

J. VALEMBOIS

Les nombres de Stirling et de Bernoulli dans un problème de sondage

Revue de statistique appliquée, tome 20, n° 1 (1972), p. 115-116

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1972__20_1_115_0

© Société française de statistique, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES NOMBRES DE STIRLING ET DE BERNOULLI DANS UN PROBLÈME DE SONDAGE

J. VALEMBOS

R. S. A. Vol. XIX n° 1

ERRATA

Dans notre article "Les nombres de Stirling et de Bernoulli dans un problème de sondage" publié dans le Vol. XIX n° 1 (1971), on trouve dans le § 5, page 93, une erreur. La variance de l'estimateur $\bar{x}'' = \frac{1}{E(n_d)} \sum_{s_d} x_i$ est :

$$V(\bar{x}'') = E[V(\bar{x}''/n_d)] + V[E(x''/n_d)]$$

Le second terme a été oublié. Il faut donc rajouter à

$$V(\bar{x}'') = \frac{\sigma^2}{N} \frac{\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n}{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]^2}$$

la quantité

$$V \frac{n_d m}{E(n_d)} = \frac{m^2}{[E(n_d)]^2} V(n_d) = \frac{m^2 \left[\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2n} + N^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \right]}{N \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]^2}$$

ce qui donne la vraie valeur de $V(\bar{x}'')$

$$V(\bar{x}'') = \frac{\sigma^2 \left[\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \right] + m^2 \left[\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n - N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2n} + N^2 \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n \right]}{N \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]^2}$$

Pour n fixé et N grand le développement limité de $V(\bar{x}'')$ est :

$$V(\bar{x}'') \# \frac{\sigma^2}{n} \left[1 - \frac{n-1}{2N} + \frac{(n-1)(n-11)}{12N^2} \right] + \frac{m^2}{n} \left[\frac{n-1}{2N} - \frac{(n-1)(n-2)}{3N^2} \right]$$

Pour $n \ll N$, $V(\bar{x}'')$ a pour expression approchée :

$$V(\bar{x}'') \approx \frac{\sigma^2}{n} - \frac{n-1}{2nN} [\sigma^2 - m^2]$$

Dans les mêmes conditions : $n \ll N$, l'estimateur \bar{x}'' sera meilleur que l'estimateur du sondage bernoullien \bar{x} si $\frac{\sigma}{|m|} > 1$.

Pour comparer \bar{x}' et \bar{x}'' cherchons une expression approchée de $V(\bar{x}'') - V(\bar{x}')$ pour n fixé et N grand

$$V(\bar{x}'') - V(\bar{x}') \approx \frac{\sigma^2}{n} - \frac{n-1}{2nN} [\sigma^2 - m^2] - \frac{\sigma^2}{N-1} \left[\frac{N}{n} - \frac{1}{2} + \frac{n-1}{12N} \right]$$

$$V(\bar{x}'') - V(\bar{x}') \approx \frac{(n-1)m^2 - \sigma^2}{2nN}$$

L'estimateur \bar{x}'' est alors meilleur que \bar{x}' si $\frac{\sigma}{|m|} > \sqrt{n-1}$

Quant à la comparaison de \bar{x}'' et de l'estimateur du sondage exhaustif \bar{x}_1 , la vraie valeur de $V(\bar{x}'')$ étant supérieure à celle donnée dans l'article, on retrouve que \bar{x}'' est toujours moins efficace que \bar{x}_1 , quels que soient n et N .

En conclusion, les positions des variances des quatre estimateurs dépendent de la valeur du coefficient de variation pour $n \ll N$:

$$\text{si } \frac{\sigma}{|m|} > \sqrt{n-1} \quad V(\bar{x}_1) < V(\bar{x}'') < V(\bar{x}') < V(\bar{x})$$

$$\text{si } 1 < \frac{\sigma}{|m|} < \sqrt{n-1} \quad V(\bar{x}_1) < V(\bar{x}') < V(\bar{x}'') < V(\bar{x})$$

$$\text{si } \frac{\sigma}{|m|} < 1 \quad V(\bar{x}_1) < V(\bar{x}') < V(\bar{x}) < V(\bar{x}'')$$