

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

DAVID SROUR

**Sur quelques estimateurs du paramètre d'un processus
poissonien selon que le nombre d'observations
est tronqué ou non**

Revue de statistique appliquée, tome 20, n° 4 (1972), p. 63-83

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1972__20_4_63_0

© Société française de statistique, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

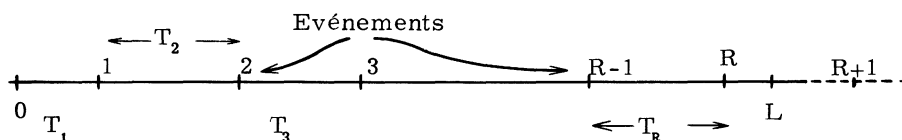
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES ESTIMATEURS DU PARAMÈTRE D'UN PROCESSUS POISSONNIEN SELON QUE LE NOMBRE D'OBSERVATIONS EST TRONQUE OU NON

David SROUR

1 - INTRODUCTION

On considère une suite d'événements obéissant à un processus de Poisson que l'on observe pendant une durée L finie. Si R désigne le nombre aléatoire d'événements sur $[0, L]$, on sait que cette variable possède une distribution de Poisson de paramètre $\lambda = \frac{L}{\theta}$ où θ est le paramètre de la loi exponentielle de densité $\frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}$ ($t > 0$) suivie par les intervalles aléatoires T_i de temps écoulés entre deux événements successifs



Cet article se propose d'analyser un certain nombre d'estimateurs de θ basés soit sur R soit sur $\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_R}{R}$ temps moyen écoulé entre deux événements successifs, calculé à l'aide des intervalles T_i en nombre aléatoire R .

La variable aléatoire $\bar{T}$ n'est définie que s'il se passe au moins un événement avant L et nous serons par conséquent amenés à considérer le cas où R est tronqué de la valeur zéro (3ème partie de cet article).

Pour la suite, il conviendra de noter que la statistique R est exhaustive pour θ et totale.

Le premier résultat s'obtient en montrant que la distribution de

$$(T_1, T_2, \dots, T_R)$$

conditionnée par R est indépendante de θ :

$$\begin{aligned} \text{Prob } [T_i \in [t_i, t_i + dt_i], i = 1, 2, \dots, R/R = r] = \\ = \frac{\text{Prob } [T_i \in [t_i, t_i + dt_i], i = 1, 2, \dots, r; T_{r+1} > L - \sum_{i=1}^r t_i]}{e^{-\lambda} \lambda^r / r!} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Les variables aléatoires $T_i, i = 1, 2, \dots, r + 1$ étant mutuellement indépendantes le numérateur de l'expression ci-dessus s'écrit :

$$\theta^{-r-1} \cdot e^{-\sum_{i=1}^r t_i / \theta} \int_{L - \sum_{i=1}^r t_i}^{\infty} e^{-x/\theta} dx. \prod_{i=1}^r dt_i = e^{-\lambda} \theta^{-r} \prod_{i=1}^r dt_i$$

D'où la distribution conditionnelle de $(T_1, T_2, \dots, T_R)$

$$\text{Prob } [T_i \in [t_i, t_i + dt_i], i = 1, 2, \dots, R/R = r] = r! \cdot L^{-r} \prod_{i=1}^r dt_i \quad (1.2)$$

indépendante de θ .

Quant à la totalité de R , il faut pour l'établir, montrer que toute fonction $f(R)$ d'espérance nulle quel que soit $\theta > 0$ est identiquement nulle :

$$\forall f; E[f(R)] = 0 \forall \theta > 0 \Rightarrow f \equiv 0 \quad (1.3)$$

Or si $E[f(R)] = 0$ pour tout θ , on a $\sum_{r \geq 0} f(r) e^{-\lambda} \lambda^r / r! = 0 \forall \lambda \geq 0$ soit pour $\lambda = 0, f(0) = 0$.

De même en écrivant que la dérivée terme à terme d'ordre i de la série entière en $\lambda \sum_{r \geq 0} f(r) \lambda^r / r!$ est nulle pour $\lambda = 0$ (cette série est en effet uniformément convergente $\forall \lambda$), on a $f(i) = 0, i = 1, 2, 3, \dots$ On en déduit donc bien que f est identiquement nulle et que R est totale.

2 - CAS OU R PEUT PRENDRE LA VALEUR "ZERO"

2.1 - Estimateur L/R

On sait que R est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ; la fonction L/λ de λ étant biunivoque, on en déduit que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est L/R mais on notera qu'il est d'espérance infinie. Il n'existe d'ailleurs aucun estimateur sans biais de θ qui, à une constante multiplicative près, est l'inverse du paramètre d'une distribution poissonnienne [Réf. 1, page 34].

Par contre, la statistique R/L , estimateur du maximum de vraisemblance de $1/\theta$, en constitue un estimateur optimal, en ce sens qu'elle est de variance minimale, dans la classe des estimateurs sans biais

$$E(R/L) = \frac{\lambda}{L} = \frac{1}{\theta} \quad (2.1)$$

$$V(R/L) = \frac{\lambda}{L^2} = \frac{1}{\theta L} \quad (2.2)$$

Ce résultat découle directement du fait que R est exhaustive et totale.

Montrons comment l'on peut trouver pour L grand un intervalle de confiance de niveau $1 - 2\alpha$ pour θ .

La variable R suivant une loi de Poisson de paramètre L/θ , on sait que $\frac{R - L/\theta}{\sqrt{L/\theta}}$ converge en loi vers la distribution normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Par ailleurs, R/L convergeant en probabilité vers $1/\theta$, on en déduit que $\frac{R - L/\theta}{\sqrt{L} \cdot \sqrt{R/L}}$ c'est-à-dire, $\frac{R - L/\theta}{\sqrt{R}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

Si $u_{1-\alpha}$ désigne la valeur ayant la probabilité α d'être dépassée par la variable $\mathcal{N}(0, 1)$, on a :

$$\text{Prob} \left[\frac{R - L/\theta}{\sqrt{R}} \in [-u_{1-\alpha}, u_{1-\alpha}] \right] = 1 - 2\alpha \quad (2.3)$$

et l'intervalle de confiance pour θ de longueur minimale dans la classe des intervalles asymptotiques de niveau $1 - 2\alpha$ est donné par :

$$\left[\frac{1}{\sqrt{R} (\sqrt{R} + u_{1-\alpha})} ; \frac{1}{\sqrt{R} (\sqrt{R} - u_{1-\alpha})} \right] \quad (2.4)$$

L'estimateur L/R ne permettant pas une estimation finie de θ quand R est nul, on étudie par la suite l'estimateur $L/(R + 1)$ couramment utilisé dans les problèmes de fiabilité [Réf. 2].

2.2 - Estimateur $L/(R + 1)$

Déterminons les caractéristiques de $L/(R + 1)$ qui selon la valeur de R , prend les valeurs L , $\frac{L}{2}$, $\frac{L}{3}$, etc...

$$\begin{aligned} E \left(\frac{L}{R + 1} \right) &= L e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{(r + 1)!} = \theta e^{-\lambda} (e^{\lambda} - 1) \text{ soit} \\ E \left(\frac{L}{R + 1} \right) &= \theta (1 - e^{-\lambda}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Le moment de second ordre de cet estimateur s'écrit :

$$E \left(\frac{L^2}{(R + 1)^2} \right) = L e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{(r + 1)(r + 1)!} = \theta L e^{-\lambda} S(\lambda) \text{ avec } S(\lambda) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r \cdot r!}$$

Dans l'annexe 1, on démontre que si $I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{e^x}{x} dx$ est l'intégrale exponentielle tabulée, on a :

$$S(\lambda) = I(\lambda) - C - \text{Log } \lambda \text{ où } C \text{ est la constante d'Euler égale à } 0,5772. \quad (2.6)$$

On trouve par conséquent :

$$\begin{aligned} V\left(\frac{L}{R+1}\right) &= \theta L e^{-\lambda} S(\lambda) - \theta^2 (1 - e^{-\lambda})^2 \\ &= \theta^2 e^{-\lambda} [\lambda I(\lambda) - C - \text{Log} \lambda - 2 (\text{ch } \lambda - 1)] \end{aligned} \quad (2.7)$$

où $\text{ch } \lambda$ est le cosinus hyperbolique de λ , égal à $(e^\lambda + e^{-\lambda})/2$.

Notons enfin que le biais relatif de $\frac{L}{R+1}$, que nous définirons par

$$\frac{E(L/(R+1)) - \theta}{\theta}, \text{ s'écrit :}$$

$$\text{B.R. } (L/(R+1)) = -e^{-\lambda} \quad (2.8)$$

et que c'est une fonction de λ négative et croissante, variant de -1 à 0 (cf. plus bas § 2.3).

Pour les mêmes raisons que précédemment, $L/(R+1)$ est l'estimateur optimal de la fonction $\theta (1 - e^{-L/\theta})$ du paramètre θ (sans biais et de variance minimale).

Montrons comment l'on peut trouver pour θ un intervalle de confiance de niveau au moins égal à $1 - 2\alpha$.

Cette procédure est basée sur le fait que si $\mathcal{Q}(\lambda)$ est une variable de Poisson de paramètre λ et χ_n^2 une variable distribuée comme un χ^2 à n degrés de liberté, on a :

$$\text{Prob}(\mathcal{Q}(\lambda) < x) = \text{Prob}(\chi_{2x}^2 > 2\lambda) \quad \forall x \text{ entier positif.} \quad (2.9)$$

Soit $[\lambda_1, \lambda_2]$ l'intervalle de confiance pour λ ; on doit avoir si r est l'observation de R :

$$\text{Prob}(R \leq r/\lambda = \lambda_2) \leq \alpha \quad (2.10)$$

$$\text{Prob}(R > r/\lambda = \lambda_1) \leq \alpha \quad (2.10)$$

D'où d'après (2.9) l'intervalle de confiance pour λ de niveau au moins égal à $1 - 2\alpha$:

$$\left[\frac{1}{2} \chi_{2r, \alpha}^2, \frac{1}{2} \chi_{2r+2, 1-\alpha}^2 \right]$$

où l'on désigne par $\chi_{n, 1-\alpha}^2$ la valeur ayant la probabilité α d'être dépassée par une variable χ_n^2 .

On a alors l'intervalle

$$\left[\frac{2L}{\chi_{2R+2, 1-\alpha}^2} ; \frac{2L}{\chi_{2R, \alpha}^2} \right] \quad (2.11)$$

recouvrant θ avec une probabilité $\geq 1 - 2\alpha$.

Dans le paragraphe 3, où R sera tronqué de la valeur zéro (R sera alors noté R^*) nous serons amenés à comparer L/R^* et $L/(R^* + 1)$ en tant qu'estimateurs de θ . Cela justifie que dans le cadre du § 2, nous étudions la statistique $L/(R + 2)$ et tel est l'objet du sous-paragraphe 2.3 ci-dessous. On y verra cependant que $L/(R + 2)$ n'a pas d'intérêt propre en tant qu'estimateur de θ .

2.3 - Estimateur $L/(R + 2)$

Cet estimateur qui, selon la réalisation r de R, prend les valeurs $L/2$, $L/3$, etc... possède l'espérance mathématique suivante :

$$E(L/(R + 2)) = L e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)\lambda^r}{(r+2)!}$$

Posons :

$$A(\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r+1)\lambda^r}{(r+2)!} = \frac{dB(\lambda)}{d\lambda}$$

avec

$$B(\lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+2)!} = \frac{(e^\lambda - 1 - \lambda)}{\lambda}$$

On trouve :

$$A(\lambda) = \frac{\lambda e^\lambda - e^\lambda + 1}{\lambda^2} \text{ et par conséquent :}$$

$$E(L/(R + 2)) = \theta \left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \right) \quad (2.12)$$

et

$$B.R. (L/(R + 2)) = - \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \quad (2.13)$$

fonction de λ négative et croissante variant de -1 à 0.

On montre facilement que l'on a :

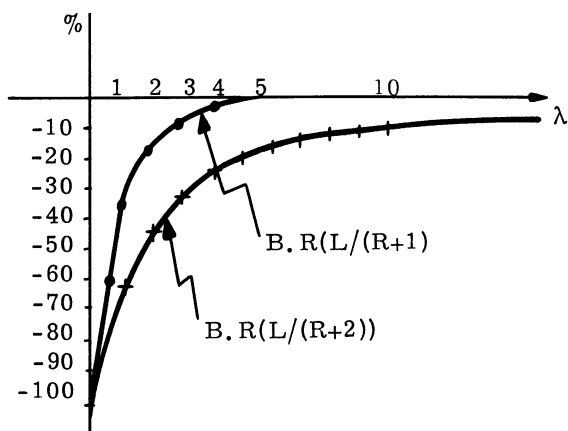
$$|B.R. (L/(R + 1))| < |B.R. (L/(R + 2))| \quad \forall \lambda > 0 \quad (2.14)$$

et la configuration graphique est la suivante : (voir page...)

λ	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	10	20	∞
B.R. ($L/(R + 1)$)	-60,7	-36,8	-13,5	-5,0	-1,8	-0,7	0,0	0,0	0
B.R. ($L/(R + 2)$)	-79,0	-63,0	-43,5	-31,6	-24,5	-19,8	-10	-5	0

Biais relatifs en % selon les valeurs de λ

Si l'on se limite à un critère "biais", l'estimateur $L/(R + 1)$ sera donc toujours préféré à l'estimateur $L/(R + 2)$.



La statistique R étant exhaustive et totale, $L/(R + 2)$ est l'estimateur optimal de $\theta \left(1 - \frac{\theta (1 - e^{-L/\theta})}{L}\right)$ et sa variance se calcule comme suit :

$$E \left(L^2 / (R + 2)^2 \right) = L^2 e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r! (r + 2)^2} = L^2 e^{-\lambda} \frac{d}{d\lambda} \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^{r+1}}{(r + 2) (r + 2)!} \right]$$

On trouve facilement $E \left(L^2 / (R + 2)^2 \right) = \theta^2 e^{-\lambda} (\lambda S'(\lambda) - S(\lambda))$ ou $S'(\lambda)$ est la dérivée de $S(\lambda)$ (cf. 2.6).

D'où :

$$E \left(L^2 / (R + 2)^2 \right) = \theta^2 e^{-\lambda} (e^{\lambda} - 1 - I(\lambda) + C + \text{Log } \lambda) \text{ et}$$

$$V \left(L / (R + 2) \right) = \theta^2 e^{-\lambda} (e^{\lambda} - 1 - I(\lambda) + C + \text{Log } \lambda) - \theta^2 (e^{-\lambda} + \lambda^{-1}) / \lambda^2$$

soit après quelques simplifications :

$$V \left(L / (R + 2) \right) = \theta^2 e^{-\lambda} \left[\frac{2}{\lambda^2} (1 - \text{ch } \lambda) + \frac{2}{\lambda} (e^{\lambda} - 1) - I(\lambda) + \text{Log } \lambda + (C - 1) \right] \quad (2.15)$$

On peut couramment admettre en pratique que L est choisi, de façon qu'il se passe au moins un événement ; cela correspond à tronquer R de la valeur zéro, cas dont l'analyse est faite ci-dessous.

3 - CAS OU R EST TRONQUEE DE LA VALEUR ZERO

On suppose dans la suite que le nombre d'observations sur $[0, L]$ ne peut être nul ; cette variable sera notée R' et possède la distribution

$$P(R^* = r) = \frac{\lambda^r}{r! (e^\lambda - 1)}, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1)$$

(loi de Poisson de paramètre λ tronquée de la valeur 0)

dont les caractéristiques peuvent être facilement trouvées

$$E(R^*) = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \text{ et} \quad (3.2)$$

$$V(R^*) = \frac{\lambda(1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda))}{(1 - e^{-\lambda})^2} \quad (3.2)$$

Cela revient à prendre pour densité du premier intervalle de temps T_1 ; non plus $\frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}$ (pour $t > 0$) mais

$$\frac{1}{\theta(1 - e^{-\theta})} e^{-t/\theta} \quad (\text{pour } 0 < t \leq L), \quad (3.3)$$

la distribution des T_i ($i = 2, 3, \dots, R$) restant inchangée.

On remarquera que les propriétés d'exhaustivité et de totalité pour R^* sont conservées ; de même qu'en (1.1) en effet :

$$\begin{aligned} \text{Prob}[T_i \in [t_i, t_i + dt_i], i = 1, 2, \dots, R/R = r] &= \frac{e^{-\lambda} \theta^{-r} \prod_{i=1}^r dt_i}{\frac{(1 - e^{-\lambda})}{\lambda^r / r! (e^\lambda - 1)}} \\ &= r! \cdot L^{-r} \prod_{i=1}^r dt_i \end{aligned} \quad (3.4)$$

indépendante de θ .

Conformément à la relation (1.3) on montre de même que

$$\forall f \text{ telle que } E[f(R^*)] = \frac{1}{(e^\lambda - 1)} \sum_{r \geq 1} \frac{f(r) \lambda^r}{r!} = 0 \quad \forall \lambda > 0, \text{ alors } f = 0 \quad (3.5)$$

3.1 - Estimateur L/R^*

La statistique L/R^* est maintenant l'estimateur du maximum de vraisemblance de la fonction $\theta(1 - e^{-L/\theta})$. Pour l'observation r de R^* ($r \geq 1$), la vraisemblance de θ s'écrit en effet $\mathcal{L}(\theta) = \lambda^r / r! (e^\lambda - 1)$ et l'on a

$$\frac{\delta \text{Log } \mathcal{L}(\theta)}{\delta \theta} = \frac{d\lambda}{d\theta} \left(\frac{r}{\lambda} - \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1} \right) \quad (3.6)$$

R^* est donc l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\lambda / (1 - e^{-\lambda})$ et L/R^* celui de $\theta(1 - e^{-L/\theta})$.

Quant à l'estimation θ_r du maximum de vraisemblance de θ , elle s'obtient par résolution de l'équation (3.7) [Réf. 3]

$$\theta_r (1 - e^{-L/\theta_r}) = L/r \quad (r \text{ observé, supérieur ou égal à } 1) \quad (3.7)$$

Compte tenu des propriétés d'exhaustivité et de totalité de la statistique R^* rappelée ci-dessus, on trouve facilement que R^*/L et L/R^* sont les estimateurs optimaux (sans biais et de variance minimale) des fonctions

$$\frac{1}{3(1 - e^{-L/\theta})} \text{ et } \frac{L S(L/\theta)}{(e^{L/\theta} - 1)}$$

respectivement.

On a en effet ;

$$E(R^*/L) = \frac{1}{L} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r \lambda^r}{r! (e^\lambda - 1)} = \frac{1}{\theta (1 - e^{-L/\theta})} \quad (3.8)$$

$$E(L/R^*) = \frac{L}{(e^\lambda - 1)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r r!} = \frac{L S(L/\theta)}{(e^{L/\theta} - 1)} \quad (\text{cf. 2.6}) \quad (3.9)$$

et le biais relatif de L/R^* considéré comme estimateur de θ s'écrit

$$\text{B.R.}(L/R^*) = \frac{\lambda S(\lambda)}{e^\lambda - 1} - 1 \quad (3.10)$$

Quant aux variances des 2 estimateurs ci-dessus, elles s'expriment après calcul des moments du 2ème ordre ; on trouve :

$$E(R^{*2}/L^2) = \frac{\lambda (1 + \lambda)}{L^2 (1 - e^{-\lambda})} \quad (3.11)$$

et

$$V(R^*/L) = \frac{\lambda (1 - e^{-\lambda} (1 + \lambda))}{L^2 (1 - e^{-\lambda})^2}, \quad (3.12)$$

$$E(L^2/R^{*2}) = \frac{L^2}{(e^\lambda - 1)} \Sigma(\lambda) \quad (3.13)$$

et

$$V(L/R^*) = \frac{L^2}{(e^\lambda - 1)^2} \left[e^\lambda - 1 - \Sigma(\lambda) - S^2(\lambda) \right] \quad (3.14)$$

avec

$$\Sigma(\lambda) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r^2 r!} = \int_0^\lambda \frac{S(x)}{x} dx = \int_0^\lambda \frac{dx}{x} \left[\int_{-\infty}^x e^y \frac{dy}{y} - C - \text{Log } x \right] \quad (3.15)$$

L'optimalité des estimateurs ci-dessus peut d'ailleurs être vérifiée en montrant que leur variance atteint la borne inférieure de Cramer-Rao. Ainsi pour l'estimateur R^*/L , par exemple, il faudrait montrer que $V(R^*/L)$ donnée par (3.12) est égale à $[g'(\lambda)]^2 / \gamma(\lambda)$ où $\gamma(\lambda)$ est la quantité d'information en λ et $g'(\lambda)$ la dérivée par rapport à λ de $E(R^*/L) = g(\lambda)$.

On trouvera facilement :

$$[g'(\lambda)]^2 = \frac{[1 - e^{-\lambda} (1 + \lambda)]^2}{L^2 (1 - e^{-\lambda})^4} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\lambda) &= -E \left(\frac{\delta^2}{\delta \lambda^2} (R^* \text{Log } \lambda - \text{Log } (e^\lambda - 1)) \right) = E \left(\frac{R^*}{\lambda^2} \right) - \frac{e^\lambda}{(e^\lambda - 1)^2} = \\ &= \frac{1}{\lambda(1 - e^{-\lambda})} - \frac{e^\lambda}{(e^\lambda - 1)^2} = \frac{e^\lambda - \lambda - 1}{\lambda(1 - e^{-\lambda})(e^\lambda - 1)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

et

$$\frac{g'(\lambda)^2}{\mathcal{J}(\lambda)} = \frac{\lambda(1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda))}{L^2(1 - e^{-\lambda})^2} \quad (3.18)$$

même expression que la variance de R^*/L dans (3.12).

De même que dans le paragraphe 2.1, montrons comment l'on peut trouver un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - 2\alpha$, non plus pour mais pour $\theta(1 - e^{-L/\theta})$.

La fonction caractéristique $\varphi_{R^*}(t)$ s'écrit :

$$\varphi_{R^*}(t) = \frac{1}{e^\lambda - 1} \sum_{r \geq 1} \frac{(\lambda e^{it})^r}{r!} = \frac{e^{\lambda e^{it}} - 1}{e^\lambda - 1} \quad (3.19)$$

et permet d'aboutir à la fonction caractéristique de la variable centrée réduite

$$\begin{aligned} R_c^* &= \frac{R^* \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}}{\sqrt{\frac{\lambda(1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda))}{(1 - e^{-\lambda})^2}}} \\ \varphi_{R_c^*}(t) &= e^{\frac{it \sqrt{\lambda}}{\sqrt{1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda)}}} \left[e^{\lambda e^{\frac{it(1 - e^{-\lambda})}{\sqrt{\lambda(1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda))}}} - 1} \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

qui pour λ grand tend vers $e^{-t^2/2}$, fonction caractéristique de la variable $\mathcal{N}(0,1)$ (passer à la deuxième fonction caractéristique, isoler parties réelle et imaginaire et effectuer les développements limités appropriés).

La variable R_c^* convergeant en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$ et L/R^* estimateur du maximum de vraisemblance de $\theta(1 - e^{-L/\theta})$ convergeant vers cette fonction du paramètre, on en déduit que :

$$\frac{R^* - \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}}{\sqrt{R^* \left(1 - \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \right)}}$$

converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$ (écrire R_c^* sous la forme

$$\frac{R^* - \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}}{\sqrt{\frac{L}{\theta} \left(1 - \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}\right)}}$$

et substituer L/R^* à $\theta(1 - e^{-\lambda})$ au dénominateur).

L'expression $\mathcal{E}\zeta(\lambda) = \lambda e^{-\lambda} / (1 - e^{-\lambda})$ tendant vers zéro pour λ infini, on en déduit alors que la variable aléatoire

$$\frac{R - \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}}{\sqrt{R^*}}$$

converge aussi en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.

Par rapport au § 2.1, tout se passe donc comme si $\theta(1 - e^{-L/\theta})$ se substituait à θ et l'intervalle

$$\left[\frac{L}{\sqrt{R^*}(\sqrt{R^*} + u_{1-\alpha})} ; \frac{L}{\sqrt{R^*}(\sqrt{R^*} - u_{1-\alpha})} \right] \quad (3.21)$$

est l'intervalle de confiance pour $\theta(1 - e^{-L/\theta})$ de longueur minimale dans la classe des intervalles asymptotiques de niveau $1 - 2\alpha$.

Comparativement au § 2.1 (Cf. relations (2.1) et (2.2), on peut se poser le problème de trouver un estimateur optimal pour $1/\theta$. Tel est l'objet du paragraphe suivant.

3.2 - Estimateur optimal de $1/\theta$

La relation (3.8) permet de trouver rapidement cet estimateur que nous noterons U/L . En posant :

$$E(U/L) = \frac{1}{\theta} \quad (3.22)$$

on voit que $E\left(\frac{U}{L}\right) = E\left(\frac{R^*}{L}\right) - \frac{\lambda e^{-\lambda}}{L(1 - e^{-\lambda})}$ et comme $\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$ n'est autre que la masse de R^* au point 1, il suffira d'ôter du champ possible le cas $R^* = 1$.

L'estimateur sans biais de variance minimale de $1/\theta$ sera donc :

$$\frac{U}{L} = \begin{cases} 0 & \text{si } R^* = 1 \\ \frac{R^*}{L} & \text{si } R^* \geq 2 \end{cases} \quad (3.23)$$

et sa variance se détermine comme suit :

$$\begin{aligned} E(U^2/L^2) &= \frac{1}{L^2(e^\lambda - 1)} \sum_{r \geq 2} \frac{r^2 \lambda^r}{r!} = \frac{\lambda}{L^2(e^\lambda - 1)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(r+1)\lambda^r}{r!} \\ &= \frac{\lambda}{L^2(e^\lambda - 1)} (e^\lambda - 1 + \lambda e^\lambda) \end{aligned} \quad (3.24)$$

et par conséquent

$$V(U/L) = \frac{\lambda}{L^2} \left(1 + \frac{\lambda}{e^\lambda - 1} \right) \quad (3.25)$$

3.3 Estimateur optimal de $1 - e^{-L/\theta}$

Les estimateurs optimaux de $1/\theta$ et de $1/\theta (1 - e^{-L/\theta})$ étant connus, on peut chercher à exprimer l'estimateur optimal W de $1 - e^{-L/\theta}$. En écrivant que W est sans biais, on a :

$$E(W) = \frac{1}{(e^\lambda - 1)} \sum_{r \geq 1} W(r) \frac{\lambda^r}{r!} = 1 - e^{-\lambda} \quad (3.26)$$

D'où

$$\sum_{r \geq 1} W(r) \frac{\lambda^r}{r!} = 2 (\cosh \lambda - 1) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2p}}{(2p)!}$$

et l'égalité de ces 2 séries entières convergentes fournit la solution

$$W = \begin{cases} 0 & \text{si } R^* \text{ est impair} \\ 2 & \text{si } R^* \text{ est pair} \end{cases} \quad (3.27)$$

Absurde d'un point de vue pratique, cet estimateur basé sur R^* est cependant l'estimateur optimal de $1 - e^{-L/\theta}$ et sa variance s'exprime en remarquant que l'on a $E(W^2) = 2E(W)$:

$$V(W) = E(W) (2 - E(W)) = (1 - e^{-\lambda}) (1 + e^{-\lambda}) = 1 - e^{-2\lambda} = 2 \operatorname{sh}(\lambda)/e^\lambda. \quad (3.28)$$

Cette recherche de l'optimalité conduit de même à estimer optimalement $e^{-\lambda}$ et $1 - \frac{\lambda}{(e^\lambda - 1)}$ par les estimateurs absurdes

$$Y = 1 - W = \begin{cases} 1 & \text{si } R^* \text{ est impair} \\ -1 & \text{si } R^* \text{ est pair} \end{cases} \quad \text{et } Z = \frac{U}{R^*} = \begin{cases} 0 & \text{si } R^* = 1 \\ 1 & \text{si } R^* \geq 2 \end{cases}$$

Dans le § 3.4, nous abandonnerons donc en partie cette notion d'optimalité afin d'analyser l'estimateur "temps moyen" T dont l'intérêt dans les problèmes de fiabilité en particulier est certain.

3.4 - Estimateur temps moyen $\bar{T}$

Rappelons que $\bar{T}$ s'écrit $\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_{R^*}}{R^*}$ où R^* suit la distribution de Poisson de paramètre λ tronquée de la valeur 0 et proposons-nous dans la suite de déterminer la densité de T , ses caractéristiques et un intervalle de confiance de niveau $1 - 2\alpha$ basé sur T . Afin d'exprimer la densité de T , on utilisera souvent dans la suite les notations de fonction indicatrice

$$1_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in A. \\ 0 & \text{si } t \notin A. \end{cases} \quad (3.29)$$

Soit T_r la variable aléatoire "temps moyen" pour r fixé strictement positif et soit $f_r(t)$ sa densité qui n'est non-nulle que dans $]0, \frac{L}{r}]$ (puisque si $t, i = 1, 2, \dots, r$ sont les intervalles successifs, on a $\sum_{i=1}^r t_i \leq L$).

Si $q(t)$ est la densité de $\bar{T}$, on a :

$$q(t) = \frac{1}{(e^\lambda - 1)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f_r(t) \lambda^r}{r!} 1_{]0, \frac{L}{r}]} \quad (3.30)$$

On peut aussi écrire par ailleurs :

$$q(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t) 1_{] \frac{L}{i+1}, \frac{L}{i}]} \quad (3.31)$$

c'est-à-dire encore

$$q(t) = \begin{cases} p_1(t) & \text{si } t \in] \frac{L}{2}, L] \\ p_2(t) & \text{si } t \in] \frac{L}{3}, \frac{L}{2}] \\ \vdots \\ p_i(t) & \text{si } t \in] \frac{L}{i+1}, \frac{L}{i}] \end{cases} \quad (3.31)'$$

puisque la fonction $q(t)$ présente des discontinuités aux points $\frac{L}{2}, \frac{L}{3}, \frac{L}{4}, \dots$. (En effet, il n'existe qu'une seule façon d'observer un temps moyen t dans $] \frac{L}{2}, L]$, c'est d'avoir $R^* = 1$ et $T_1 \in] \frac{L}{2}, L]$; par contre on peut observer $t = \frac{L}{2}$ soit avec $R^* = 1$ et $T_1 = \frac{L}{2}$, soit avec $R^* = 2$ et $T_1 + T_2 = L$, d'où la discontinuité en $\frac{L}{2}$ et de même en $\frac{L}{3}, \frac{L}{4}, \dots$).

En remarquant l'identité évidente :

$$1_{]0, \frac{L}{r}]} = \sum_{i=r}^{\infty} 1_{] \frac{L}{i+1}, \frac{L}{i}]} \quad (3.32)$$

la mise en regard de (3.30) et (3.31) conduit à :

$$\frac{1}{(e^\lambda - 1)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f_r(t) \lambda^r}{r!} 1_{] \frac{L}{i+1}, \frac{L}{i}]} = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t) 1_{] \frac{L}{i+1}, \frac{L}{i}]}$$

On voit facilement que le premier membre de cette dernière relation s'écrit encore

$$\frac{1}{(e^\lambda - 1)} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=1}^i \frac{f_r(t) \lambda^r}{r!} 1_{] \frac{L}{i+1}, \frac{L}{i}]}$$

et l'on en déduit $p_i(t)$ sous la forme

$$p_i(t) = \frac{1}{(e^\lambda - 1)} \sum_{r=1}^i \frac{f_r(t) \lambda^r}{r!}$$

La détermination de $q(t)$ revient donc à celle de $f_r(t)$ densité de $\bar{T}$ dans $\left]0, \frac{L}{r}\right]$ conditionnée par $R^* = r$.

Pour t dans $]0, L/r]$ on a :

$$f_r(t) dt = \frac{\text{Prob} \left(\sum_{i=1}^r T_i = rt \right) \cdot \text{Prob} (T_{r+1} > L - rt)}{\frac{\lambda^r}{r! (e^\lambda - 1)}} \quad (3.35)$$

où T_i ($i = 2, 3, \dots, r+1$) est distribuée selon la loi exponentielle rappelée en introduction alors que T_1 possède la densité (3.3).

On trouve facilement

$$f_r(t) = \frac{\frac{r \cdot e^{-rt/\theta} (rt/\theta)^{r-1}}{\theta (1 - e^{-\lambda})} \cdot e^{-\lambda + rt/\theta}}{\lambda^r / [r! (e^\lambda - 1)]}$$

et par conséquent

$$f_r(t) = r \cdot \left(\frac{r}{L}\right)^r t^{r-1} \quad (3.36)$$

densité de $\bar{T}_r$, dont les caractéristiques s'écrivent :

$$E(\bar{T}_r) = r \cdot \left(\frac{r}{L}\right)^r \int_0^{L/r} t^r dt = \frac{L}{(r+1)} \quad (3.37)$$

$$V(\bar{T}_r) = E(\bar{T}_r^2) - \frac{L^2}{(r+1)^2} = \frac{L^2}{r(r+1)^2(r+2)} \quad (3.38)$$

D'où $p_i(t)$ à l'aide de (3.34)

$$p_i(t) = \frac{1}{(e^\lambda - 1)} \sum_{r=1}^i \frac{(r/\theta)^r t^{r-1}}{(r-1)!} \quad (3.39)$$

et par conséquent la densité discontinue de $\bar{T}$ de (3.31)'

$$q(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta(e^\lambda - 1)} & \text{si } t \in \left] \frac{L}{2}, L \right] \\ \frac{1}{\theta(e^\lambda - 1)} (1 + 2^2 t/\theta) & \text{si } t \in \left] \frac{L}{3}, \frac{L}{2} \right] \\ \frac{1}{\theta(e^\lambda - 1)} (1 + 2^2 t/\theta + \frac{3^3}{2!} (t/\theta)^2) & \text{si } t \in \left] \frac{L}{4}, \frac{L}{3} \right] \\ \text{etc...} \end{cases} \quad (3.40)$$

De façon générale, le moment non centré m_s de $\bar{T}$ s'écrit :

$$m_s = \frac{\theta^{s-1}}{(e^\lambda - 1)} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{L/(i+1)}^{L/i} \sum_{r=1}^i \frac{r^r}{(r-1)!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{r+s-1} \quad (3.41)$$

soit après intégration

$$m_s = \frac{\theta^s}{(e^\lambda - 1)} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=1}^i \frac{e^r \lambda^{r+s}}{(r-1)! (r+s)} \left(\frac{1}{i^{r+s}} - \frac{1}{(i+1)^{r+s}} \right) \quad (3.41)'$$

et ainsi qu'il est démontré dans l'annexe 2 :

$$m_s = \frac{\theta^s}{(e^\lambda - 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+s+1}}{n! (n+1)^s (n+s+1)} \quad (3.42)$$

Cette expression générale permet de déduire les caractéristiques de $\bar{T}$

$$E(\bar{T}) = m_1 \frac{\theta}{(e^\lambda - 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+2}}{(n+2)!} = \theta \left(1 - \frac{\lambda}{e^\lambda - 1} \right) \quad (3.43)$$

$$E(T^2) = m_2 \frac{\theta^2}{(e^\lambda - 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+3}}{n! (n+1)^2 (n+3)} = \frac{\theta^2}{(e^\lambda - 1)} \cdot \mathcal{Z}(\lambda) \quad (3.44)$$

avec

$$\mathcal{Z}'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \sum (\lambda) = \lambda S(\lambda) = \lambda (I(\lambda) - C \log \lambda) \quad (\text{cf. 2.6})$$

$\mathcal{Z}(0)$ étant nulle, on en déduit

$$\mathcal{Z}(\lambda) = \int_0^\lambda x (I(x) - C - \log x) dx$$

et après intégration :

$$\int_0^\lambda x \log x dx = \frac{\lambda^2}{2} \left(\log \lambda - \frac{1}{2} \right) \text{ et } \int_0^\lambda x I(x) dx = \frac{1}{2} (\lambda^2 I(\lambda) - \lambda e^\lambda + (e^\lambda - 1))$$

$$E(T^2) = \frac{\theta^2}{2(e^\lambda - 1)} \left[\lambda^2 (I(\lambda) - \log \lambda - C + \frac{1}{2}) + e^\lambda - 1 - \lambda e^\lambda \right] \quad (3.44)'$$

et par conséquent

$$V(T) = \frac{\theta^2}{2(e^\lambda - 1)} \left[\lambda^2 \left(I(\lambda) - \log \lambda - C + \frac{1}{2} \right) - e^\lambda (1 + \lambda) + 4\lambda + 1 - \frac{2\lambda^2}{e^\lambda - 1} \right] \quad (3.45)$$

L'annexe 3 montre d'ailleurs comment l'on peut retrouver l'espérance et la variance de T à l'aide des caractéristiques liées données par les relations (3.37) et (3.38).

Quant à l'intervalle de confiance $[\theta_{\alpha}, \theta_{1-\alpha}]$ de niveau $1 - 2\alpha$, on montre dans l'annexe 4, après un calcul simple mais fastidieux, que sa borne inférieure, par exemple, soit θ_{α} , est solution de :

$$\frac{1}{(e^{L/\theta_{\alpha}} - 1)} \sum_{i=1}^r \frac{(L/\theta_{\alpha})^i}{i!} \left(1 - \left(\frac{i\bar{t}}{L} \right)^i \right) = \alpha \quad (3.46)$$

où r est l'observation de R^* et $\bar{t}$ celle de $\bar{T}_r$.

Notons enfin le biais relatif de $\bar{T}$.

$$\text{B.R.}(\bar{T}) = \frac{-\lambda}{(e^\lambda - 1)}$$

qui est toujours négatif et varie de -1 à 0 (cf. configuration ci-bas et réf. 4).

Bien qu'estimant sans distorsion la fonction $\theta \left(1 - \frac{L/\theta}{e^{L/\theta} - 1}\right)$ du paramètre θ (cf. (3.43 ci dessus), l'estimateur $\bar{T}$ n'en est pas l'estimateur optimal.

La statistique R^* étant exhaustive et totale, l'application du théorème de Rao-Blackwell donne pour estimateur optimal de $\theta \left(1 - \frac{L/\theta}{e^{L/\theta} - 1}\right)$ la statistique $E(T/R^*)$; espérance de T conditionnée par R^* . D'après la relation (3.37) l'estimateur sans biais de $\theta \left(1 - \frac{L/\theta}{e^{L/\theta} - 1}\right)$ de variance minimale est donc $L/(R^* + 1)$, dont le moment du 2ème ordre s'écrit :

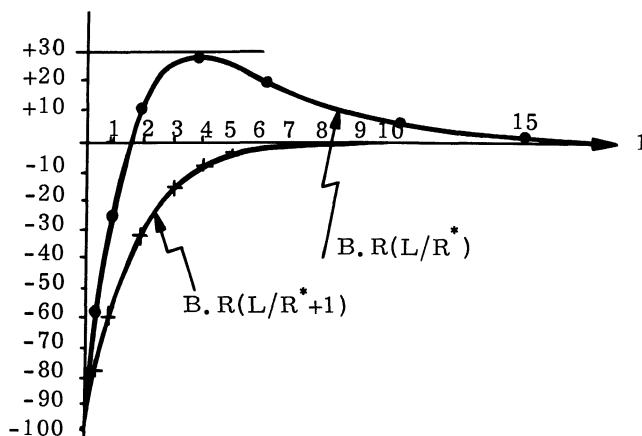
$$\begin{aligned} E \left(\left(\frac{L}{R^* + 1} \right)^2 \right) &= \frac{L^2}{\lambda (e^\lambda - 1)} \sum_{r \geq 1} \frac{\lambda^{r+1}}{r! (r+1)^2} = \frac{\lambda \theta^2}{(e^\lambda - 1)} \sum_{r \geq 1} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1) (r+1)!} = \\ &= \frac{\lambda \theta^2}{(e^\lambda - 1)} (S(\lambda) - \lambda) \end{aligned} \quad (3.48)$$

On retiendra donc pour l'estimateur $L/(R^* + 1)$:

$$E(L/(R^* + 1)) = \theta \left(1 - \frac{\lambda}{e^\lambda - 1}\right) \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} V(L/(R^* + 1)) &= \frac{\theta^2}{(e^\lambda - 1)} \left[\lambda (S(\lambda) - \lambda) - \frac{(e^\lambda - \lambda - 1)^2}{(e^\lambda - 1)} \right] = \\ &= \frac{\theta^2}{(e^\lambda - 1)} \left[\lambda (S(\lambda) - \lambda) - (e^\lambda - 1) + 2\lambda - \frac{\lambda^2}{(e^\lambda - 1)} \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

De même que dans le § (2.3), la comparaison des biais relatifs de L/R et de $L/(R^* + 1)$ en tant qu'estimateurs de θ (cf. relations (3.10) et (3.47) conduit à la configuration graphique suivante (ces relations permettent d'ailleurs de démontrer mathématiquement que le biais relatif de $L/(R^* + 1)$ est inférieur à celui de L/R^* :



λ	1/2	1	2	3	4	5	10	20	∞
B.R. (L/R^*)	-57	-25	13,5	27,5	29,2	26,0	10,8	0,0	0
B.R. $(L/R^* + 1)$	-77,1	-58,2	-31,3	-15,7	-7,5	-3,4	-0,04	0,00	0

Biais relatifs en % selon les valeurs de λ

En se limitant toujours au critère "biais relatif" et contrairement à ce qui se passait dans le § 2.3 où $L/(R + 1)$ était préférable à $L/(R + 2)$ (cf. relation (2.14)), on n'aura ici tendance à préférer L/R^* à $L/(R^* + 1)$ que si λ est inférieur au chiffre approximatif de 2,5 ; on a en effet

$$| \text{B.R.} (L/R^*) | < | \text{B.R.} (L/(R^* + 1)) | \quad \forall \lambda < 2,5 \quad (3.51)$$

On notera qu'il est assez remarquable et plutôt inattendu que le simple fait de tronquer la variable R de la valeur zéro conduise à des résultats aussi fondamentalement différents.

ANNEXE 1

$$\text{Calcul de } S(\lambda) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r \cdot r!}$$

On a :

$$S(\lambda) = \frac{\lambda}{1 \cdot 1!} + \frac{\lambda^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\lambda^3}{3 \cdot 3!} + \dots \text{ et} \quad (A.1.1)$$

$$\frac{\lambda d S(\lambda)}{d\lambda} = \lambda S'(\lambda) = \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots = e^{\lambda} - 1$$

d'où

$$S(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{e^x - 1}{x} dx + K \quad (A.1.2)$$

avec :

$$K = \int_{-\infty}^0 \frac{1 - e^x}{x} dx \text{ puisque } S(0) = 0$$

La constante K peut aussi décrire après quelques transformations :

$$K = \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x} - \left(\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx - \int_1^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \right)$$

soit

$$K = \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x} - C \text{ où } C \text{ est la constante d'Euler [Réf. 5]} \quad (A.1.3)$$

Cela donne :

$$S(\lambda) = -C + \int_{-\infty}^{\lambda} e^x \frac{dx}{x} - \int_1^{\lambda} \frac{dx}{x} = I(\lambda) - C - \text{Log } \lambda \quad (\text{A.1.4})$$

où

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} e^x \frac{dx}{x} \text{ est l'intégrale exponentielle tabulée.}$$

ANNEXE 2

Calcul du moment non centré m_s de $\bar{T}$

On avait déjà trouvé (relation (3.41)'

$$m_s = \frac{\theta^s}{e^\lambda - 1} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^i \frac{n^n \lambda^{n+s}}{(n-1)! (n+s)} \left(\frac{1}{i^{n+s}} - \frac{1}{(i+1)^{n+s}} \right) \quad (\text{A.2.1})$$

Pour $i = j$ et $j+1$, les deux sommes consécutives s'écrivent :

$$\sum_{n=1}^j \frac{n^n \lambda^{n+s}}{(n-1)! (n+s)} \left(-\frac{1}{\cancel{j+1}^{n+s}} + \frac{1}{j^{n+s}} \right) + \sum_{n=1}^{j+1} \frac{n^n \lambda^{n+s}}{(n-1)! (n+s)} \left(\frac{1}{(j+1)^{n+s}} - \frac{1}{(j+2)^{n+s}} \right)$$

et la deuxième de ces sommes se décompose comme suit :

$$\sum_{n=1}^j \frac{n^n \lambda^{n+s}}{(n-1)! (n+s)} \left(\frac{1}{\cancel{j+1}^{n+s}} - \frac{1}{(j+2)^{n+s}} \right) + \frac{(j+1)^{j+1} \lambda^{j+s+1}}{j! (j+s+1)} \left(\frac{1}{(j+1)^{j+s+1}} - \frac{1}{(j+2)^{j+s+1}} \right)$$

Ceci entraîne des compensations de termes entre les 2 sommes (termes barrés) et l'ensemble de ces simplifications étendues aux sommes successives ne laisse subsister que les termes où $n = i$ soit :

$$\frac{\lambda^{s+1}}{s+1} + \frac{\lambda^{s+2}}{(s+2) 2^s} + \frac{\lambda^{s+3}}{2 (s+3) 3^s} + \text{etc.}\dots$$

D'où finalement m_s :

$$m_s = \frac{\theta^s}{e^\lambda - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+s+1}}{n! (n+1) (n+s+1)} \quad (\text{A.2.2})$$

(relation (3.42) du § 3.4)

ANNEXE 3

Espérance et variance de la variable aléatoire $\bar{T}$

Nous nous proposons de montrer dans cette annexe comment l'on peut retrouver les caractéristiques de la variable $\bar{T}$ à l'aide de l'espérance et la variance conditionnelles de $\bar{T}$ données par (3.37) et (3.38)

$$E(\bar{T}/R^* = r) = L/(r + 1) \quad (A.3.1)$$

$$V(\bar{T}/R^* = r) = L^2/[r(r + 1)^2(r + 2)] \quad r = 1, 2, 3, \text{ etc...} \quad (A.3.2)$$

Rappelons pour cela les relations entre les caractéristiques marginales et conditionnelles de $\bar{T}$:

$$E(\bar{T}) = E_{R^*} E(\bar{T}/R^*) \quad (A.3.3)$$

$$V(\bar{T}) = E_{R^*} V(\bar{T}/R^*) + V E_{R^*} \bar{T}/R^*$$

On trouve alors facilement d'après (A.3.3) :

$$E(\bar{T}) = L E(1/(R^* + 1)) = \frac{L}{(e^\lambda - 1)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{(r+1)!} = \frac{\theta(e^\lambda - 1 - \lambda)}{(e^\lambda - 1)},$$

soit

$$E(\bar{T}) = \theta \left(1 - \frac{\lambda}{e^\lambda - 1}\right) \quad (A.3.5)$$

déjà donnée dans le § 3.4, relation (3.43).

Quant à la relation (A.3.4), elle donne

$$V(\bar{T}) = L^2 \left\{ E\left(\frac{1}{R^*(R^* + 1)^2(R^* + 2)}\right) + V\left(\frac{1}{R^* + 1}\right) \right\}$$

En écrivant $\frac{1}{R^*(R^* + 1)^2(R^* + 2)}$ sous la forme $\frac{1}{2R^*} - \frac{1}{2(R^* + 2)} - \frac{1}{(R^* + 1)^2}$,

on a aussi :

$$V(\bar{T}) = L^2 \left\{ E\left(\frac{1}{2R^*}\right) - E\left(\frac{1}{2(R^* + 2)}\right) - E^2\left(\frac{1}{R^* + 1}\right) \right\} \quad (A.3.6)$$

soit d'après l'expression de $E(1/(R^* + 1))$ donnée en (A.3.5)

$$V(\bar{T}) = L^2 \left\{ E\left(\frac{1}{2R^*}\right) - E\left(\frac{1}{2(R^* + 2)}\right) - \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda}{e^\lambda - 1}\right)^2 \right\} \quad (A.3.6)'$$

Il ne reste plus qu'à exprimer les espérances mathématiques de $1/2R^*$ et de $1/2(R^* + 2)$

$$E(1/2 R^*) = \frac{1}{2(e^\lambda - 1)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r \cdot r!} = \frac{S(\lambda)}{2(e^\lambda - 1)} \quad (\text{A.3.7})$$

$$S(\lambda) = I(\lambda) - C - \text{Log } \lambda = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{e^x}{x} dx - C \text{ Log } \lambda \quad (\text{cf. A.1.4}) \quad (\text{A.3.8})$$

Quant à la variable $1/2(R^* + 2)$, son espérance s'écrit :

$$E(1/2(R^* + 2)) = \frac{1}{2\lambda^2(e^\lambda - 1)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^{r+2}}{(r+2) \cdot r!}$$

Pour calculer $A(\lambda) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^{r+2}}{r! (r+2)}$, on remarque que l'on a :

$$\frac{dA(\lambda)}{d\lambda} = A'(\lambda) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^{r+1}}{r!} = \lambda(e^\lambda - 1).$$

D'où, puisque $A(0) = 0$, $A(\lambda) = \int_0^\lambda x(e^x - 1) dx$

On trouve facilement $A(\lambda) = 1 - \lambda^2/2 + e^\lambda(\lambda - 1)$ ce qui donne

$$E\left(\frac{1}{2(R^* + 2)}\right) = \frac{1 - \lambda^2/2 + e^\lambda(\lambda - 1)}{2\lambda^2(e^\lambda - 1)} \quad (\text{A.3.9})$$

et en tenant compte de (A.3.7) et (A.3.9) dans (A.3.6)' :

$$V(\bar{T}) = L^2 \left\{ \frac{S(\lambda)}{2(e^\lambda - 1)} - \frac{1 - \lambda^2/2 + e^\lambda(\lambda - 1)}{2\lambda^2(e^\lambda - 1)} - \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda}{e^\lambda - 1}\right)^2 \right\} \quad (\text{A.3.10})$$

On voit que $V(\bar{T})$ peut aussi décrire

$$V(T) = \frac{\theta^2}{2(e^\lambda - 1)} \left\{ \lambda^2(S(\lambda) + 1/2) - e^\lambda(\lambda + 1) + 4\lambda + 1 - \frac{2\lambda^2}{e^\lambda - 1} \right\} \quad (\text{A.3.10})'$$

expression déjà donnée dans le paragraphe 3.4 (cf. relation 3.47).

ANNEXE 4

Intervalle de confiance pour θ basé sur $\bar{T}$

Rappelons qu'en notant $\text{Prob}(\theta < \theta_\alpha) = \alpha$, le problème revient à trouver θ_α et $\theta_{1-\alpha}$ tels que :

$$\text{Prob}(\theta_\alpha < \theta < \theta_{1-\alpha}) = 1 - 2\alpha \quad (\text{A.4.1})$$

où α est un seuil de probabilité fixé à l'avance.

On peut aussi écrire la relation de détermination de θ_α sous la forme évidente :

$$\int_{\bar{t}}^L q(t) dt = \alpha \quad (\text{A.4.2})$$

où $q(t)$ est la densité de probabilité de $\bar{T}$ prenant les différentes formes

$$\begin{cases} p_i(t) = \text{densité de } T \text{ si } L/(i+1) < t \leq L/i, i = 1, 2, \dots (r-1) \\ p_r(t) = \text{" " " } \bar{t} < t \leq L/r \end{cases} \quad (\text{A.4.3})$$

(r nombre d'événements observés et $\bar{t}$ temps moyen).

En décomposant l'intervalle

$$[\bar{t}, L] \text{ en } \{]\bar{t}, L/r],]L/r, L/(r-1)], \text{ etc.}..]L/3, L/2],]L/2, L] \}$$

où r est le nombre d'événements observés, (A.4.2) s'écrit encore

$$\sum_{i=1}^{r-1} \int_{L/(i+1)}^{L/i} p_i(t) dt + \int_{\bar{t}}^{L/r} p_r(t) dt = \alpha \quad (\text{A.4.4})$$

D'où d'après (3.4.1)

$$\theta \frac{1}{(e^\lambda - 1)} \left[\sum_{i=1}^{r-1} \int_{L/(i+1)}^{L/i} \left[\sum_{n=1}^i \frac{n^n}{(n-1)!} \left(\frac{t}{\theta} \right)^{n-1} \right] dt + \int_{\bar{t}}^{L/r} \left[\sum_{n=1}^r \frac{n^n}{(n-1)!} \frac{(t)^{n-1}}{\theta} dt \right] \right] = \alpha \quad (\text{A.4.4})'$$

Intégrons et remplaçons L par $\lambda \theta$

$$\frac{1}{(e^\lambda - 1)} \left[\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{n=1}^i \frac{(n\lambda)^n}{n!} \left(\frac{1}{i^n} - \frac{1}{(i+1)^n} \right) + \sum_{n=1}^r \frac{(n\lambda)^n}{n!} \left(\frac{1}{r^n} - \left(\frac{\bar{t}}{L} \right)^n \right) \right] = \alpha \quad (\text{A.4.5})$$

Plusieurs simplifications résultent du développement de la première somme entre crochets et il ne reste que

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\lambda^i}{i!} - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{(i\lambda)^i}{i!r^i}$$

c'est-à-dire encore

$$\sum_{i=1}^r \frac{\lambda^i}{i!} - \sum_{i=1}^r \frac{(i\lambda)^i}{i!r^i}.$$

La seconde somme quant à elle s'écrit

$$\sum_{i=1}^r \frac{(i\lambda)^i}{i!r^i} - \sum_{i=1}^r \frac{(i\lambda)^i}{i!} \left(\frac{\bar{t}}{L} \right)^i.$$

D'où la relation donnant λ_α et par conséquent $\theta_\alpha = L/\lambda_\alpha$:

$$\frac{1}{(e^\lambda - 1)} \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_\alpha^i}{i!} \left(1 - \left(\frac{\bar{t}}{L} \right)^i \right) = \alpha \quad (\text{A.4.6})$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KENDALL M.G. - The advanced theory of statistics, Vol. 2 (Charles Griffin, édition 1961, page 34)
- [2] SICHEL H.S. - Estimation of individual accident liability (Contribution libre, 37^e session de l'Institut International de Statistique, Londres, Septembre 1969).
- [3] HAIGHT F.A. - Handbook of the Poisson distribution
- [4] SICHEL H.S. - The statistical estimation of individual accident liability (Traffic Safety Research Review, March 1965)
- [5] WHITTAKER et WATSON - A course of modern analysis (Cambridge University Press, 1902).