

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

G. SCIAMA

J. C. MARGERIE

Classification et sélection d'un produit d'après une succession de deux critères de qualités corrélés

Revue de statistique appliquée, tome 24, n° 1 (1976), p. 25-37

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1976__24_1_25_0

© Société française de statistique, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CLASSIFICATION ET SÉLECTION D'UN PRODUIT D'APRÈS UNE SUCCESSION DE DEUX CRITÈRES DE QUALITÉS CORRÉLÉS ⁽¹⁾

G. SCIAMA et J.C. MARGERIE

Centre technique des Industries de la Fonderie

Quand, en vue de normaliser un certain produit, on assigne simultanément des limites à plusieurs caractéristiques généralement corrélées, on est amené tout naturellement à considérer l'une d'entre elles comme critère de classement définissant la qualité à titre principal, les autres ne servant qu'à vérifier subsidiairement l'absence d'anomalies dommageables au regard de l'utilisation prévue. Par exemple, dans les normes françaises, les diverses catégories de fontes sont classées en qualités échelonnées suivant leur résistance à la traction, tandis qu'on indique en outre des valeurs minimales pour la limite d'élasticité et, le cas échéant, l'allongement de rupture de chaque classe ainsi qu'une fourchette de dureté.

Il est bien évident que l'on s'impose ainsi des contraintes supplémentaires, qui, si l'on n'y prend garde peuvent :

- ou bien rendre inopérante la spécification imposée sur la caractéristique "principale" (incompatibilité des spécifications),
- ou être au contraire trop contraignantes, en conduisant, sur la base du respect des spécifications d'une caractéristique "secondaire", à un déchet global ou du moins à un déclassement injustifié.

La spécification sur la caractéristique principale étant fixée, le problème qui se pose est de choisir une spécification secondaire, qui, proposée au titre de protection complémentaire, ne puisse pas conduire à une augmentation du risque de rejet trop importante.

Pratiquement, la question se présente de la manière suivante.

On impose à une première caractéristique de classement, x , considérée comme primordiale, d'être comprise entre deux limites x_0 et x_1 (ou supérieure à x_1 , ou inférieure à x_1). Le fabricant va donc s'efforcer, tout d'abord, de satisfaire à cette première spécification.

Mais l'on voudrait en outre qu'à l'intérieur de ces limites, une deuxième caractéristique y , moins importante, reste aussi comprise entre deux limites y_0 et y_1 (ou supérieure à y_0 , ou inférieure à y_1). Quel sera alors le pourcentage de rejet supplémentaire dû à la spécification sur y ?

En termes de probabilités conditionnelles, on est donc amené à déterminer la probabilité d'acceptation :

(1) Article remis en janvier 1975, révisé en juin 1975.

$$P = \Pr (y_0 < y < y_1 / x_0 < x < x_1)$$

ou la probabilité complémentaire de rejet $P' = 1 - P$.

La solution est évidente dans le cas où les caractéristiques x et y sont indépendantes. Le pourcentage de rejet supplémentaire dû à la spécification y est :

$$P' = 1 - \Pr (y_0 < y < y_1)$$

Dans le cas, fréquent en pratique, où les variables sont normales, et linéairement corrélées entre elles, la solution, théoriquement très simple, ne peut être que numérique, comme on va le voir à partir de l'exemple suivant.

I – PRESENTATION DE L'EXEMPLE

Cet exemple concret – qui a été rencontré par l'un des auteurs – concerne les fontes à “graphite sphéroïdal” dont la norme internationale est actuellement en cours de révision.

Selon le projet à l'étude, les fontes de cette catégorie sont classées en cinq qualités suivant que leur résistance à la traction est supérieure à 40-50-60-70 ou 80 daN/mm².

A chaque classe de résistance on convient d'associer un intervalle indicatif pour la dureté, un minimum pour l'allongement, et un minimum pour la limite d'élasticité à 0,2 %.

Le critère de classement principal étant la résistance à la traction, les autres critères sont la dureté, l'allongement et la limite d'élasticité à 0,2 %⁽¹⁾.

La fixation des limites de classe des deux premiers de ces critères ne pose guère de problèmes : les limites de dureté sont simplement indicatives, le minimum d'allongement contribue directement à définir le niveau de qualité et l'accord s'est fait sans trop de difficulté. Par contre les valeurs des limites d'élasticité des fontes étant d'une part légèrement dispersées, d'autre part fortement liées aux valeurs de résistance en traction, la fixation du minimum de limite d'élasticité se heurte à des difficultés, les différents experts proposant des valeurs minimales discordantes.

Nous allons donc porter notre attention dans la suite, sur la sélection à double critère représentée par la résistance à la traction (critère principal) et la limite d'élasticité (critère secondaire), et nous allons nous proposer de montrer comment, d'après un échantillonnage de résultats expérimentaux, on peut établir un modèle d'analyse qui permette d'apprécier le risque de rejet d'un lot conforme en résistance à la traction, en fonction du seuil minimal choisi pour la limite d'élasticité. Cela doit évidemment permettre de fixer ce seuil de manière objective, et uniforme. L'échantillon expérimental dont nous disposons est constitué des résultats des caractéristiques de 47 éprouvettes témoins provenant de sept fonderies françaises (*tableau I*). Les résultats ont été classés d'après la résistance à la traction R_t (allongement et dureté étant conformes).

(1) Il est à noter que dans le cas de l'acier c'est la limite d'élasticité qui est considérée comme critère de classement principal.

Tableau 1

Classe	Numéro	R _t daN/mm ²	E ₀₂ daN/mm ²
70-2 ou 80-2	1	79,5	52,1
	2	80,4	49,5
	3	76,5	50,5
	4	71,5	42,4
	5	94,8	61,8
	6	99,3	64,4
	7	71	46,8
	8	76,4	45,9
	9	78,4	47,2
	10	84	50,8
	11	83,9	51,1
	12	75,4	50
	13	78,5	54
	14	82,6	52,1
	15	82,5	52,4
	16	69,8	46,8
	17	87,5	52,1
	18	88,4	52,7
	19	81	52,4
	20	79,8	51,9
60-2	21	64,1	42,7
	22	66,2	40,1
	23	66,4	40,4
	24	67,2	44,9
	25	69,6	45,9
	26	63,8	43,3
	27	64,3	45,2
	28	67,9	44,7
	29	61,1	44,6
	30	66,7	39,9
	31	68,5	41
	32	66,2	36,5
	33	68,8	46,8
	34	62	38,5
50-7	35	60,3	39
	36	57,4	37,8
	37	50,3	33,4
	38	57,7	35,5
	39	57,8	35,8
	40	55,3	39,4
	41	51,5	35,2
	42	50,3	35
	43	53,7	35,8
	44	53,4	35,6
	45	51,8	28,7
	46	50,3	37,6
	47	50,8	37,5

On constate qu'il existe une corrélation très significative ($P = 0,939$) entre la résistance à la traction R_t et la limite d'élasticité $E_{0,2}$ (figure 1).

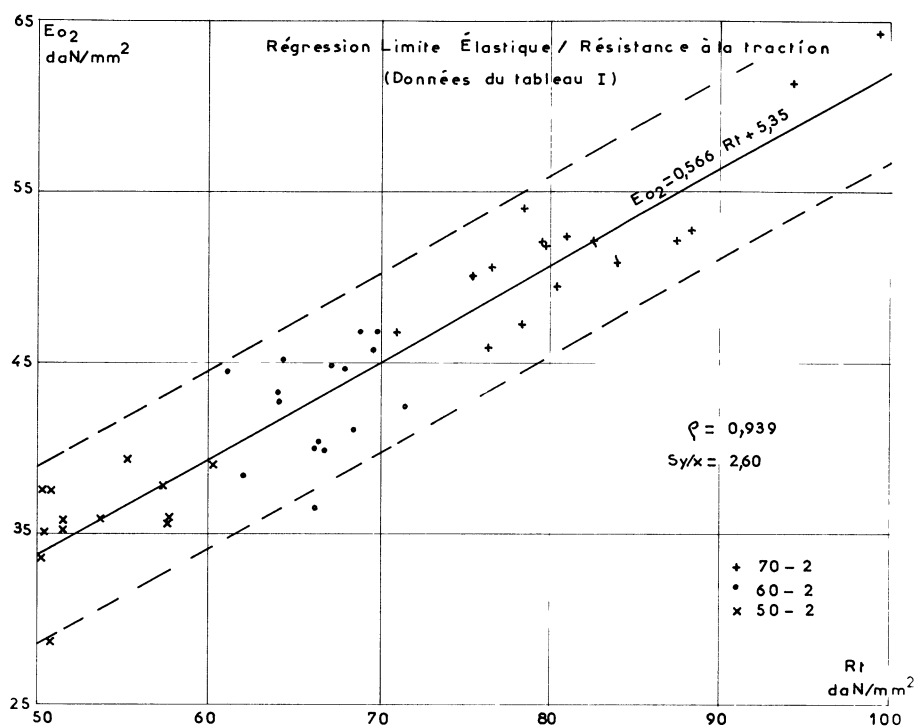


Figure 1 — Régressions limite élastique/Résistance à la traction (données du tableau I)

II — SOLUTION DANS LE CAS DE DEUX VARIABLES NORMALES CORRELEES.

x et y étant deux variables linéairement corrélées entre elles avec un coefficient de corrélation ρ , on cherche donc la probabilité liée :

$$P_{y/x} = \Pr (y_0 < y < y_1 / x_0 < x < x_1)$$

probabilité pour que y (caractéristique secondaire) soit compris entre deux limites, sachant que x (caractéristique principale) est déjà fixé dans une fourchette imposée. x_1 et y_1 peuvent tous deux tendre vers l'infini.

On sait que :

$$P_{y/x} = \frac{P_r(x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1)}{P_r(x_0 < x < x_1)}$$

Dans le cas où x et y sont deux variables normales :

$$x = \eta(\mu_x, \sigma_x)$$

$$y = \eta(\mu_y, \sigma_y)$$

on a, en posant :

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \\ X_1 &= \frac{x_1 - \mu_x}{\sigma_x} \\ Y &= \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \\ Y_1 &= \frac{y_1 - \mu_y}{\sigma_y} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$P_{y/x} = P_{Y/X} = \frac{\int_{x_0}^{x_1} dX \int_{Y_0}^{Y_1} f(X, Y) dY}{\pi(X_1) - \pi(X_0)}$$

π étant la fonction intégrale de la loi normale.

D'après les propriétés de la loi normale à deux variables :

$$\begin{aligned} f(X, Y) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(X^2 - 2\rho XY + Y^2)}{1-\rho^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y-\rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2} \end{aligned}$$

et :

$$P_{y/x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{x_1} e^{-\frac{X^2}{2}} \left[\pi\left(\frac{Y_1 - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - \pi\left(\frac{Y_0 - \rho X}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \right] dX}{\pi(X_1) - \pi(X_0)}$$

Les deux termes de la fraction (3) peuvent être calculés numériquement si l'on connaît X_0 X_1 Y_0 Y_1 c'est-à-dire les bornes x_0 x_1 y_0 y_1 des deux variables, ainsi que les moyennes et écarts-types, et le coefficient de corrélation ρ .

Le calcul de $P_r(y > y_0 / x > x_0)$, qui constitue une variante du même problème, se traite numériquement de la même manière que (3) en choisissant simplement des valeurs arbitrairement grandes pour x_1 et y_1 .

III – APPLICATIONS A L'EXEMPLE CI-DESSUS.

Nous avons effectué un calcul-type en utilisant l'ensemble des données de l'exemple précédent, fournies au tableau I.

On commence par calculer :

$$\mu_x = \bar{R} = 69,04 \text{ daN/mm}^2$$

$$\sigma_x = \bar{E} = 44,42 \quad "$$

$$\mu_y = \bar{E} = 44,42 \quad "$$

$$\sigma_y = \sigma_E = 7,58 \quad "$$

On a également $\rho = 0,939$

Pour les besoins du calcul, nous avons admis que les distributions de x et y étaient normales (En réalité des tests de χ^2 montrent que ce n'est pas tout à fait vrai et cela ne nous surprend pas, s'agissant de données réparties en fait en trois groupes (70-2), (60-2) et (50-7) de résistances à la traction peu supérieures respectivement à 70, 60 et 50 daN/mm²).

1/ Spécifications du type $y_0 < y < y_1 / x_0 < x < x_1$.

Proposons-nous tout d'abord de calculer la probabilité d'acceptation P à laquelle on peut s'attendre, sur une population d'éprouvettes de fonte dont la résistance à la traction est comprise entre 50 et 60 daN/mm², si l'on s'impose la spécification complémentaire d'une limite d'élasticité E comprise entre 30 et 40 daN/mm².

$$P = \Pr (30 < E < 40 / 50 < R < 60)$$

On calcule :

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{60 - 69,04}{12,58} = -0,72 \\ X_0 &= \frac{50 - 69,04}{12,58} = -1,51 \\ Y_1 &= \frac{40 - 44,42}{7,58} = -0,58 \\ Y_0 &= \frac{30 - 44,42}{7,58} = -1,90 \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

Pour calculer l'intégrale au numérateur de (3) on dresse d'abord un tableau suivant le schéma fourni au *tableau II* et l'on calcule numériquement l'intégrale de la dernière colonne du tableau entre

$$x_0 = 50 \quad \text{et} \quad x_1 = 60 \text{ daN/mm}^2.$$

On trouve $N = 0,143$.

Tableau II

Schéma du calcul de :

$$\text{Pr } (30 < E < 40 / 50 < R < 60)$$

	x	$X = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$	$Z_1 = \frac{Y_1 - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}$	$\pi(Z_1)$	$Z_0 = \frac{Y_0 - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}$	$\pi(Z_0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-\frac{x^2}{2}} [\pi(Z_1) - \pi(Z_0)]]$
	50	-1,51	2,44	0,993	-1,40	0,081	0,115
	"						-
	"						-
Par pas de	"						-
0,25 daN/mm ²	"						-
par exemple	"						-
	"						-
	60	-0,72	0,27	0,606	-3,57	0,0002	0,187

D'autre part :

$$D = \pi(X_1) - \pi(X_0) = \pi(-0,72) - \pi(-1,51) = 0,173$$

$$\text{D'où} \quad P = \frac{N}{D} = \frac{0,143}{0,173} = 0,84$$

En imposant, dans la population des résistances (50-60) une limite d'élasticité comprise entre 30 et 40 daN/mm², on doit donc s'attendre à un pourcentage de rebuts supplémentaire de 16 %, ce qui paraît trop important pour une spécification considérée ici comme secondaire.

Le calcul peut être refait à l'identique pour d'autres valeurs des paramètres x_0 , x_1 , y_0 , y_1 des moyennes et écarts-types.

Automatisation du calcul.

Le traitement de l'exemple précédent montre la possibilité d'une automatisation du calcul. Nous l'avons faite au moyen d'une programmation en langage BASIC, sur un mini-ordinateur de bureau WANG 2 200 (4K). Le programme est donné en annexe I.

L'utilisation du programme est très simple. Il suffit de fournir les limites paramétriques x_0 , x_1 , y_0 et y_1 , ainsi que les valeurs des caractéristiques (moyennes, écarts-types et coefficient de corrélation), et l'on obtient directement la valeur de la probabilité conditionnelle.

En faisant ainsi varier les classes de résistances et de limites élastiques dans l'exemple précédent, on obtient les résultats donnés au *tableau III*.

On lit par exemple que la probabilité d'avoir $30 < E < 40$ daN/mm² sachant que $50 < R < 60$ daN/mm² est de 0,84.

Ce tableau reflète, bien clairement, la liaison qui existe entre les deux caractéristiques R et E. A une classe de résistance correspond une concentration des limites d'élasticité dans un domaine étroit. Ainsi pour $50 < R < 60$ daN/mm², il y a 99 % de chances d'avoir E compris entre 30 et 50 daN/mm².

Tableau III

Probabilités conditionnelles
 $\Pr (E_0 < E < E_1 / R_0 < R < R_1)$

Spécifications sur E \ Spécifications sur R	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
10-20	0,02	0	0	0	0	0
20-30	0,89	0,31	0,01	0	0	0
30-40	0,10	0,70	0,84	0,24	0	0,17
40-50	0	0	0,16	0,76	0,78	0,83
50-60	0	0	0	0	0,22	0,01
60-70	0	0	0	0	0	0
Exemple : $\Pr (30 < E < 40 / 50 < R < 60) = 0,84$						

2/ Spécifications du type $Y > Y_0 / X > X_0$)

Nous pouvons aussi chercher à calculer pour la même population, les probabilités telles que :

$$P_r(E > E_0 / R > R_0)$$

(S'étant fixé une spécification minimale R_0 pour R , on demande le taux d'acceptation correspondant à une spécification minimale E_0 pour E).

Il suffit de refaire les calculs, en prenant R_1 et E_1 infinis, c'est-à-dire pratiquement $R_1 = \bar{R} + 3\sigma_R$, $E_1 = \bar{E} + 3\sigma_E$ par exemple.

On obtient ainsi, pour chaque valeur de R_0 une courbe de probabilité en fonction de E_0 et, lorsque R_0 varie, un réseau de courbes (*tableau IV et figure 2*).

Tableau IV

Sélection suivant le critère principal R
 $\Pr (E > E_0 / R > R_0)$

Pr / Sachant que R >	20	30	40	50	60	70	80
40	0,990	0,969	0,719	0,230	0,002	0,0003	0
50	0,996	0,993	0,759	0,243	0,002	0,0003	0
60	# 1	# 1	0,905	0,297	0,025	0,0004	0
70	# 1	# 1	# 1	0,484	0,042	0,0007	0
80	# 1	# 1	# 1	0,896	0,102	0,0018	0
90	# 1	# 1	# 1	# 1	0,380	0,0070	0
100	# 1	# 1	# 1	# 1	0,960	0,0048	0

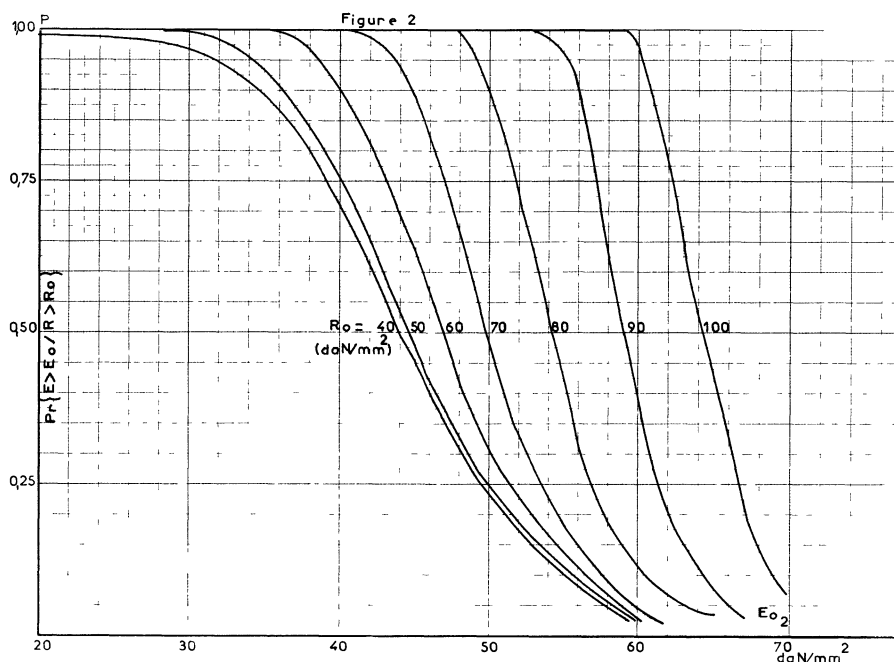


Figure 2 – Sélection suivant le critère principal R

On lit, par exemple, sur la figure 2, que :

$$\Pr(E > 40 / R > 60) = 0,90$$

Inversement, pour chaque valeur de R_0 , on pourra déterminer la valeur minimale E_0 correspondant à un certain seuil d'acceptation (ou de rejet). Ainsi, pour $R_0 = 60$ daN/mm², on a, au seuil d'acceptation de 0,95, $E_0 = 38,5$ daN/mm². C'est-à-dire que le fait d'adjoindre à la spécification $R > 60$ daN/mm² la spécification complémentaire $E > 38,5$ daN/mm² conduit en moyenne à un pourcentage complémentaire de rejet de 5 %.

En reprenant ce calcul pour diverses valeurs de R_0 , on obtient alors un tableau, d'usage très commode, qui peut servir de guide au choix de la spécification complémentaire E_0 (tableau V).

Remarque importante.

On peut calculer, symétriquement

$$\Pr(R > R_0 / E > E_0)$$

On obtient le tableau VI de même forme que le tableau IV, et dont l'interprétation est également très simple.

La comparaison des tableaux IV et VI montre clairement que l'ordre des critères de sélection n'est pas du tout indifférent. On lit par exemple, sur le tableau IV que, R étant le critère principal :

$$\Pr(E > 50 / R > 60) = 0,297$$

Tableau V

Limites de spécifications secondaires correspondant à des probabilités d'acceptation données

R_0 Caractéristique principale E_0 Caractéristique secondaire	40	50	60	70	80	90	100
Seuil 0,99	20,0	31,0	36,9	41,8	48,3	53,7	59,5
Seuil 0,95	31,8	34,3	38,5	43,8	49,2	55,2	60,2
Seuil 0,90	34,7	36,3	40,0	44,8	50,0	56,0	60,8
Exemple : Sachant que $R > 70 \text{ daN/mm}^2$, il y a une probabilité de 0,95 pour que $E > 43,8 \text{ daN/mm}^2$. Le supplément de rejet dû à la spécification complémentaire $E > 43,8 \text{ daN/mm}^2$ est de 5 % en moyenne.							

Tableau VI

Sélection suivant le critère principal E

$\Pr(R > R_0 / E > E_0)$

$\Pr$ $R >$ Sachant que $E >$	40	50	60	70	80	90	100
20	0,978	0,923	0,755	0,464	0,189	0,047	0,006
30	0,992	0,948	0,775	0,477	0,195	0,048	0,007
40	# 1	# 1	0,987	0,641	0,262	0,065	0,009
50	# 1	# 1	# 1	# 1	0,761	0,203	0,029
60	# 1	# 1	# 1	# 1	# 1	# 1	0,317
70	# 1	# 1	# 1	# 1	# 1	# 1	# 1
80	# 1	# 1	# 1	# 1	# 1	# 1	# 1

alors que, d'après le tableau VI, le critère principal étant E

$$\Pr(R > 60 / E > 50) \# 1$$

Il est donc essentiel de bien préciser la hiérarchie des critères de sélection.

3/ Application pratique.

Dans l'exemple cité, un projet ISO d'avril 1972 avait proposé sur la base des données du tableau I les spécifications minimales E_{mini} , relatives à des

spécifications minimales R_{mini} imposées pour des fontes à graphite sphéroïdal (voir tableau suivant, colonnes 1 et 2).

R_{mini} daN/mm ²	E_{mini} daN/mm ²	Probabilité de rejet
40	25	1 %
50	32	2 %
60	37	1 %
70	44	6 %
80	48	1 %

A partir des courbes de la figure 2 nous avons déterminé les probabilités de rejet correspondantes (dernière colonne du tableau).

On voit que ces probabilités ne sont pas uniformes, les valeurs de $E_{\text{mini}} = 44$ daN/mm² (pour $R \geq 70$) et $E = 32$ daN/mm² (pour $R \geq 50$) étant relativement plus élevées que les autres. Pour se ramener dans tous les cas à une probabilité de rejet uniforme de 1 %, il faudrait abaisser E_{mini} respectivement à 42 et 31 daN/mm².

4/ Cas où la droite de régression est connue.

Les calculs précédents reposent sur l'hypothèse que l'on connaît les moyennes et les écarts-types des séries statistiques x et y .

C'est le cas chaque fois que l'on opère à partir d'échantillons de mesures, telles que celles du tableau I. Mais imaginons que l'on connaisse, expérimentalement ou d'après la littérature, une droite de régression de y sur x avec son coefficient de corrélation ρ et son écart type lié $\sigma_{y/x}$, et que l'on accepte de généraliser cette droite à toute la population potentielle des x et des y ; est-il possible d'opérer sur cette droite de régression, sans autre connaissance sur les moyennes et les écarts-types de x et y ?

Le calcul n'est en fait possible que si l'on connaît —ou si l'on se donne— les caractéristiques de moyenne et d'écart-type de l'une des deux populations x ou y . Il se ramène alors de manière très simple au cas général traité ci-dessus.

Connaissant par exemple la population des x , par μ_x et σ_x , la connaissance des paramètres de la droite de régression $y = ax + b$ permet alors de calculer μ_y et σ_y . En effet :

$$\mu_y = a \mu_x + b \quad \text{et} \quad \sigma_y = \frac{\sigma_{y/x}}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

Passant par les équations (2), l'on se trouve donc ramené immédiatement au problème général.

De la même façon, connaissant la population des y , par μ_y et σ_y , il suffit de calculer :

$$\mu_x = \frac{1}{a} (\mu_y - b) \quad \text{et} \quad \sigma_x = \frac{\rho \sigma_y}{a}$$

pour se trouver ramené au cas précédent.

CONCLUSION

Il nous a semblé utile, dans cet article, de montrer comment se pose le problème de la hiérarchisation des différents critères de qualité d'un produit. Si l'on n'y prend pas garde on s'étonnera en effet qu'il ne puisse pas y avoir cohérence entre des normes qui retiendraient les mêmes critères, mais ne les feraient pas jouer dans le même ordre au regard de la sélection.

Nous espérons aussi, en proposant une méthode de calcul pratique des probabilités d'acceptation dans les spécifications à deux critères, contribuer à faciliter le choix de ces spécifications et à mieux uniformiser les risques de rejet, dans la détermination de classes de produits.

Nous nous sommes nous-mêmes étonnés qu'une question aussi générale n'ait pas fait, à notre connaissance, l'objet de réflexions et d'applications d'ordre statistique beaucoup plus développées, et nous aurions de l'obligation aux lecteurs qui voudraient bien nous communiquer des informations ou des critiques à propos de cet article.

ANNEXE I PROGRAMME DE CALCUL

```

10 DIM P(41),W(102)
20FOR J=1TO 41:READ P(J):NEXT J
30INPUT "X0,X1",X0,X1
40 PRINT "ENTRER D PARTAGEANT X0-X1 EN 2*P PARTIES EGALES"
50 INPUT "D",D
60 INPUT "Y0,Y1",Y0,Y1
70 INPUT "MOYENNE,SIGMA DE X",M1,S1
80 INPUT "MOYENNE,SIGMA DE Y",M2,S2
90INPUT "COEFFICIENT DE CORRELATION",R
100 REM V0,V1 VALEURS REDUITES DE Y0,Y1
110REM U0,U1 VALEURS REDUITES DE X0,X1
120 V0=(Y0-M2)/S2:V1=(Y1-M2)/S2
130 U0=(X0-M1)/S1:U1=(X1-M1)/S1
140 J=0
150 FOR X=X0TO X1STEP D
160 J=J+1
170 U=(X-M1)/S1
180 Z1=(V1-R*U)/SQR(1-R*R):Z0=(V0-R*U)/SQR(1-R*R)
190 REM NUMERATEUR =PR(X0[X[X1,Y0[Y[Y1)
200 GOSUB '00(Z1):P1=P
210 GOSUB '00(Z0):P0=P
220 W(J)=ABS(P1-P0)*EXP(-U12/2)
230 NEXT X
240 S,T=0:D1=ABS(U1-U0)/J
250 FOR I=1TO J
260 IF I/2=INT(I/2)THEN 290
270S=S+W(I)
280 GOTO 300
290T=T+W(I)
300 NEXT I
310 Z9=D1*(W(1)+4*S+2*T+W(J+1))/3/SQR(2*PI)
320PRINT "NUMERATEUR";Z9
330 REM DENOMINATEUR=PR(X0[X[X1)-PI(U1)-PI(U0)
340 GOSUB '00(U1):Q1=P
350 GOSUB '00(U0):Q0=P
360 Z8=ABS(Q1-Q0)
370 PRINT "DENOMINATEUR";Z8
380 PRINT "PROBABILITE";Z9/Z8
390 REM TABLE DE PI
400 DATA .5,.5398,.5793,.6179,.6554,.6915,.7257,.7580,.7881,.8159
410 DATA .8413,.8643,.8849,.9032,.9192,.9332,.9452,.9554,.9641,.9713
420 DATA .9772,.9821,.9861,.9893,.9918,.9938,.9953,.9965,.9974,.9981
430 DATA .9987,.9990,.9993,.9995,.9997,.99977,.99984,.999989,.999993,.9
9995,.99997
440 END
450 DEFFN'00(Z)
460 DEFFNQ(Z)=P(INT(10*Z+1))+(10*Z-INT(10*Z))*(P(INT(10*Z+2))-P(INT(10
*Z+1)))
470 P=1
480 Z=INT(1000*Z)/1000
490 IF Z[0THEN 520
500 IF Z]4THEN 550
510 P=FNQ(Z):RETURN
520Z=-Z
530IF Z]4THEN 540:P=0:RETURN
540 P=1-FNQ(Z)
550 RETURN

```