points expérimentaux, les compense en fait "très mal". L'opérateur aura donc à se fixer une règle pratique d'élimination ; naturellement, les valeurs des différences retenues finalement pour remplacer dans le cas particulier étudié, les  $D$  de K.S., ne seront valables que dans le cadre de la dite règle, explicitement énoncée, règle qui, dans ces conditions, peut être relativement arbitraire.

[3] LILLIEFORS H.W. — On the KOLMOGOROV-SMIRNOV test for normality with mean and variance unknown. *Am. Statistical Ass. Journal* - 1967, pp. 393-402.

Note contenant une table pouvant servir à compléter les colonnes L de la table II pour les valeurs  $\alpha = 0,10$  et  $0,15$ .

[4] STEPHENS M.A. — Use of the KOLMOGOROV-SMIRNOV, Cramér-von Mises and related statistics without extensive tables. *Journal of the Royal Statistical Society. Série B.* 32 - 1970 pp. 115-122.

Note indiquant pour  $D$  (test de KOLMOGOROV-SMIRNOV) et pour  $D_L$  (test de LILLIEFORS) des valeurs qui auraient pu servir à l'établissement des tables I et II, sauf pour  $\alpha = 0,20$  ; et au prolongement de ces tables pour  $\alpha = 0,025$ .

- [5] PEARSON E.S. and HARTLEY H. — Biometrika Tables for Statisticians. Vol. 2. 1972. Cambridge University Press.  
Ouvrage reproduisant dans sa table 54 les résultats de STEPHENS.
- [6] DUMAS M. — Les épreuves sur échantillon. 1955 ; Centre national de la recherche scientifique.  
Ouvrage visé au n° 8a et 8b, en raison des figures A et B de son n° 403 ; ces figures sont d'ailleurs les reproductions des figures a et b du n° 42 de l'ouvrage : M. DUMAS et P. MAHEU, Les méthodes statistiques et . . . , publié par le Mémorial de l'Artillerie Française, dans ses fascicules de 1948 - 1949 et 1950.
- [7] MORICE E. — Tests de normalité d'une distribution observée. *Revue de Statistique Appliquée*. 1972. Vol. XX n° 2.  
En particulier : exposé du test L. et table de quelques valeurs relatives à ce test.
- [8] FERIGNAC P. — Test de KOLMOGOROV-SMIRNOV. *Revue de Statistique Appliquée*. Vol. X, n° 4, p. 13 à 32.  
Ouvrage cité plus haut, à propos de MASSEY [2].

Table I. Test de KOLMOGOROV-SMIRNOV

#### MODE D'EMPLOI

*Données.*  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$  : série de  $n$  mesures, ordonnées  $x_{i-1} \leq x_i$  ;

$\alpha$  : risque de première espèce, admis ;

$F(x)$  : fonction de répartition, continue, de la loi hypothèse  $H$ .

*Objectif.* Décider s'il convient de rejeter l'hypothèse d'après laquelle la série de mesures appartiendrait à la loi  $H$ .

*Processus.* Opérer ainsi qu'il suit pour chaque valeur de  $i$  :

— dans la rubrique  $n$ , lire sur la ligne  $i$  la valeur de  $(i - 0,5)/n$ , et sur la ligne  $\alpha$ , la valeur de la différence  $d$  ;

N.B. : les valeurs indiquées sont à diviser par 1000.

— faire choix de l'une des variantes suivantes :

*Variante A.* déterminer  $F(x_i)$ , puis retenir comme valeurs critiques de  $(i - 0,5)/n$  les valeurs  $F(x_i) \pm d$ .

*Variante B.* déterminer  $F(x_i)$ , puis retenir comme valeurs critiques de  $F(x_i)$  les valeurs  $(i - 0,5)/n \pm d$ .

*Variante C.* retenir comme valeurs critiques de  $x_i$ , les quantités  $x'_i$  et  $x''_i$ , solutions de  $F(x) = (i - 0,5)/n \pm d$ .

*Décision.* Rejeter l'hypothèse, même si pour une seule valeur de  $i$ , il y a dépassement des valeurs critiques indiquées par la variante adoptée.

Table de  $(i - 0,5)/n$ , puis table de la différence  $d(\alpha, n)^*$ 

| i               | n = 4   | n = 5   | n = 6   | n = 7                                                                                                  | n = 8                                   | n = 9   | n = 10  |
|-----------------|---------|---------|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|---------|---------|
| n 1             | 875 125 | 900 100 | 917 83  | 929 71                                                                                                 | 938 62                                  | 945 55  | 950 50  |
| n-1 2           | 625 375 | 700 300 | 750 250 | 786 214                                                                                                | 812 188                                 | 833 167 | 850 150 |
| n-2 3           |         | 500     | 583 417 | 643 357                                                                                                | 687 313                                 | 722 278 | 750 250 |
| n-3 4           |         |         |         | 500                                                                                                    | 562 438                                 | 611 389 | 650 350 |
| n-4 5           |         |         |         |                                                                                                        |                                         | 500     | 550 450 |
| $\alpha = 0,01$ | 608     | 569     | 535     | 506                                                                                                    | 481                                     | 458     | 440     |
| $\alpha = 0,05$ | 499     | 465     | 438     | 415                                                                                                    | 395                                     | 376     | 360     |
| $\alpha = 0,10$ | 439     | 410     | 387     | 367                                                                                                    | 349                                     | 332     | 318     |
| $\alpha = 0,15$ | 400     | 374     | 353     | 334                                                                                                    | 319                                     | 304     | 292     |
| $\alpha = 0,20$ | 369     | 346     | 327     | 310                                                                                                    | 296                                     | 283     | 272     |
| i               | n = 11  | n = 12  | n = 13  | n = 14                                                                                                 | n = 15                                  | n = 16  | n = 17  |
| n 1             | 955 45  | 958 42  | 962 38  | 964 36                                                                                                 | 967 33                                  | 969 31  | 971 29  |
| n-1 2           | 864 136 | 875 125 | 885 115 | 893 107                                                                                                | 900 100                                 | 906 94  | 912 88  |
| n-2 3           | 773 227 | 792 208 | 808 192 | 821 179                                                                                                | 834 166                                 | 843 157 | 854 146 |
| n-3 4           | 682 318 | 709 291 | 731 269 | 750 250                                                                                                | 767 233                                 | 781 219 | 795 205 |
| n-4 5           | 591 409 | 625 375 | 654 346 | 678 322                                                                                                | 700 300                                 | 718 282 | 736 264 |
| n-5 6           | 500     | 542 458 | 577 423 | 607 393                                                                                                | 634 366                                 | 656 344 | 677 323 |
| n-6 7           |         |         | 500     | 531 469                                                                                                | 567 433                                 | 593 407 | 618 382 |
| n-7 8           |         |         |         |                                                                                                        | 500                                     | 531 469 | 559 441 |
| n-8 9           |         |         |         |                                                                                                        |                                         |         | 500     |
| $\alpha = 0,01$ | 423     | 408     | 395     | 382                                                                                                    | 371                                     | 361     | 352     |
| $\alpha = 0,05$ | 346     | 333     | 323     | 313                                                                                                    | 305                                     | 297     | 289     |
| $\alpha = 0,10$ | 307     | 296     | 287     | 278                                                                                                    | 271                                     | 264     | 257     |
| $\alpha = 0,15$ | 281     | 271     | 264     | 256                                                                                                    | 250                                     | 243     | 237     |
| $\alpha = 0,20$ | 262     | 253     | 246     | 238                                                                                                    | 233                                     | 227     | 221     |
| i               | n = 18  | n = 19  | n = 20  | n > 35                                                                                                 |                                         |         |         |
| n 1             | 972 28  | 974 26  | 975 25  | Valeurs de d :                                                                                         |                                         |         |         |
| n-1 2           | 917 83  | 922 78  | 925 75  |                                                                                                        |                                         |         |         |
| n-2 3           | 861 139 | 869 131 | 875 125 | $\alpha = 0,01$                                                                                        | $\frac{1,63}{\sqrt{n}} - \frac{0,5}{n}$ | soit    | 339     |
| n-3 4           | 806 194 | 816 184 | 825 175 | $\alpha = 0,05$                                                                                        | $\frac{1,36}{\sqrt{n}} - \frac{0,5}{n}$ | pour    | 279     |
| n-4 5           | 750 250 | 764 236 | 775 225 | $\alpha = 0,10$                                                                                        | $\frac{1,22}{\sqrt{n}} - \frac{0,5}{n}$ | n = 20  | 248     |
| n-5 6           | 695 305 | 711 289 | 725 275 | $\alpha = 0,15$                                                                                        | $\frac{1,14}{\sqrt{n}} - \frac{0,5}{n}$ |         | 227     |
| n-6 7           | 639 361 | 658 342 | 675 325 | $\alpha = 0,20$                                                                                        | $\frac{1,07}{\sqrt{n}} - \frac{0,5}{n}$ |         | 214     |
| n-7 8           | 584 416 | 606 394 | 625 375 | 20 < n < 36                                                                                            |                                         |         |         |
| n-8 9           | 528 472 | 553 447 | 575 425 |                                                                                                        |                                         |         |         |
| n-9 10          |         | 500     | 525 475 | Appliquer les formules approximatives ci-dessus, puis réduire la valeur trouvée d'environ 0,5 (36 - n) |                                         |         |         |
| $\alpha = 0,01$ | 343     | 337     | 331     |                                                                                                        |                                         |         |         |
| $\alpha = 0,05$ | 281     | 275     | 269     |                                                                                                        |                                         |         |         |
| $\alpha = 0,10$ | 250     | 246     | 239     |                                                                                                        |                                         |         |         |
| $\alpha = 0,15$ | 231     | 226     | 221     |                                                                                                        |                                         |         |         |
| $\alpha = 0,20$ | 216     | 211     | 206     |                                                                                                        |                                         |         |         |

\*  $d = D - 0,5/n$ , avec pour D les valeurs lues sur la table de MASSEY [2].



Table II. Tests en cas de loi H normale

MODE D'EMPLOI

*Données.*  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$  : série de  $n$  mesures, ordonnées  $x_{i-1} \leq x_i$  ;

$\alpha$  : risque de première espèce, admis :

*Objectif.* Décider s'il convient de rejeter l'hypothèse d'après laquelle la série de mesures appartiendrait à une certaine loi normale.

*Processus.* Opérer ainsi qu'il suit pour chaque valeur de  $i$  :

a) Cas où la loi hypothèse est une loi normale entièrement déterminée ( $m$  et  $\sigma$  spécifiés), et où par suite il y a lieu d'appliquer le test de KOLMOGOROV-SMIRNOV.

– dans la rubrique  $n$ , lire sur la ligne  $i$  les  $u'_i$  et  $u''_i$  des colonnes  $K$  intéressées :

– retenir comme valeurs critiques de  $x_i$  :

si  $i > 0,5 n$   $m + u'_i \sigma$  et  $m + u''_i \sigma$  ;

si  $i \leq 0,5 n$   $m - u'_i \sigma$  et  $m - u''_i \sigma$ .

b) Cas où la loi normale, hypothèse, n'est pas déterminée ( $m$  et  $\sigma$  non spécifiés), et où par suite il est justifié d'appliquer le test de LILLIEFORS :

– calculer les quantités  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$  et  $s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2/(n-1)$ ,

– dans la rubrique  $n$ , lire sur la ligne  $i$  les  $v'_i$  et  $v''_i$  des colonnes  $L$  intéressées ;

– retenir comme valeurs critiques de  $x_i$  :

si  $i > 0,5 n$   $\bar{x} + v'_i \cdot s$  et  $\bar{x} + v''_i \cdot s$

si  $i \leq 0,5 n$   $\bar{x} - v'_i \cdot s$  et  $\bar{x} - v''_i \cdot s$ .

N.B. – Les valeurs indiquées pour les  $u$  et les  $v$ , sont à diviser par 1000.

*Décision.* Rejeter l'hypothèse, même si pour une seule valeur de  $i$ , il y a dépassement des valeurs critiques.

Table donnant :

– Colonnes  $K$  :  $u'_i$  et  $u''_i$  (test de KOLMOGOROV-SMIRNOV),

– Colonnes  $L$  :  $v'_i$  et  $v''_i$  (test de KOLMOGOROV-LILLIEFORS),

– Dernière colonne :  $u_i$  pour  $i > 0,5 n$  (2° du n° 8a)

(Pour  $i \leq 0,5 n$ , changer le signe de  $u_i$ )

Table II

| n | i | $\alpha = 0,01$<br>K 1 | $= 0,05$<br>K 5 | $= 0,20$<br>K 20 | $= 0,01$<br>K 1 | $= 0,05$<br>K 5 | $= 0,20$<br>K 20 | $\alpha = 0,01$<br>L 1 | $= 0,05$<br>L 5 | $= 0,20$<br>L 20 | $= 0,01$<br>L 1 | $= 0,05$<br>L 5 | $= 0,20$<br>L 20 | $u_i$ |
|---|---|------------------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|------------------|-------|
| 4 | 1 | - 622                  | - 316           | 15               | "               | "               | "                | 210                    | 303             | 524              | "               | "               | "                | 1150  |
| 3 | 2 | - 2120                 | - 1146          | - 656            | "               | "               | 2512             | - 432                  | - 334           | - 126            | 842             | 1180            | 1385             | 319   |
| 5 | 1 | - 437                  | - 164           | 136              | "               | "               | "                | 240                    | 421             | 568              | "               | "               | "                | 1282  |
| 4 | 2 | - 1122                 | - 722           | - 374            | "               | "               | "                | - 266                  | - 93            | 38               | 1200            | 1530            | "                | 524   |
| 3 | 3 | "                      | - 1812          | - 1019           | "               | 1812            | 1019             | - 860                  | - 634           | - 482            | 482             | 634             | 860              | 0     |
| 6 | 1 | - 300                  | - 53            | 228              | "               | "               | "                | 348                    | 470             | 628              | "               | "               | "                | 1385  |
| 5 | 2 | - 789                  | - 490           | - 194            | "               | "               | "                | - 78                   | 35              | 171              | 1491            | 2197            | "                | 674   |
| 4 | 3 | - 1665                 | - 1058          | - 656            | "               | "               | 1341             | - 519                  | - 393           | - 251            | 722             | 912             | 1098             | 210   |
| 7 | 1 | - 194                  | 35              | 303              | "               | "               | "                | 391                    | 524             | 684              | "               | "               | "                | 1468  |
| 6 | 2 | - 583                  | - 329           | - 60             | "               | "               | "                | 23                     | 143             | 279              | 1774            | "               | "                | 793   |
| 5 | 3 | - 1094                 | - 745           | - 432            | "               | "               | 1675             | - 342                  | - 217           | - 83             | 912             | 1136            | 1405             | 366   |
| 4 | 4 | "                      | - 1372          | - 878            | "               | 1372            | 878              | - 762                  | - 610           | - 456            | 456             | 610             | 762              | 0     |
| 8 | 1 | - 108                  | 108             | 364              | "               | "               | "                | 437                    | 568             | 729              | "               | "               | "                | 1538  |
| 7 | 2 | - 437                  | - 210           | 40               | "               | "               | "                | 108                    | 225             | 361              | 2120            | "               | "                | 885   |
| 6 | 3 | - 820                  | - 548           | - 277            | "               | "               | 2120             | - 207                  | - 90            | 40               | 1071            | 1341            | 1706             | 487   |
| 5 | 4 | - 1398                 | - 966           | - 625            | "               | 1717            | 1071             | - 545                  | - 415           | - 277            | 622             | 789             | 958              | 156   |
| 9 | 1 | - 33                   | 174             | 418              | "               | "               | "                | 496                    | 613             | 766              | "               | "               | "                | 1598  |
| 8 | 2 | - 319                  | - 108           | 126              | "               | "               | "                | 197                    | 300             | 429              | "               | "               | "                | 966   |
| 7 | 3 | - 631                  | - 396           | - 154            | "               | "               | "                | - 83                   | 17              | 138              | 1221            | 1530            | 1995             | 589   |
| 6 | 4 | - 1024                 | - 722           | - 445            | "               | 2226            | 1248             | - 369                  | - 264           | - 141            | 766             | 938             | 1108             | 282   |
| 5 | 5 | - 1728                 | - 1155          | - 782            | "               | 1155            | 782              | - 690                  | - 568           | - 432            | 432             | 568             | 690              | 0     |

| n  | i | $\alpha = 0,01$ |       |      | $= 0,05$ |     |     | $= 0,20$ |     |     | $\alpha = 0,01$ |      |      | $= 0,05$ |     |      | $= 0,20$ |     |      | $\alpha = 0,01$ |     |      | $= 0,05$ |     |      | $= 0,20$ |     |      | $u_i$ |
|----|---|-----------------|-------|------|----------|-----|-----|----------|-----|-----|-----------------|------|------|----------|-----|------|----------|-----|------|-----------------|-----|------|----------|-----|------|----------|-----|------|-------|
|    |   | K 1             | K 5   | K 20 | K 20     | K 5 | K 1 | K 20     | K 5 | K 1 | L 1             | L 5  | L 20 | L 1      | L 5 | L 20 | L 1      | L 5 | L 20 | L 1             | L 5 | L 20 | L 1      | L 5 | L 20 | L 1      | L 5 | L 20 |       |
| 10 | 1 | 25              | 228   | 462  |          |     |     |          |     |     | 542             | 650  | 789  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 1645  |
| 9  | 2 | -228            | -25   | 197  |          |     |     |          |     |     | 269             | 364  | 482  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 1036  |
| 8  | 3 | -496            | -279  | -55  |          |     |     |          |     |     | 15              | 106  | 215  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 674   |
| 7  | 4 | -806            | -553  | -311 |          |     |     |          |     |     | -238            | -146 | -38  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 385   |
| 6  | 5 | -1226           | -878  | -589 |          |     |     |          |     |     | -507            | -407 | -292 |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 126   |
| 11 | 1 | 80              | 277   | 504  |          |     |     |          |     |     | 571             | 678  | 820  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 1695  |
| 10 | 2 | -148            | 45    | 258  |          |     |     |          |     |     | 319             | 412  | 533  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 1098  |
| 9  | 3 | -385            | -184  | 28   |          |     |     |          |     |     | 85              | 174  | 284  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 749   |
| 8  | 4 | -646            | -423  | -202 |          |     |     |          |     |     | -143            | -55  | 53   |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 473   |
| 7  | 5 | -962            | -690  | -443 |          |     |     |          |     |     | -380            | -287 | -176 |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 230   |
| 6  | 6 | -1426           | -1019 | -713 |          |     |     |          |     |     | -640            | -536 | -415 |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 0     |
| 12 | 1 | 126             | 319   | 539  |          |     |     |          |     |     | 598             | 700  | 845  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 1728  |
| 11 | 2 | -83             | 106   | 311  |          |     |     |          |     |     | 364             | 454  | 577  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 1150  |
| 10 | 3 | -295            | -103  | 98   |          |     |     |          |     |     | 148             | 233  | 345  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 813   |
| 9  | 4 | -522            | -316  | -110 |          |     |     |          |     |     | -60             | 23   | 131  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 550   |
| 8  | 5 | -782            | -548  | -327 |          |     |     |          |     |     | -274            | -189 | -80  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 319   |
| 7  | 6 | -1108           | -810  | -556 |          |     |     |          |     |     | -499            | -407 | -292 |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 106   |
| 13 | 1 | 169             | 356   | 571  |          |     |     |          |     |     | 619             | 726  | 878  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 1774  |
| 12 | 2 | -25             | 156   | 356  |          |     |     |          |     |     | 399             | 493  | 622  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 1200  |
| 11 | 3 | -220            | -38   | 156  |          |     |     |          |     |     | 197             | 284  | 402  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 870   |
| 10 | 4 | -423            | -233  | -38  |          |     |     |          |     |     | 2               | 88   | 199  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 616   |
| 9  | 5 | -646            | -437  | -233 |          |     |     |          |     |     | -192            | -106 | 5    |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 396   |
| 8  | 6 | -908            | -662  | -437 |          |     |     |          |     |     | -393            | -303 | -189 |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 194   |
| 7  | 7 | -1254           | -927  | -662 |          |     |     |          |     |     | -613            | -513 | -391 |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 0     |
| 14 | 1 | 207             | 388   | 601  |          |     |     |          |     |     | 640             | 749  | 904  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 1799  |
| 13 | 2 | 28              | 202   | 399  |          |     |     |          |     |     | 434             | 530  | 662  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 1243  |
| 12 | 3 | -154            | 20    | 210  |          |     |     |          |     |     | 243             | 332  | 451  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 919   |
| 11 | 3 | -337            | -159  | 30   |          |     |     |          |     |     | 63              | 148  | 261  |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 674   |
| 10 | 5 | -536            | -345  | -151 |          |     |     |          |     |     | -118            | -33  | 78   |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 462   |
| 9  | 6 | -755            | -542  | -334 |          |     |     |          |     |     | -300            | -212 | -100 |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 272   |
| 8  | 7 | -1019           | -762  | -530 |          |     |     |          |     |     | -493            | -399 | -282 |          |     |      |          |     |      |                 |     |      |          |     |      |          |     |      | 90    |

|    |   |       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----|---|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 15 | 1 | 243   | 418  | 625  | "    | "    | "    | 653  | 772  | 927  | "    | "    | "    | 1838 |
| 14 | 2 | 73    | 240  | 432  | "    | "    | "    | 456  | 562  | 694  | "    | "    | "    | 1282 |
| 13 | 3 | -93   | 73   | 256  | "    | "    | "    | 279  | 377  | 496  | 2014 | "    | "    | 970  |
| 12 | 4 | -264  | -95  | 85   | "    | "    | "    | 108  | 202  | 313  | 1347 | 1685 | 2366 | 729  |
| 11 | 5 | -443  | -266 | -83  | 1498 | "    | "    | -60  | 33   | 141  | 1011 | 1211 | 1432 | 524  |
| 10 | 6 | -634  | -443 | -251 | 1112 | 1546 | "    | -228 | -133 | -25  | 766  | 919  | 1071 | 342  |
| 9  | 7 | -856  | -637 | -429 | 842  | 1136 | 1538 | -404 | -305 | -194 | 556  | 687  | 810  | 169  |
| 8  | - | -1131 | -860 | -622 | 622  | 860  | 1131 | -595 | -487 | -369 | 369  | 487  | 595  | 0    |
| 16 | 1 | 274   | 445  | 650  | "    | "    | "    | 674  | 796  | 942  | "    | "    | "    | 1866 |
| 15 | 2 | 113   | 277  | 465  | "    | "    | "    | 487  | 595  | 719  | "    | "    | "    | 1316 |
| 14 | 3 | -45   | 116  | 295  | "    | "    | "    | 316  | 415  | 527  | 2170 | "    | "    | 1007 |
| 13 | 4 | -202  | -40  | 136  | "    | "    | "    | 156  | 251  | 356  | 1426 | 1787 | 3090 | 776  |
| 12 | 5 | -366  | -199 | -23  | 1598 | "    | "    | -2   | 90   | 192  | 1080 | 1282 | 1530 | 577  |
| 11 | 6 | -539  | -361 | -179 | 1190 | 1675 | "    | -159 | -65  | 35   | 834  | 986  | 1150 | 402  |
| 10 | 7 | -732  | -536 | -342 | 915  | 1226 | 1685 | -321 | -225 | -123 | 628  | 755  | 885  | 235  |
| 9  | 8 | -954  | -726 | -513 | 700  | 946  | 1237 | -490 | -388 | -282 | 448  | 562  | 674  | 78   |
| 17 | 1 | 303   | 473  | 674  | "    | "    | "    | 690  | 820  | 958  | "    | "    | "    | 1896 |
| 16 | 2 | 151   | 313  | 499  | "    | "    | "    | 513  | 628  | 745  | "    | "    | "    | 1353 |
| 15 | 3 | 5     | 164  | 340  | "    | "    | "    | 353  | 459  | 565  | 2512 | "    | "    | 1054 |
| 14 | 4 | -143  | 15   | 187  | "    | "    | "    | 199  | 300  | 399  | 1514 | 1911 | "    | 824  |
| 13 | 5 | -295  | -133 | 38   | 1717 | "    | "    | 50   | 148  | 243  | 1155 | 1360 | 1665 | 628  |
| 12 | 6 | -454  | -284 | -110 | 1270 | 1825 | "    | -98  | 0    | 93   | 900  | 1054 | 1243 | 459  |
| 11 | 7 | -625  | -443 | -261 | 990  | 1322 | 1881 | -248 | -148 | -55  | 700  | 824  | 970  | 300  |
| 10 | 8 | -817  | -613 | -418 | 772  | 1028 | 1347 | -404 | -300 | 204  | 522  | 631  | 755  | 148  |
| 9  | - | -1045 | -803 | -586 | 586  | 803  | 1045 | -571 | -459 | -358 | 358  | 459  | 571  | 0    |
| 18 | 1 | 329   | 499  | 694  | "    | "    | "    | 710  | 842  | 970  | "    | "    | "    | 1911 |
| 17 | 2 | 187   | 348  | 527  | "    | "    | "    | 542  | 659  | 769  | "    | "    | "    | 1385 |
| 16 | 3 | 45    | 202  | 372  | "    | "    | "    | 385  | 493  | 592  | 3090 | "    | "    | 1085 |
| 15 | 4 | -93   | 63   | 228  | "    | "    | "    | 240  | 342  | 434  | 1589 | 2014 | "    | 863  |
| 14 | 5 | -235  | -78  | 85   | 1825 | "    | "    | 98   | 197  | 284  | 1216 | 1419 | 1762 | 674  |
| 13 | 6 | -380  | -217 | -53  | 1347 | 1977 | "    | -40  | 58   | 143  | 966  | 1112 | 1316 | 510  |
| 12 | 7 | -536  | -364 | -194 | 1058 | 1405 | 2097 | -182 | -83  | 2    | 762  | 882  | 1036 | 356  |
| 11 | 8 | -703  | -516 | -337 | 842  | 1103 | 1454 | -324 | -222 | -136 | 589  | 694  | 824  | 212  |
| 10 | 9 | -896  | -684 | -490 | 656  | 874  | 1131 | -476 | -369 | -279 | 429  | 524  | 640  | 70   |

| n  | i  | $\alpha = 0,01$ |      |      | $\alpha = 0,05$ |     |     | $\alpha = 0,20$ |     |     | $\alpha = 0,01$ |      |      | $\alpha = 0,05$ |     |     | $\alpha = 0,20$ |     |     | $\alpha = 0,01$ |     |     | $\alpha = 0,05$ |     |     | $\alpha = 0,20$ |     |     | $u_i$ |
|----|----|-----------------|------|------|-----------------|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----------------|------|------|-----------------|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----------------|-----|-----|-----------------|-----|-----|-------|
|    |    | K 1             | K 5  | K 20 | K 20            | K 5 | K 1 | K 20            | K 5 | K 1 | L 1             | L 5  | L 20 | L 20            | L 5 | L 1 | L 20            | L 5 | L 1 | L 20            | L 5 | L 1 | L 20            | L 5 | L 1 | L 20            | L 5 | L 1 | $u_i$ |
| 19 | 1  | 350             | 522  | 716  |                 |     |     |                 |     |     | 722             | 860  | 982  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 1943  |
| 18 | 2  | 215             | 377  | 556  |                 |     |     |                 |     |     | 562             | 684  | 789  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 1419  |
| 17 | 3  | 80              | 238  | 407  |                 |     |     |                 |     |     | 412             | 524  | 619  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 1217  |
| 16 | 4  | -53             | 103  | 266  |                 |     |     |                 |     |     | 272             | 377  | 465  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 900   |
| 15 | 5  | -184            | -28  | 133  |                 |     |     |                 |     |     | 138             | 240  | 324  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 719   |
| 14 | 6  | -321            | -161 | 0    |                 |     |     |                 |     |     | 5               | 106  | 187  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 556   |
| 13 | 7  | -465            | -298 | -133 |                 |     |     |                 |     |     | -128            | -28  | 53   |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 407   |
| 12 | 8  | -616            | -437 | -266 |                 |     |     |                 |     |     | -261            | -159 | -78  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 269   |
| 11 | 9  | -786            | -589 | -407 |                 |     |     |                 |     |     | -402            | -295 | -212 |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 133   |
| 10 | 8  | -982            | -755 | -556 |                 |     |     |                 |     |     | -550            | -437 | -350 |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 0     |
| 20 | 1  | 369             | 542  | 736  |                 |     |     |                 |     |     | 736             | 878  | 994  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 1960  |
| 19 | 2  | 238             | 402  | 580  |                 |     |     |                 |     |     | 580             | 706  | 806  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 1440  |
| 18 | 3  | 110             | 269  | 437  |                 |     |     |                 |     |     | 437             | 553  | 643  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 1150  |
| 17 | 4  | -15             | 141  | 303  |                 |     |     |                 |     |     | 303             | 412  | 496  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 935   |
| 16 | 5  | -141            | 15   | 174  |                 |     |     |                 |     |     | 174             | 279  | 358  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 755   |
| 15 | 6  | -269            | -110 | 48   |                 |     |     |                 |     |     | 48              | 151  | 228  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 598   |
| 14 | 7  | -402            | -238 | -78  |                 |     |     |                 |     |     | -78             | 25   | 100  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 454   |
| 13 | 8  | -542            | -369 | -204 |                 |     |     |                 |     |     | -204            | -100 | -25  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 319   |
| 12 | 9  | -694            | -507 | -334 |                 |     |     |                 |     |     | -334            | -228 | -151 |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 189   |
| 11 | 10 | -863            | -656 | -470 |                 |     |     |                 |     |     | -470            | -358 | -279 |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 63    |
| 25 | 1  | 468             | 613  | 806  |                 |     |     |                 |     |     | 831             | 915  | 1041 |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 2054  |
| 24 | 2  | 358             | 496  | 674  |                 |     |     |                 |     |     | 697             | 772  | 882  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 1555  |
| 23 | 3  | 253             | 385  | 553  |                 |     |     |                 |     |     | 574             | 643  | 742  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 1282  |
| 22 | 4  | 151             | 279  | 440  |                 |     |     |                 |     |     | 459             | 524  | 616  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 1080  |
| 21 | 5  | 50              | 176  | 332  |                 |     |     |                 |     |     | 350             | 412  | 499  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 915   |
| 20 | 6  | -50             | 75   | 228  |                 |     |     |                 |     |     | 246             | 306  | 388  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 772   |
| 19 | 7  | -151            | -25  | 126  |                 |     |     |                 |     |     | 143             | 202  | 282  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 643   |
| 18 | 8  | -253            | -126 | 25   |                 |     |     |                 |     |     | 43              | 100  | 179  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 524   |
| 17 | 9  | -358            | -228 | -75  |                 |     |     |                 |     |     | -56             | 0    | 78   |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 412   |
| 16 | 10 | -468            | -332 | -176 |                 |     |     |                 |     |     | -159            | -100 | -23  |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 306   |
| 15 | 11 | -583            | -440 | -279 |                 |     |     |                 |     |     | -261            | -202 | -123 |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 202   |
| 14 | 12 | -706            | -553 | -385 |                 |     |     |                 |     |     | -366            | -306 | -225 |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 100   |
| 13 |    | -842            | -674 | -496 |                 |     |     |                 |     |     | -476            | -412 | -329 |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     |                 |     |     | 0     |

|    |    |       |        |       |         |      |       |        |       |         |      |       |
|----|----|-------|--------|-------|---------|------|-------|--------|-------|---------|------|-------|
| 30 | 1  | 553   | 706    | 915   | "       | "    | 889   | 990    | 1122  | "       | "    | 2120  |
| 29 | 2  | 459   | 604    | 796   | "       | "    | 772   | 863    | 978   | "       | "    | 1645  |
| 28 | 3  | 369   | 507    | 687   | "       | "    | 665   | 749    | 852   | "       | "    | 1385  |
| 27 | 4  | 279   | 412    | 583   | "       | "    | 562   | 640    | 736   | 2748    | "    | 1190  |
| 26 | 5  | 194   | 324    | 487   | "       | "    | 468   | 542    | 631   | 1799    | 2512 | 1036  |
| 25 | 6  | 110   | 238    | 396   | 2054    | "    | 377   | 448    | 533   | 1483    | 1762 | 2226  |
| 24 | 7  | 25    | 151    | 306   | 1607    | "    | 287   | 356    | 437   | 1265    | 1454 | 1675  |
| 23 | 8  | - 58  | 68     | 220   | 1360    | 1927 | 202   | 269    | 348   | 1098    | 1248 | 1405  |
| 22 | 9  | - 141 | - 15   | 136   | 1175    | 1555 | 118   | 184    | 261   | 958     | 1085 | 1211  |
| 21 | 10 | - 228 | - 100  | 50    | 1019    | 1316 | 33    | 98     | 174   | 831     | 942  | 1049  |
| 20 | 11 | - 313 | - 184  | - 33  | 889     | 1141 | - 50  | 15     | 90    | 719     | 820  | 915   |
| 19 | 12 | - 402 | - 269  | - 116 | 772     | 994  | - 133 | - 68   | 8     | 616     | 710  | 796   |
| 18 | 13 | - 496 | - 358  | - 202 | 662     | 863  | - 222 | - 154  | - 78  | 516     | 604  | 684   |
| 17 | 14 | - 592 | - 448  | - 287 | 562     | 749  | - 306 | - 238  | - 161 | 423     | 507  | 583   |
| 16 | 15 | - 694 | - 542  | - 374 | 468     | 643  | - 393 | - 324  | - 246 | 334     | 415  | 487   |
|    |    |       | $u'_i$ |       | $u''_i$ |      |       | $v'_i$ |       | $v''_i$ |      | $u_i$ |

Justification : Les valeurs de la table ci-dessus ont été lues sur une table de la fonction de répartition F(u) de la variable normale réduite :

- Cas des u des colonnes K     $F(u) = (i - 0,5)/n \mp (D - 0,5/n)$ , avec pour D les valeurs lues sur la table de MASSEY [2],
- Cas des v des colonnes L     $F(v) = (i - 0,5)/n \mp (D_L - 0,5/n)$ , avec pour  $D_L$  les valeurs lues sur la table de LILLIEFORS [3],
- Cas des u de la dernière colonne     $F(u) = (i - 0,5)/n$  pour  $i > 0,5 n$ .