

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

G. ROUZET

Essais de conformité en fiabilité les essais tronqués-censurés

Revue de statistique appliquée, tome 20, n° 4 (1972), p. 31-46

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1972__20_4_31_0

© Société française de statistique, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESSAIS DE CONFORMITÉ EN FIABILITÉ

LES ESSAIS TRONQUÉS-CENSURÉS

G. ROUZET

Société Compteurs Schlumberger

- 1/ Introduction
- 2/ Définition de l'essai tronqué-censuré
- 3/ Courbe d'efficacité
- 4/ Durée d'essai cumulée totale moyenne
- 5/ Comparaison au plan d'échantillonnage progressif
- 6/ Conclusion
- 7/ Exemple

1 - INTRODUCTION

Dans l'application d'un plan d'échantillonnage, il arrive parfois que la décision finale soit connue avant que le contrôle ne soit achevé.

Supposons, par exemple, que l'on effectue un contrôle par attributs, selon un plan d'échantillonnage simple défini par un effectif d'échantillon $n = 150$ et un critère d'acceptation $A = 2$, que les objets en cause soient contrôlés l'un après l'autre, et que le 82^{ème} objet prélevé soit le 3^{ème} trouvé défectueux : on sait dès lors que la décision finale sera le rejet, quels que soient les résultats du contrôle des 68 objets restants. On peut donc arrêter le contrôle à ce stade, sans que l'efficacité que l'on avait choisie s'en trouve affectée.

Nous ne pensons pas que l'arrêt du contrôle doive constituer une règle générale, car il peut se faire que le continuer jusqu'à l'effectif prévu présente un intérêt (quantité d'information attendue en marge de la décision, constance de l'effectif des échantillons si le contrôle se répète dans le temps, etc). Mais il est profitable d'utiliser cette possibilité dans le cas où l'économie est recherchée, et où l'on a écarté le choix d'un plan d'échantillonnage progressif.

Les essais de fiabilité destinés à juger de la conformité de dispositifs à un objectif utilisent la méthode statistique des plans d'échantillonnage. Le principe peut donc leur être appliqué, et notre but essentiel est d'étudier une forme d'essai particulière qui peut en résulter.

Nous considérerons dans ce qui suit l'aspect statistique des essais, en laissant de côté les autres données (conditions d'essai, défaillances à prendre en compte, etc) ; par ailleurs, nous supposerons que la grandeur en fonction

de laquelle est exprimée la fiabilité est le temps (ce peut être parfois une autre grandeur, telle qu'un nombre de cycles, et ce qui va être dit s'y applique aussi bien).

Le plan d'échantillonnage met en cause le nombre de dispositifs à placer en essai, le temps et le nombre de défaillances observées.

Dans le cas général, les dispositifs sont mis en essai pour une durée donnée, et le nombre de défaillances observées est comparé au critère d'acceptation. La remarque faite plus haut ne concerne ici que le seul cas du rejet : l'essai peut être arrêté dès que le nombre de défaillances dépasse la valeur du critère d'acceptation.

Dans le cas particulier où l'on sait que les dispositifs étudiés admettent un taux de défaillance constant, la même remarque présente un intérêt plus grand, qu'il convient de préciser, du fait de la portée pratique de cette situation.

Nous supposerons donc dans la suite de l'étude que le taux de défaillance des dispositifs étudiés est constant.

Au concept temps peut alors correspondre la durée d'essai mesurée en temps d'horloge, ou la durée d'essai cumulée pour tous les dispositifs. La seconde possède des avantages qui la font en général préférer. Nous l'avons donc choisie ; cela nous permet en outre de présenter les résultats quantitatifs que l'on trouvera plus loin.

2 - DEFINITION DE L'ESSAI TRONQUE-CENSURE

Deux types de plans d'échantillonnage simple sont bien connus, qui correspondent respectivement aux essais censurés et aux essais tronqués.

Un essai censuré est mené jusqu'à l'obtention d'un nombre donné de défaillances (d) ; au terme de l'essai, on compare la durée d'essai cumulée (x) au critère de décision (L), la décision statistique étant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x < L \text{ rejet} \\ x > L \text{ acceptation} \end{array} \right.$$

Le nombre de dispositifs (n) n'intervient pas dans la définition du plan. Toutefois, lorsque les dispositifs défaillants ne sont ni réparés ni remplacés, ce nombre est soumis à la condition évidente $n \geq d$.

Un essai tronqué est mené jusqu'à l'obtention d'une durée d'essai cumulée donnée (v) ; au terme de l'essai, on compare le nombre de défaillances (k) au critère d'acceptation (A), la décision statistique étant :

$$\left\{ \begin{array}{l} k \leq A \text{ acceptation} \\ k > A \text{ rejet} \end{array} \right.$$

Nous poserons $R = A + 1$; la seconde inégalité s'écrit alors $k \geq R$. Le nombre de dispositifs (n) n'intervient pas dans la définition du plan. Toutefois,

lorsque les dispositifs défaillants ne sont ni réparés ni remplacés, ce nombre doit être tel que la durée v puisse être atteinte (on peut calculer la valeur de n qui correspond à une probabilité donnée que x puisse atteindre v , sur la base d'une estimation du taux de défaillance) ; en toute rigueur, ce nombre est également soumis à la condition évidente $n \geq R$.

La remarque faite au paragraphe précédent conduit alors à la possibilité :

- d'arrêter l'essai censuré lorsque, avant que le nombre de défaillances d ne soit obtenu, la durée d'essai cumulée atteint le critère de décision (la décision étant donc l'acceptation, puisque la poursuite de l'essai conduirait à constater $x > L$).

- d'arrêter l'essai tronqué lorsque, avant que la durée d'essai cumulée v ne soit obtenue, le nombre de défaillances atteint R (la décision étant alors le rejet).

La représentation graphique donnée par les figures 1 illustre la modification apportée dans l'un et l'autre cas, aux zones du quart de plan des couples (x, k) - x et k étant respectivement la durée d'essai cumulée et le nombre de défaillances, à un instant quelconque de l'essai - correspondant aux décisions d'acceptation et de rejet :

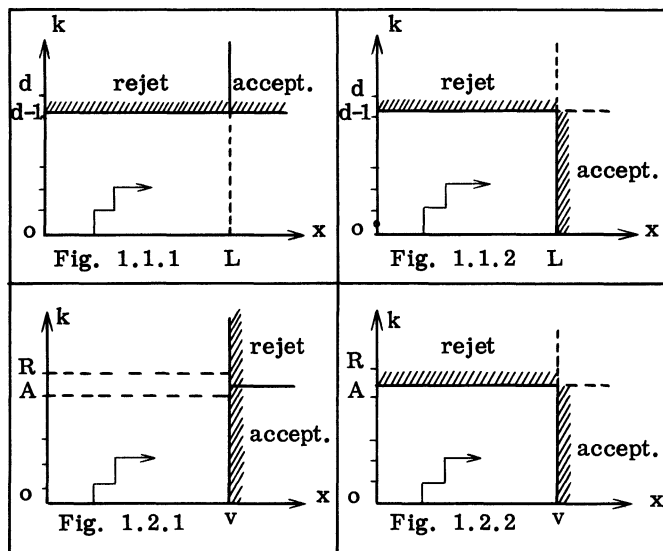


Figure 1

- pour l'essai censuré, la figure 1.1.1 devient la figure 1.1.2.

- pour l'essai tronqué, la figure 1.2.1 devient la figure 1.2.2.

La comparaison de ces quatre figures prend tout son intérêt lorsque les valeurs données aux caractéristiques sont telles que l'efficacité soit analogue dans les différents cas.

On est alors amené à choisir un couple de points au plus près desquels devront passer les courbes d'efficacité, et à rechercher les caractéristiques correspondantes des quatre règles de contrôle.

Or, on sait - et l'annexe I rappelle les éléments qui permettent de l'établir - que les caractéristiques de l'essai censuré et de l'essai tronqué se correspondent dans ces conditions par les identités :

$$\begin{cases} d \equiv R \\ L \equiv v \end{cases}$$

et que leurs courbes d'efficacité sont alors rigoureusement identiques.

Comme, par ailleurs, nous n'avons introduit la notion d'arrêt de l'essai dès que la décision est connue, que parce que la courbe d'efficacité n'en est pas modifiée, nous arrivons finalement au résultat suivant :

Les quatre systèmes de contrôle représentés sur les figures 1 ont rigoureusement la même efficacité lorsqu'on établit la correspondance :

$$\begin{cases} d = R \\ L = v \end{cases}$$

De plus, on remarque que les figures 1.1.2 et 1.2.2 sont alors identiques - la représentation commune étant la figure 3 - ce qui réduit à trois le nombre des formes d'essais étudiées :

- l'essai censuré
- l'essai tronqué
- l'essai unique dérivé des précédents, que nous appellerons "essai tronqué-censuré".

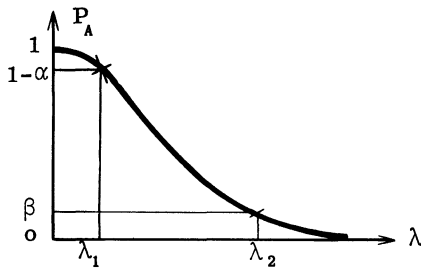


Figure 2

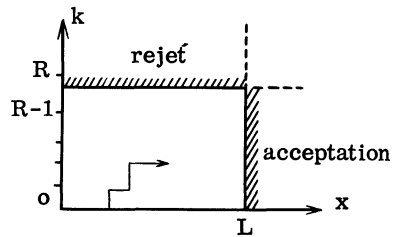


Figure 3

Un essai tronqué-censuré est donc défini par un plan d'échantillonnage comportant deux critères de décision L et R, et dont la règle s'énonce ainsi :

L'essai est mené jusqu'à l'obtention de l'un des deux résultats suivants :

- la durée d'essai cumulée atteint la valeur du critère L : la décision est alors l'acceptation.

- le nombre de défaillances atteint la valeur du critère R : la décision est alors le rejet.

Le nombre de dispositifs (n) n'intervient pas dans la définition du plan. Toutefois, lorsque les dispositifs défaillants ne sont ni réparés ni remplacés, ce nombre est soumis à la condition évidente $n \geq R$.

(La détermination des valeurs de L et R correspondant à une efficacité donnée est rappelée dans l'annexe II ; on trouvera, de plus, quelques valeurs numériques dans la table jointe.)

3 - COURBE D'EFFICACITE

Le titre de ce paragraphe est justifié par l'importance de la connaissance de la courbe d'efficacité associée à la définition d'un plan d'échantillonnage. Mais puisque les considérations qui nous ont amenés à la définition de l'essai tronqué-censuré se sont appuyées sur cette courbe même, il n'est nécessaire ici que de rappeler la relation qui permet de la définir numériquement. On trouvera cette relation dans l'annexe II.

4 - DUREE D'ESSAI CUMULEE TOTALE MOYENNE

Du fait du caractère économique du problème, il est tout particulièrement intéressant d'étudier cet élément du coût de l'essai que constitue la durée d'essai cumulée atteinte au moment où la décision est prise (x_p). Nous appellerons cette caractéristique "durée d'essai cumulée totale" et nous étudierons sa valeur moyenne $E(x_p)$ en fonction du taux de défaillance réel des dispositifs.

L'expression de $E(x_p)$ est donnée dans l'annexe II (on en trouvera, si on le désire, la justification en annexe III).

Il est naturel que la valeur de $E(x_p)$ rejoigne la valeur de la même caractéristique de l'essai tronqué lorsque le taux de défaillance réel est petit, et la valeur de la même caractéristique de l'essai censuré lorsque le taux de défaillance réel est grand. La figure 4 illustre au moyen d'un exemple l'évolution de $E(x_p)$ entre ces deux tendances limites, en fonction du taux de défaillance réel.

On voit que la valeur de $E(x_p)$ correspondant à l'essai tronqué-censuré est pratiquement égale, ou un peu inférieure, à la plus petite des deux valeurs correspondant à l'essai censuré et à l'essai tronqué.

Remarque :

Il est assez usuel de caractériser la fiabilité de dispositifs par l'inverse du taux de défaillance (MTBF ou MTTF) ; pour rendre compte des courbes correspondantes la figure 4 bis a été tracée, avec les mêmes valeurs numériques que celles de la figure 4.

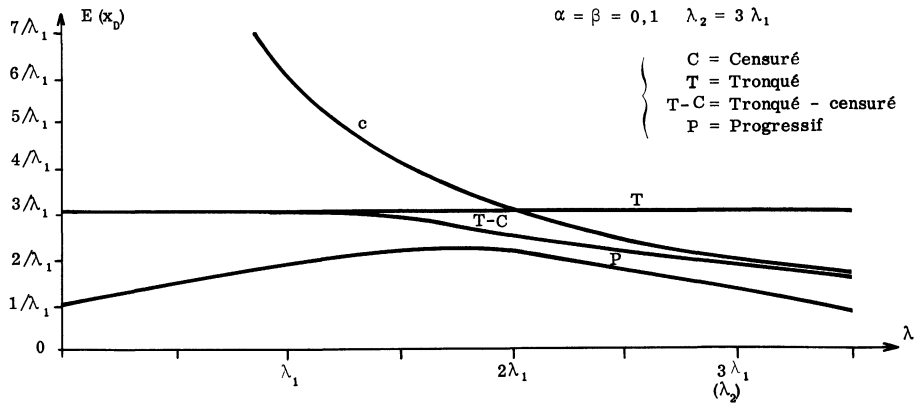


Figure 4

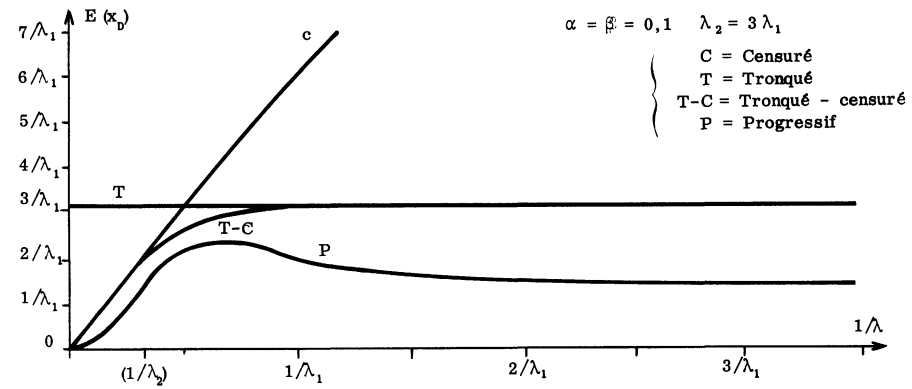


Figure 4 bis

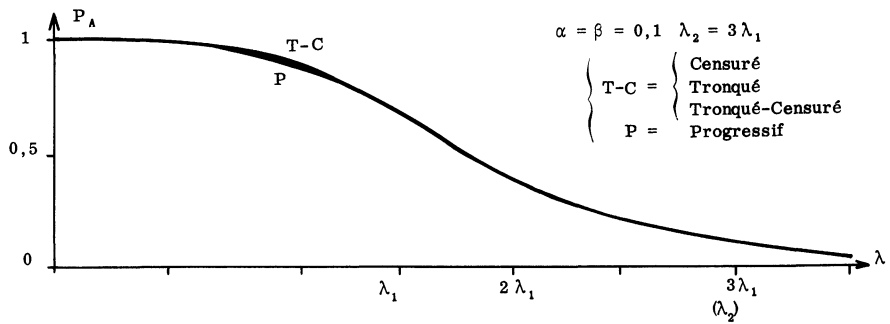


Figure 5

5 - COMPARAISON AU PLAN D'ECHANTILLONNAGE PROGRESSIF

Au couple de points (au plus près desquels doit passer la courbe d'efficacité) qui doit être choisi pour que soient définis les plans d'échantillonnage considérés ci-dessus, correspond également un plan d'échantillonnage progressif - selon la méthode de Wald - équivalent aux précédents, du point de vue statistique (la figure 5 permet de comparer les courbes d'efficacité dans le même exemple numérique que celui pour lequel a été tracée la figure 4).

On connaît l'intérêt du plan progressif, du point de vue du coût moyen d'un essai, en contrepartie d'une application un peu moins aisée, puisque la comparaison des résultats aux critères de décision doit être tenue à jour d'une manière permanente.

Il est donc important de pouvoir comparer les caractéristiques $E(x_p)$ de ces deux plans.

La comparaison est possible sur la figure 4 pour l'exemple considéré, la courbe représentant $E(x_p)$ ayant également été tracée pour l'essai progressif.

Du point de vue de cette caractéristique, l'essai progressif reste le plus économique.

L'essai tronqué-censuré n'est donc pas appelé à être préféré dans tous les cas. Son intérêt est d'offrir une possibilité supplémentaire, avec l'avantage de présenter des caractéristiques intermédiaires entre celles des plans simples et celles du plan progressif.

Le choix entre l'essai tronqué-censuré et l'essai progressif s'appuiera sur des considérations pratiques de même nature que celles qui président habituellement au choix entre plan simple et plan progressif équivalents.

6 - CONCLUSION

Ayant remarqué qu'il est possible d'arrêter un essai de conformité dès que la décision finale est connue - rien ne pouvant la remettre en cause - sans que la courbe d'efficacité du plan d'échantillonnage soit modifiée, nous avons défini, dans le domaine des essais de fiabilité de dispositifs dont le taux de défaillance est constant, l'essai tronqué-censuré.

La comparaison de ses caractéristiques à celles des essais censuré, tronqué et progressif équivalents, fait apparaître l'essai tronqué-censuré comme une solution intermédiaire entre les deux premiers types, desquels il reste très proche dans sa définition, d'une part, et le troisième, moins aisé à mettre en oeuvre mais plus économique en termes de durée d'essai, d'autre part.

Si l'on veut tenter une conclusion de caractère général, il semble donc que l'on puisse admettre que, dans les cas où l'on attache une importance suffisante à des éléments complémentaires vis-à-vis du but principal qu'est la décision statistique, on puisse être amené à mettre en oeuvre un essai

censuré ou un essai tronqué ; et que, dans les cas où l'économie est recherchée avant tout, on doit s'orienter vers un essai tronqué-censuré ou un essai progressif.

Le choix entre ces deux derniers essais est alors d'une autre nature : il doit faire intervenir à la fois les éléments intrinsèques de leurs coûts et les implications pratiques de leur mise en oeuvre, dans le but de permettre la meilleure adaptation à chaque situation particulière.

7 - EXEMPLE

Un lot de 25 exemplaires d'un équipement électro-mécanique fabriqué en série, doit être soumis à un essai de conformité en fiabilité.

L'objectif, et les autres données de l'essai, ont été définis sur la base de l'information disponible sur la fiabilité de l'équipement, de données économiques d'exploitation, et des considérations économiques et pratiques relatives à la mise en oeuvre de l'essai.

En particulier, l'information disponible sur la fiabilité de l'équipement comprend :

- une prédiction de fiabilité : Du fait de la mise en jeu d'un processus de déverminage en fabrication, et d'un programme de maintenance préventive en exploitation, l'hypothèse d'un taux de défaillance constant a pu être retenue a priori. L'étude quantitative a conduit à l'évaluation suivante de ce taux de défaillance :

$$\lambda = 1,8 \times 10^{-4}/h$$

- des résultats d'observation du comportement en exploitation d'autres exemplaires de cet équipement : l'analyse statistique de ces résultats ne conduit pas au rejet de l'hypothèse de la constance du taux de défaillance; elle autorise à maintenir l'évaluation initiale.

Les données de l'essai sont les suivantes :

1/ Le niveau de fiabilité acceptable est $\lambda_1 = 2 \times 10^{-4}/h$. Il lui est associé le risque du fournisseur $\alpha = 0,10$.

Le niveau de fiabilité limite est $\lambda_2 = 6 \times 10^{-4}/h$. Il lui est associé le risque du client $\beta = 0,10$.

2/ Les 25 équipements participent à l'essai.

3/ Les équipements défaillants seront réparés et remis en essai.

La défaillance d'un équipement n'entraîne d'interruption de l'essai que pour ce seul équipement. La durée de l'interruption est au maximum de 10 heures.

4/ La durée admissible pour l'essai est de 4 semaines, soit 28 jours. L'essai peut être mené sans interruption. On dispose donc de 672 heures. Il est impératif de ne pas dépasser cette durée.

5/ Dans le cas où le lot serait accepté, il serait souhaitable que la durée de l'essai soit voisine de la durée maximale.

Dans le cas où le lot serait rejeté, il serait souhaitable que la durée de l'essai soit aussi courte que possible.

Les données du point 5 orientent a priori vers le choix d'un essai tronqué-censuré.

En fait, il faut s'assurer de la compatibilité des diverses données vis-à-vis du choix d'un type d'essai.

Ces données étant telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 3 \\ \alpha = \beta = 10 \% \end{array} \right.$$

les courbes de la figure 4 permettent d'obtenir directement les valeurs suivantes de $E(x_D)$ pour $\lambda = 1,8 \times 10^{-4}/h$:

- Pour l'essai censuré :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x_D < \infty \\ E(x_D) \approx \frac{6,6}{\lambda_1} = \frac{6,6}{2 \times 10^{-4}/h} = 33\ 000\ h \end{array} \right.$$

- Pour l'essai tronqué :

$$x_D \approx \frac{3,1}{\lambda_1} = \frac{3,1}{2 \times 10^{-4}/h} = 15\ 500\ h$$

- Pour l'essai tronqué-censuré :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x_D < 15\ 500\ h \\ E(x_D) \approx 15\ 500\ h \end{array} \right.$$

- Pour l'essai progressif :

$$\begin{array}{l} 0 < x_D < \infty \\ E(x_D) \approx \frac{1,9}{\lambda_1} = \frac{1,9}{2 \times 10^{-4}/h} = 9\ 500\ h \end{array}$$

Remarque :

Il est habituel d'utiliser un essai progressif tronqué, la troncature étant telle que l'efficacité se trouve peu modifiée. Ainsi la Spécification Générale CCT "Fiabilité des Equipements Electroniques" donne pour les valeurs numériques considérées ici, un plan progressif tronqué à :

$$x_D = \frac{3,45}{\lambda_1} = 17\ 250\ h$$

Le nombre maximal d'heures cumulées correspondant aux 672 heures disponibles pour l'essai est : $25 \times 672\ h = 16\ 800\ h$. Il s'ensuit que :

- l'essai censuré et l'essai progressif ne sont pas applicables (l'essai progressif tronqué doit être également, par prudence, éliminé).

- l'essai tronqué est applicable. En effet, cet essai est défini par

$$v = 15\ 500\ \text{h} \quad A = 5 \quad (R = 6)$$

de sorte que le nombre maximal de défaillances donnant lieu à réparation est 5, d'où une durée cumulée maximale d'interruption de $5 \times 10\ \text{h} = 50\ \text{h}$. La somme des durées cumulées : $15\ 500\ \text{h} + 50\ \text{h} = 15\ 550\ \text{h}$ est inférieure à $16\ 800\ \text{h}$.

- l'essai tronqué-censuré est applicable afortiori, et répond au point 5 des données.

Dans cet exemple, l'essai tronqué-censuré est finalement le seul à satisfaire à l'ensemble des données.

On choisira donc l'essai tronqué-censuré :

- défini par (voir la table) :

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \frac{3,1}{\lambda_1} = 15\ 500\ \text{h} \\ R = 6 \end{array} \right.$$

- dont l'efficacité est donnée en fonction de λ par la courbe de la figure 5, où les abscisses sont lues en sachant que $\lambda_1 = 2 \times 10^{-4}/\text{h}$.

- dont la caractéristique $E(x_p)$ est donnée en fonction de λ par la courbe de la figure 4, où les abscisses et les ordonnées sont lues en sachant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \times 10^{-4}/\text{h} \\ 1/\lambda_1 = 5\ 000\ \text{h} \end{array} \right.$$

En particulier, on peut préciser par le calcul que :

. pour $\lambda = 2 \times 10^{-4}/\text{h}$ on a $E(x_p) \approx 15\ 200\ \text{h}$

. pour $\lambda = 6 \times 10^{-4}/\text{h}$ on a $E(x_p) \approx 9\ 700\ \text{h}$

. pour $\lambda = 20 \times 10^{-4}/\text{h}$ on a $E(x_p) \approx 3\ 000\ \text{h}$

Ainsi, si λ est inférieur à $\lambda_1 = 2 \times 10^{-4}/\text{h}$, le temps nécessaire pour accomplir l'essai sera de l'ordre de 23 jours, et si λ est supérieur à λ_2 le temps d'essai sera sensiblement diminué : pour $\lambda = 20 \times 10^{-4}/\text{h}$, sa valeur moyenne est de l'ordre de 5 jours.

ANNEXE I

Essai censuré et essai tronqué satisfaisant au même couple de points de la courbe d'efficacité

Soient :

- λ la valeur réelle du taux de défaillance des dispositifs
- P_A la probabilité d'accepter
- $(\lambda_1, 1 - \alpha)$ et (λ_2, β) les deux points de la courbe d'efficacité choisis (figure 2)
- $\chi_p^2(v)$ le fractile d'ordre p de la loi de χ^2 à v degrés de liberté
- $I_a(q)$ la valeur de la fonction Γ incomplète :

$$I_a(q) = \frac{\int_0^a e^{-u} u^{q-1} du}{\int_0^\infty e^{-u} u^{q-1} du}$$

1/ On montre que la loi de probabilité de la durée d'essai cumulée x au moment où se produit la d ième défaillance, est telle que la quantité $2\lambda x$ suit une loi de χ^2 à $2d$ degrés de liberté :

$$2\lambda x = \chi^2(2d)$$

Il est facile d'en déduire que les caractéristiques d et L du plan simple correspondant à l'essai censuré, sont les solutions du système :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 L = \chi_\alpha^2(2d) \\ 2\lambda_2 L = \chi_{1-\beta}^2(2d) \end{cases}$$

(d devant être entier, on retiendra la solution la plus approchée)
et que l'équation de la courbe d'efficacité correspondante est :

$$P_A = 1 - I_{\lambda L}(d)$$

2/ On montre que la loi de probabilité du nombre de défaillances k au moment où la durée d'essai cumulée est v , est la loi de Poisson de moyenne λv . Il s'ensuit que :

$$\sum_0^A P_k = 1 - I_{\lambda v}(A + 1)$$

ou encore, en posant :

$$\begin{aligned} \sum_0^A P_k &= \Phi \\ 2\lambda v &= \chi_{1-\Phi}^2(2A + 2) \end{aligned}$$

Il est facile d'en déduire que les caractéristiques v et A du plan simple correspondant à l'essai tronqué, sont les solutions du système :

$$\begin{cases} 2 \lambda_1 v = \chi_\alpha^2 (2A + 2) \\ 2 \lambda_2 v = \chi_{1-\beta}^2 (2A + 2) \end{cases}$$

(A devant être entier, on retiendra la solution la plus approchée) et que l'équation de la courbe d'efficacité correspondante est :

$$P_A = 1 - I_{\lambda v} (A + 1)$$

3/ On constate donc que les caractéristiques des plans des deux essais se correspondent par les identités :

$$\begin{cases} d \equiv A + 1 \\ L \equiv v \end{cases}$$

Les deux courbes d'efficacité sont alors confondues, ce qui permet de dire que les deux essais sont équivalents du point de vue statistique.

4/ En introduisant le critère de rejet $R = A + 1$ du plan simple correspondant à l'essai tronqué, les identités ci-dessus s'écrivent :

$$\begin{cases} d \equiv R \\ L \equiv v \end{cases}$$

ANNEXE II

Caractéristiques du plan d'échantillonnage correspondant à l'essai tronqué-censuré.

Avec les mêmes notations qu'à l'annexe I, les caractéristiques du plan d'échantillonnage correspondant à l'essai tronqué-censuré sont les suivantes :

1 - Définition

Les valeurs des critères de décision L et R sont les solutions du système :

$$\begin{cases} 2 \lambda_1 L = \chi_\alpha^2 (2R) \\ 2 \lambda_2 L = \chi_{1-\beta}^2 (2R) \end{cases}$$

(Elles correspondent aux caractéristiques de l'essai censuré par les relations $R \equiv d$ et $L \equiv L$ et aux caractéristiques de l'essai tronqué par $L \equiv v$ et $R \equiv R = A + 1$).

2 - Courbe d'efficacité

La courbe d'efficacité est définie par la relation :

$$P_A = 1 - I_{\lambda L}(R)$$

Remarque :

A une ordonnée P_A donnée correspond l'abscisse λ telle que :

$$2 \lambda L = \chi_{1-P_A}^2 \quad (2R)$$

3 - Durée d'essai cumulée totale moyenne

La durée d'essai cumulée totale (x_D) - valeur de x au moment où la décision statistique est prise, que celle-ci soit l'acceptation ou le rejet, au terme de l'essai - est une variable aléatoire, dont la loi de probabilité dépend du taux de défaillance réel (λ) des dispositifs.

Le principe du calcul de la moyenne $E(x_D)$ de cette loi de probabilité fait l'objet de l'annexe III. L'expression de $E(x_D)$ est :

$$E(x_D) = \frac{R}{\lambda} I_{\lambda L}(R + 1) + L [1 - I_{\lambda L}(R)]$$

Remarques :

1/ Les valeurs de $E(x_D)$ pour les autres plans sont :

$$\text{- essai censuré : } E(x_D) = \frac{R}{\lambda}$$

$$\text{- essai tronqué : } E(x_D) = L \text{ (puisque } x_D = L, \text{ et ceci quel que soit } \lambda)$$

L'étude de $E(x_D)$, pour l'essai tronqué-censuré, montre que l'on a simultanément :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(x_D) < \frac{R}{\lambda} \\ E(x_D) < L \end{array} \right.$$

et que les formes limites de $E(x_D)$ pour les valeurs extrêmes de λ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \rightarrow 0 \Rightarrow E(x_D) \rightarrow L \\ \lambda \rightarrow \infty \Rightarrow E(x_D) \rightarrow \frac{R}{\lambda} \end{array} \right.$$

résultats auxquels on pouvait s'attendre de par la conception même de ce type d'essai.

2/ Les valeurs de $E(x_D)$ pour le plan progressif correspondant au même couple de points $[(\lambda_1, 1 - \alpha), (\lambda_2, \beta)]$ de la courbe d'efficacité, ne peuvent être écrites avec une relative simplicité que pour $\alpha = \beta$; dans ce cas, on a :

$$E(x_D) = 2 h \frac{P_A - \frac{1}{2}}{s - \lambda}$$

où $P_A(\lambda)$ est la courbe d'efficacité définie par :

$$\lambda = \frac{s}{h} \frac{\ln \left(\frac{P_A}{1 - P_A} \right)}{\left(\frac{P_A}{1 - P_A} \right)^{\frac{1}{h}} - 1}$$

avec

$$h = \frac{\ln \left(\frac{1 - r}{r} \right)}{\ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)} \quad \text{où } r = \alpha = \beta$$

$$s = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)}$$

h et s étant les paramètres des droites d'acceptation ($k = -h + sx$) et de rejet ($k = h + sx$).

3/ La figure 4 montre la variation de $E(x_D)$ en fonction de λ pour les quatre types d'essais, dans le cas particulier pris comme exemple où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \beta = 10 \% \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 3 \end{array} \right.$$

On a alors (λ_1 étant une donnée) :

- pour l'essai censuré ($d = 6$; $L = \frac{3,1}{\lambda_1}$) :

$$E(x_D) = \frac{6}{\lambda}$$

- pour l'essai tronqué ($v = \frac{3,1}{\lambda_1}$; $A = 5$) :

$$E(x_D) = \frac{3,1}{\lambda_1}$$

- pour l'essai tronqué-censuré ($L = \frac{3,1}{\lambda_1}$; $R = 6$) :

$$E(x_D) = \frac{6}{\lambda} \frac{I_{3,1\lambda}}{\lambda_1} (7) + \frac{3,1}{\lambda} \left[1 - \frac{I_{3,1\lambda}}{\lambda_1} (6) \right]$$

- pour l'essai progressif ($h = 2$; $s = 1,820 \lambda_1$)

$$E(x_D) = \frac{1}{\lambda_1} \frac{4 P_A - 2}{1,820 - \frac{\lambda}{\lambda_1}}$$

avec :

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = 0,910 \frac{\ln\left(\frac{P_A}{1 - P_A}\right)}{\sqrt{\frac{P_A}{1 - P_A} - 1}}$$

ANNEXE III

Calcul de $E(x_D)$ pour l'essai tronqué-censuré

On considère d'abord le critère R seul (essai censuré) et on appelle x_R la durée d'essai cumulée au moment de la R ième défaillance. On sait que la quantité $2 \lambda x_R$ suit la loi de χ^2 à $\nu = 2R$ degrés de liberté :

$$2 \lambda x_R = \chi^2(2R)$$

c'est-à-dire que la loi de x_R a pour expression :

$$f(x_R) dx_R = \frac{\lambda^R}{\Gamma(R)} e^{-\lambda x_R} x_R^{R-1} dx_R$$

On introduit alors le second critère L ; il s'ensuit que :

$$\begin{cases} x_D = x_R & \text{si } x_R < L \\ x_D = L & \text{si } x_R > L \end{cases}$$

d'où :

$$E(x_D) = \int_0^L x_R f(x_R) dx_R + L \int_L^\infty f(x_R) dx_R$$

On établit alors que :

$$\begin{aligned} \int_0^L f(x_R) dx_R &= I_{\lambda L}(R) \\ \int_0^L x_R f(x_R) dx_R &= \frac{R}{\lambda} I_{\lambda L}(R + 1) \end{aligned}$$

d'où finalement :

$$E(x_D) = \frac{R}{\lambda} I_{\lambda L}(R + 1) + L [1 - I_{\lambda L}(R)]$$

TABLE

Valeurs des critères L (acceptation) et R (rejet) des plans tronqués-censurés correspondant à :

- $\alpha = \beta = 5 \%$ ou $\alpha = \beta = 10 \%$

- quelques valeurs du rapport λ_2/λ_1

Les valeurs de L sont exprimées en fonction du niveau acceptable (λ_1) pour le taux de défaillance réel.

λ_2/λ_1	$\alpha = \beta = 5 \%$		$\alpha = \beta = 10 \%$	
	L	R	L	R
2	$15,7/\lambda_1$	23	$9,4/\lambda_1$	14
2,5	$7,7/\lambda_1$	13	$4,7/\lambda_1$	8
3	$4,7/\lambda_1$	9	$3,1/\lambda_1$	6
4	$2,6/\lambda_1$	6	$1,7/\lambda_1$	4
5	$1,9/\lambda_1$	5	$1,1/\lambda_1$	3