

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

MAURICE GARLET

## **Une définition géométrique de la probabilité binomiale**

*Revue de statistique appliquée*, tome 19, n° 2 (1971), p. 49-65

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1971\\_\\_19\\_2\\_49\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1971__19_2_49_0)

© Société française de statistique, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UNE DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE DE LA PROBABILITÉ BINOMIALE <sup>(1)</sup>

Maurice GARLET \*

Electricité de France, Etudes Economiques Générales

## *Présentation*

*Les questions de disponibilité des systèmes isolés de production d'énergie tels qu'il en existe outre-mer nous ont amené notamment à réfléchir sur la loi binomiale appliquée au domaine des "petits nombres" où l'approximation normale ne peut plus servir, même de simple guide.*

*Aussi avons-nous, au premier chef, développé l'aspect combinatoire. Tout en enrichissant un formulaire traditionnellement succinct, cela nous a fourni le support d'une définition géométrique de la loi binomiale.*

*D'un autre côté, nous avons cultivé l'interpolation comme fil conducteur pour saisir l'allure des phénomènes. Nous avons ainsi mis en évidence des liens avec les "fonctions spéciales" de l'Analyse.*

*Le titre du premier des 2 articles publiés dans la Revue<sup>(1)</sup> "Disponibilités et défaillances d'un système homogène de production. Première partie : définition et étude analytique du modèle simple" ne laissait sans doute, sous son prétexte technique précis, pas suffisamment voir la démarche théorique plus générale.*

*Cette dernière ayant en outre gagné depuis en unité, cela nous a décidé à en rédiger un exposé synthétique dégagé des applications<sup>(2)</sup>.*

-----  
(1) avec une révision du formulaire du binôme comme suite aux deux articles parus en 1969 Volume XVII n° 3 et 1970 Volume XVIII n° 1.

(2) dans lequel nous revenons à des notations plus usuelles en Calcul des Probabilités. Pour faciliter la lecture, les démonstrations, quand elles sont données, font l'objet de notes indicées par une lettre. Les notes indicées par des chiffres contiennent de simples commentaires, explications ou références.

## THEME DE L'ETUDE - NOTATIONS

Prenant pour thème de l'étude une alternative répétée de Bernoulli, nous désignerons assez classiquement par :

- $p$  et  $q$  les probabilités respectives -complémentaires- des 2 issues possibles  $a$  et  $b$  de l'alternative,  
 $n$  le nombre total d'épreuves,  
 $v$  le nombre d'épreuves d'issue  $a$ ,  
 $\rho = n - v$  le nombre d'épreuves d'issue  $b$ ,

et nous nous intéresserons à la fonction arithmétique :

$$\begin{aligned} I_v^\rho(p) &= \Pr \{ \text{au moins } v \text{ issues } a \text{ en } n \text{ épreuves} \} \\ &= \Pr \{ \text{au plus } \rho \text{ issues } b \text{ en } n \text{ épreuves} \}, \end{aligned}$$

probabilité de succès relatif de l'expérience par rapport à l'issue  $a$ .

Nous considérerons aussi la probabilité complémentaire

$$\begin{aligned} 1 - I_v^\rho(p) &= F_v^\rho(p) = \Pr \{ \text{moins de } v \text{ issues } a \text{ en } n \text{ épreuves} \} \\ &= \Pr \{ \text{plus de } \rho \text{ issues } b \text{ en } n \text{ épreuves} \}, \end{aligned}$$

probabilité d'échec relatif de l'expérience par rapport à l'issue  $a$ , qui ne diffère pas de la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$  = nombre d'issues  $a$  en  $n$  épreuves.

Une expression bien connue de  $I_v^\rho(p)$  s'obtient à partir du développement du binôme  $(p + q)^n$  dont on prend les  $(\rho + 1)$  premiers termes :

$$(1) \quad I_v^\rho(p) = p^n + C_n^1 p^{n-1} q + \dots + C_n^\rho p^v q^\rho.$$

## PREMIERE PARTIE

### COMBINATOIRE ET GEOMETRIE ;

### DEFINITIONS IMPLICITES DES $I_v^\rho(p)$

#### 1.1 - TABLEAU DES NOMBRES $I_v^\rho$ (ou $F_v^\rho$ )

Pour  $p$  (ou  $q$ ) donné, on dresse un tableau rectangulaire où chaque nombre  $I_v^\rho$  occupe :

- la  $v^{\text{ème}}$  ligne à partir du bas,
- la  $\rho^{\text{ème}}$  ligne à partir de la gauche (voir figure 1).

Des considérations de symétrie conduisent à prolonger ce tableau par une colonne  $\rho = -1$ . Les nombres de bordure ont des valeurs tantôt égales

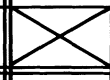
|            |   |                                                                                   |   |   |   |   |
|------------|---|-----------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| v (lignes) | 3 | 0                                                                                 |   |   |   |   |
|            | 2 | 0                                                                                 |   |   |   |   |
|            | 1 | 0                                                                                 |   |   |   |   |
|            | 0 |  | 1 | 1 | 1 | 1 |
|            |   | - 1                                                                               | 0 | 1 | 2 | 3 |
|            |   | ρ (colonnes)                                                                      |   |   |   |   |

Figure 1

à 1 (ligne 0 de tête), tantôt égales à 0 (colonne - 1 de tête). Le contenu de la case de tête (commune à cette ligne et à cette colonne) doit toutefois s'entendre comme indéterminé, ce que l'on a exprimé en la barrant en croix (a).

Les diagonales correspondent à des nombres totaux n d'épreuves constants.

(a) On peut en effet écrire successivement :

$$\begin{aligned}
 I_v^p(p) &= \Pr \{v, v+1, \dots, n \text{ issues a}\} \\
 &= \Pr \{0, 1, \dots, \rho \text{ issues b}\} \\
 &= 1 - \Pr \{\rho+1, \rho+2, \dots, n \text{ issues b}\}, \text{ soit}
 \end{aligned}$$

$$I_v^p(p) = 1 - I_{\rho+1}^{v-1}(q).$$

Cette formule de symétrie établit la correspondance

Nombre  $I_v^p$  du tableau [p]  $\longleftrightarrow$  Nombre  $I_{v'}^{p'}$  du tableau [p']

avec

$$\begin{cases} p' = q \\ I_{v'}^{p'} = 1 - I_v^p \\ v' = \rho + 1 \quad \rho' = v - 1. \end{cases}$$

Mais la ligne  $v = 0$  du tableau [p] n'a pas d'homologue dans le tableau p' puisque l'on obtient alors  $\rho' = -1$ . La création de la colonne  $\rho = -1$  fait donc des tableaux  $I_v^p(p)$  un domaine fermé pour la formule de symétrie. Les équations de correspondance précédentes montrent que les nombres à porter dans cette colonne sont égaux à 0.

Toutefois, le raisonnement précédent ne s'applique pas à la case de tête  $v=0$ ,  $\rho = -1$ , qui n'existait pas dans le tableau de départ. On trouvera en fin de 1.3.4. une justification du caractère indéterminé du nombre  $I_0^{-1}$  qu'elle contient.

Par une démarche moins rigoureuse mais beaucoup plus directe on serait arrivé à garnir de la même façon les cases de la colonne  $\rho = -1$  en répondant aux interrogations suivantes :

- (pour  $v \geq 1$ ) quelle est la probabilité d'obtenir  $n+1$  issues a en n épreuves ( $n \geq 0$ ) ? réponse évidente : zéro ;
- (pour  $v = 0$ ) quelle est la probabilité d'obtenir un résultat quelconque en - 1 épreuve ( $n = -1$ ) ? pas de réponse : la question n'a pas de sens.

## 1.2 - POLYEDRE I ( $\nu$ , $\rho$ ) - DEFINITION GEOMETRIQUE DE $I_\nu^p(\rho)$

$p$  étant donné, on trace sur un plan horizontal un réseau à mailles carrées avec diagonales :

$$\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\rho = -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Voir figure 2})$$

En chaque noeud  $S(\nu, \rho)$  du réseau, on élève une verticale  $SZ$  sur laquelle on porte une longueur  $SS'$  mesurée par le nombre  $I_\nu^p$ .

On considère le polyèdre -à faces triangulaires- ayant pour sommets l'ensemble des points  $S'$ , en exceptant le point  $\omega(0, -1)$  dont la cote est indéterminée.

La détermination des  $I_\nu^p$  est ainsi ramenée à la construction du polyèdre, et l'on saura construire ce polyèdre si par exemple on sait définir :

- une "directrice" cotée de 0 à 1,
- la "génératrice" horizontale passant par tout point de cette directrice.

Ces deux définitions seront les suivantes (1) :

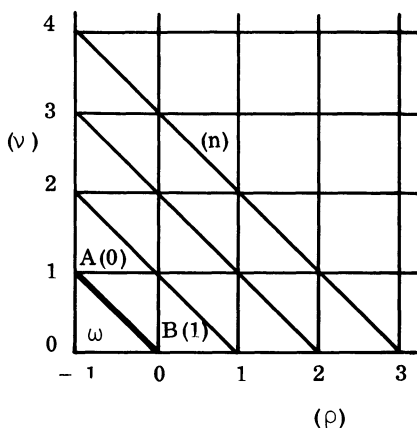


Figure 2

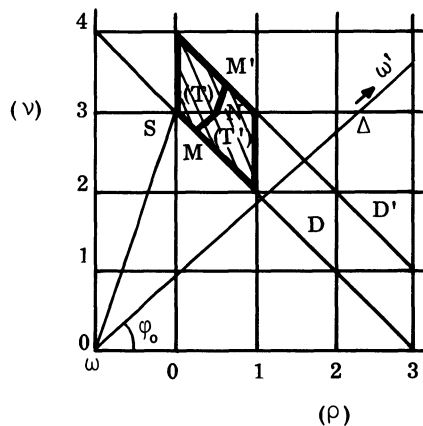


Figure 3

a) (voir figure 2) la directrice, rectiligne, a pour projection horizontale le segment AB coté 0 en A et 1 en B (en trait fort sur la figure 2) ;

b) (voir figure 3) on repère la direction  $\Delta$  définie par l'angle polaire  $\varphi_0 = \text{Arctg} \frac{p}{q}$ . Tout cheminement horizontal sur le polyèdre est fait de la tra-

-----

(1) On en trouvera la justification ci-après en 1.3.4.

versée de tranches diagonales successives, telles que DD', découpées par les plans verticaux  $n = C^{te}$ . Chacune de ces traversées est elle-même faite de la traversée de 2 faces élémentaires contiguës de genres différents (T') et (T), laquelle obéit aux 2 règles suivantes :

- la traversée MN d'une face (T') est parallèle à  $\Delta$  ;
- la traversée NM' d'une face (T) est parallèle au rayon vecteur  $\omega S$  de son nœud antidiagonal.

Ainsi, un point qui parcourt horizontalement le polyèdre  $I(v, \rho)$  est guidé alternativement par le pôle  $\omega$  à distance finie et par un deuxième pôle soit  $\omega'$ , situé à l'infini (dans la direction  $\Delta$ )<sup>(1)</sup>.

**Remarque** - Il manque au domaine de définition de  $I_v^p$  la partie correspondant au triangle  $\omega AB$  de la figure 2<sup>(2)</sup>. On peut, en accord avec la théorie précédente, compléter le polyèdre par la tranche  $\omega AB$  du paraboloid hyperbolique admettant la verticale  $\omega$  et l'oblique AB comme génératrices d'une famille et le plan horizontal comme plan directeur de l'autre. Cela revient bien à donner au point  $\omega$  toutes les cotes de l'intervalle  $[0, 1]$ .

### 1.3 - FORMULES DE RECURRENCE

#### 1.3.1 - Formule fondamentale - Génération du tableau $I_v^p(p)$

Le tableau  $[p]$  des nombres  $I_v^p(p)$ , dont il a été question au début, peut être entièrement construit à partir de ses bordures W et S par application répétée de l'opération exprimée par la formule de récurrence connue [4], très facile à démontrer directement (b)

$$(2) \quad I_v^p = p I_{v-1}^p + q I_v^{p-1}$$

et qui joue un rôle analogue à celui de la formule de récurrence des nombres de combinaisons :

-----

(1) Caractère "parabolique" de la probabilité binomiale.

(2) La partie couverte par le polyèdre (quadrant  $\omega$  amputé du triangle  $\omega AB$ ) reste toutefois la seule strictement suffisante pour qu'à  $n$  positif donné  $I$  puisse prendre toute valeur de l'intervalle  $[0, 1]$ .

(b) Voici une démonstration, étant rappelé que

$$I_v^p(p) = \text{Pr} \{ \text{au moins } v \text{ succès } a \text{ en } n \text{ épreuves} \} :$$

On vise un certain niveau  $v$  de succès relatif et on se demande dans quelle mesure la  $n^{ème}$  épreuve en  $a$  amélioré la probabilité.

Supposons le niveau visé acquis en  $n$  épreuves. La  $n^{ème}$  aura procuré un succès  $a$  ( $\text{Pr} = p$ ) ou un échec  $b$  ( $\text{Pr} = q$ ) :

- si elle a procuré un succès, on avait enregistré auparavant au moins  $(v - 1)$  succès ( $\text{Pr} = I_{v-1}^p$ ) ;

- si elle a procuré un échec, on avait enregistré auparavant au moins  $v$  succès ( $\text{Pr} = I_v^{p-1}$ ),

ce dont on rend compte globalement en écrivant la relation (2).

$$\begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ v-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho-1 \\ v \end{pmatrix}$$

(en notant par analogie  $C_{n+p}^p = \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}$ )

dans la construction du "tableau de Pascal" (bien connu sous la présentation un peu différente de "triangle de Pascal").

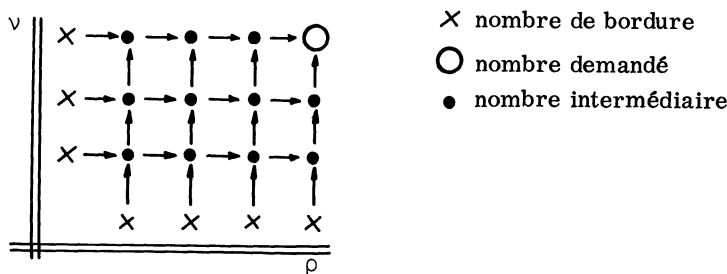


Figure 4

Si l'on se proposait, non plus de calculer un tableau "complet", mais seulement de garnir une case  $(v, \rho)$  fixée de ce tableau (voir figure 4), l'emploi de la formule fondamentale de récurrence ci-dessus obligerait à calculer entièrement le tableau rectangulaire ayant cette case comme coin N-E.

### 1.3.2 - Formules de récurrence (affines) à 2 termes

En exploitant de diverses façons la formule (2) et en rapprochant les résultats (c), on établit les 3 formules de récurrence (linéaires) à 2 termes :

(3) par ligne  $I_v^{\rho+1} - I_v^\rho = C_n^{\rho+1} p^v q^{\rho+1},$

(4) par colonne  $I_v^\rho - I_{v+1}^\rho = C_n^\rho p^v q^{\rho+1},$

(5) diagonale  $I_v^{\rho+1} - I_{v+1}^{\rho+1} = C_{n+1}^{\rho+1} p^v q^{\rho+1},$

(non linéairement indépendantes).

-----  
(c) Par exemple :

1/ un premier changement de fonction  $I_v^\rho = p^v$ .  $i_v^\rho$  remplace (2) par  $i_v^\rho = i_{v-1}^\rho + q i_v^{\rho-1}$  (2') avec  $i_0^\rho = 1$  et  $i_v^1 = 0$ .

Un deuxième changement de fonction  $i_v^\rho - i_v^{\rho-1} = \delta_v^\rho q^\rho$  ramène (2') à  $\delta_v^\rho = \delta_{v-1}^\rho + \delta_v^{\rho-1}$  avec  $\delta_0^\rho = 1 = \delta_v^1$ .

Arrêté à la ligne  $v = 1$  et à la colonne  $\rho = 0$ , le tableau des nombres  $\delta_v^\rho$  s'identifie ainsi avec un tableau de Pascal. Plus précisément  $\delta_v^\rho = C_{n-1}^\rho$ , d'où la formule (3) ;

2/ en déclarant la formule (2) de façon qu'elle intéresse la même ligne que l'équation (3) et en éliminant entre ces deux équations soit l'un, soit l'autre des deux nombres appartenant à cette ligne, on obtient les équations (4) et (5).

### 1.3.3 - Formules de récurrence (linéaires) à 3 termes en ligne

On peut donner aux 3 équations précédentes une forme homogène à 3 termes consécutifs :

$$(6) \text{ par ligne} \quad \frac{I_v^{p+1} - I_v^p}{I_v^p - I_v^{p-1}} = \frac{n}{\rho + 1} \cdot q ,$$

$$(7) \text{ par colonne} \quad \frac{I_v^p - I_{v+1}^p}{I_{v-1}^p - I_v^p} = \frac{n}{v} \cdot q ,$$

$$(8) \text{ diagonale} \quad \frac{I_{v-1}^{p+1} - I_v^p}{I_v^p - I_{v+1}^{p-1}} = \frac{v}{\rho + 1} \cdot \frac{p}{q} .$$

Du point de vue géométrique, elles caractérisent la convexité locale des sections du polyèdre  $I(v, \rho)$  par les plans respectifs  $v = C^{te}$ ,  $\rho = C^{te}$ ,  $n = C^{te}$ .

### 1.3.4 - Formules sous-diagonale et surdiagonale

Par exemple en rapprochant de façons différentes les 3 équations (3)

(4) (5), décalées s'il y a lieu (d), on obtient :

- la formule "surdigonale"

$$(9) \quad \frac{I_v^{p+1} - I_v^p}{p} = \frac{I_{v-1}^{p+1} - I_v^{p+1}}{q} = \frac{I_{v-1}^{p+1} - I_v^p}{1} .$$

Cette formule (ou plus exactement ce système de 2 formules linéairement dépendantes) ne diffère pas de la formule fondamentale (2), dont elle a toutefois le mérite de donner une présentation plus frappante ;

- la formule "sous-diagonale"

$$(10) \quad \frac{I_v^{p+1} - I_v^p}{v} = \frac{I_v^p - I_{v+1}^p}{\rho + 1} = \frac{I_v^{p+1} - I_{v+1}^p}{n + 1} .$$

Dans leur ensemble les équations (9) et (10), décrivant complètement -à l'unité de hauteur près- la topographie d'une "biface" élémentaire du polyèdre  $I(v, \rho)$ , justifient la définition géométrique donnée en 1.2.

Le système (10), qui se réduit en :

$$(n + 1) I_v^p = v I_{v+1}^p + (\rho + 1) I_v^{p+1} ,$$

confirme l'indétermination du nombre  $I_0^{-1}$  contenu dans la case de tête du tableau [p] de la figure 1. En effet, si on y fait  $v=0$  et  $\rho=-1$ , l'équation s'écrit :

$$0 \times I_0^{-1} = 0 \times I_1^{-1} + 0 \times I_0^0$$

et est vérifiée pour une valeur quelconque de ce nombre.

-----

(d) On obtient (9) avec 3 équations ayant au second membre le même nombre de combinaisons et (10) en les prenant au contraire avec le même monôme en pq.

DEUXIEME PARTIE  
EXPRESSIONS EXPLICITES DES  $I_v^p(p)$   
ET INTERPOLATION

2.1 - EXPRESSIONS EXPLICITES DES  $I_v^p(p)$  ISSUES DES FORMULES DE RECURRENCE PRECEDENTES

2.1.1 - Forme classique du binôme

L'application répétée de la formule (5) à partir de  $\rho \neq 0$  compte tenu que  $I^{-1} = 0$ , donne la formule classique (1) du binôme.

2.1.2 - Forme "poissonienne"

En opérant de façon analogue sur la formule (3), on obtient :

$$(11) \quad I_v^p = p^v \left[ 1 + vq + \dots + \frac{v(v+1) \dots (n-1)}{\rho!} q^\rho \right] .$$

On vérifiera aisément que cette nouvelle expression fait correspondre  $I_v^p$  terme à terme avec sa limite de Poisson ( $n \rightarrow \infty$ ,  $nq$  fini, constant), d'où l'appellation proposée.

Comme on pouvait s'y attendre, la formule (4) ne fournit rien de réellement nouveau, compte tenu de la formule de symétrie de la note (a)

$$(12) \quad I_v^p(p) = 1 - I_{p+1}^{v-1}(q) .$$

(Profitions de ce rappel pour confirmer que nous avons généralement choisi, comme expressions explicites des  $I_v^p(p)$  et  $F_v^p(p)$ , celles qui conviennent le mieux au cas de  $q \ll p$  (issue  $b$  relativement peu probable) : il peut y avoir lieu de "renverser" ces expressions au moyen de la formule (12)).

2.2 - FORMULE DU RESTE ET SES CONSEQUENCES

2.2.1 - Formule du reste - Forme hypergéométrique

On reconnaît dans le crochet de la "forme poissonienne" (11) donnée ci-dessus le début du développement en série entière de  $(1-q)^{-v}$ . En désignant par  $R_v^p(q)$  le reste de cette série, on voit que :

$$(13) \quad F_v^p = q^v R_v^p(q) ,$$

soit explicitement :

$$(14) \quad F_v^p = \frac{v(v+1) \dots n}{(\rho+1)!} p^v q^{\rho+1} \left[ 1 + \frac{n+1}{\rho+2} q + \dots + \frac{(n+1) \dots (n+k)}{(\rho+2) \dots (\rho+k+1)} q^k + \dots \right]$$

où, au second membre :

- le crochet s'identifie avec la fonction hypergéométrique

$$(15) \quad \mathcal{F}(n+1, 1, \rho+2, q)$$

selon les notations admises (voir [1] page 10, [3] pages 4-5) <sup>(1)</sup> ;

- le coefficient de tête peut encore s'écrire :

$$(16) \quad \frac{\nu(\nu+1) \dots n}{(p+1)!} = \frac{n!}{(\nu-1)! (\rho+1)!} = \frac{(\rho+2) \dots n}{(\nu-1)!}.$$

### 2.2.2 - Forme dérivée

Si l'on recourt à la dernière expression de (16) ci-dessus,  $R_\nu^\rho(q)$  s'écrit :

$$R_\nu^\rho(q) = \frac{(\rho+2) \dots n}{(\nu-1)!} q^{\rho+1} + \frac{(\rho+3) \dots (n+1)}{(\nu-1)!} q^{\rho+2} + \dots$$

On remarque que :

$$R_\nu^\rho(q) = \frac{d^{\nu-1}}{d q^{\nu-1}} \left[ \frac{q^n + q^{n+1} + \dots}{(\nu-1)!} \right] = \frac{1}{(\nu-1)!} \frac{d^{\nu-1}}{d q^{\nu-1}} \left( \frac{q^n}{1-q} \right),$$

d'où pour  $F_\nu^\rho$  la nouvelle expression :

$$(17) \quad F_\nu^\rho = \frac{p^\nu}{(\nu-1)!} \cdot \frac{d^{\nu-1}}{d q^{\nu-1}} \left( \frac{q^n}{1-q} \right). \quad (2)$$

### 2.2.3 - Forme intégrale : forme Bêta

En mettant sous la forme intégrale de Lagrange ([5] Tome I-page 102) le reste  $R_\nu^\rho(q)$  de (13), on obtient :

$$(18) \quad F_\nu^\rho = \frac{\nu(\nu+1) \dots n}{\rho!} p^\nu \int_0^q \frac{(q-t)^\rho}{(1-t)^{n+1}} dt$$

que le changement de variable  $t = \frac{q-u}{1-u}$  sous le signe somme permet d'écrire plus classiquement :

$$(19) \quad F_\nu^\rho = \frac{\nu(\nu+1) \dots n}{\rho!} \int_0^q u^\rho (1-u)^{\nu-1} du. \quad (3)$$

$$(1) \quad \mathcal{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+k-1) \beta(\beta+1) \dots (\beta+k-1)}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+k-1)} \cdot \frac{x^k}{k!}$$

étant observé que nous n'avons pas, ici, à distinguer entre série et fonction.

(2) Le rapprochement de (17) avec l'interpolation 2.3.2 fournit un exemple de dérivée de Riemann-Liouville (d'ordre non entier).

(3) Nous avons retrouvé ce résultat (fonction Bêta comme reste du développement en série entière de  $(1-q)^\nu$ ) dans [6] (exerc. 6 page 109) comme application de la formule de Taylor-Lagrange proposée par Jacobi et Scheibner, vraisemblablement sans relation avec le Calcul des Probabilités.

Si, conformément à l'usage (cf. K. Pearson [4]), l'on désigne par "fonction Bêta incomplète" le rapport

$$(20) \quad \mathcal{J}_x(P, Q) = \frac{\beta_x(P, Q)}{\beta_1(P, Q)}$$

$$\text{où} \quad \beta_x(P, Q) = \int_0^x u^{P-1} (1-u)^{Q-1} du$$

et où  $\beta_1(P, Q) = \beta(P, Q)$  représente la fonction Bêta complète, l'expression précédente devient :

$$(21) \quad F_v^P = \mathcal{J}_q(\rho + 1, \nu), \text{ ou encore, par symétrie :}$$

$$(22) \quad I_v^P = \mathcal{J}_p(\nu, \rho + 1).$$

#### 2.2.4 - Forme réduite : polynome de Jacobi

En développant le monôme sous le signe somme de (19) et en intégrant terme à terme, on obtient (1)

$$(23) \quad F_v^P = \frac{\nu(\nu+1) \dots n}{\rho!} \left[ \frac{q^{\rho+1}}{\rho+1} - \frac{\nu-1}{1!} \cdot \frac{q^{\rho+2}}{\rho+2} + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2!} \cdot \frac{q^{\rho+3}}{\rho+3} \right. \\ \left. - \dots - (-1)^\nu \frac{q^n}{n} \right].$$

A un facteur monôme près, le crochet du second membre s'identifie avec un polynome de Jacobi particulier (2) :

$$(24) \quad J_{\nu-1}(\rho+2-\nu, \rho+2, q) = \frac{(\rho+1)!}{\nu(\nu+1) \dots n} \cdot \frac{F_v^P}{q^{\rho+1}},$$

ce qui permet de retrouver la formule (17) comme propriété connue de ces polynomes (3).

-----

(1) Mise sous la forme plus caractéristique

$$F_v^P = C_\rho^P C_n^{\rho+1} q^{\rho+1} - C_{\rho+1}^P C_n^{\rho+2} q^{\rho+2} + \dots - (-1)^{k-P} C_{k-1}^P C_n^k q^k + \dots - (-1)^\nu C_{n-1}^P C_n^n q^n,$$

cette formule découle aussi, très directement, de la théorie générale des probabilités (voir [2] formule (2), page 14, Système d'événements).

On pourrait encore songer à développer et réduire (1). Mais il est alors plus facile de procéder par dérivation (qui réduit (1) à un terme, comme le veut (19)), et développement suivi d'une intégration terme à terme.

(2) le polynome général de Jacobi étant noté (voir [1] page 43) :

$$J_n(\alpha, \gamma, x) = \mathfrak{S}(-m, \alpha+m, \gamma, x) \\ = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m \dots (m+1-k) (\alpha+m) \dots (\alpha+m-1+k)}{k! \gamma \dots (\gamma-1+k)} (-1)^k x^k.$$

$$(3) \quad J_n(\alpha, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma \dots (\gamma+m-1)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [x^{\gamma+m-1} (1-x)^{\alpha+m-\gamma}].$$

## 2.3 - INTERPOLATION

### 2.3.1 - Interpolation par la forme hypergéométrique (14)

La série [ ] de (14) garde un sens pour  $\nu$  et  $\rho$  non entiers, ainsi que le monôme  $p^\nu q^{\rho+1}$  qui la précède.

Pour qu'il en soit de même de l'expression (14) dans son ensemble, il suffit de mettre le coefficient de tête sous la forme intermédiaire de (16) et d'y remplacer la fonction factorielle par sa fonction d'interpolation  $\Gamma$  bien connue :

$$(25) \quad F_\nu^\rho = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+2)} p^\nu q^{\rho+1} \left[ 1 + \frac{n+1}{\rho+2} q + \frac{(n+1)(n+2)}{(\rho+2)(\rho+3)} q^2 + \dots \right].$$

### 2.3.2 - Interpolation par la forme Bêta

L'interpolation est déjà réalisée par les formules (20) (21) (22), l'intégrale Bêta complète ayant alors l'expression bien connue en termes de fonction Gamma :

$$\beta_1(P, Q) = \frac{\Gamma(P)\Gamma(Q)}{\Gamma(P+Q)}.$$

### 2.3.3 - Interpolation par la forme réduite (23)

Le coefficient de tête du second membre de (23) a déjà été traité ci-dessus.

Quant au crochet, il garde un sens pour  $\rho$  non entier, et, si  $\nu$  n'est pas non plus entier, il se poursuit en série entière (convergente) au lieu de s'achever en polynôme :

$$(26) \quad F_\nu^\rho = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+2)} \left[ \frac{q^{\rho+1}}{\rho+1} - \frac{\nu-1}{1!} \frac{q^{\rho+2}}{\rho+2} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^k \frac{(\nu-1) \dots (\nu-k)}{k!} \cdot \frac{q^{\rho+k+1}}{\rho+k+1} + \dots \right]$$

Cela revient à reprendre le calcul de 2.2.5. en recourant, dans le cas de  $\nu$  non entier, non plus au binôme mais à la série du binôme.

## 2.4 - AUTRES CONSEQUENCES DU RATTACHEMENT AUX FONCTIONS HYPERGEOMETRIQUES

### 2.4.1 - Intégrale d'Euler

- . L'intégrale hypergéométrique d'Euler  
([5] Tome II, page 244 et [1] page 12)

$$(27) \quad \mathfrak{F}(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tx)^{-\alpha} dt$$

apporte un rapprochement direct entre (14) et (19).

. L'invariance de forme de cette intégrale à travers certains changement de variable ([1] page 13) se traduit par l'équivalence de (1), (14) et (23) (e), et montre que (1) et (23) sont, à un facteur monôme près, des fonctions hypergéométriques particulières (f).

#### 2.4.2 - Fonctions associées

La théorie de ces fonctions (voir [1] page 11-12 et [3] page 8) montre l'existence des relations de récurrence de 1.3.

-----  
(e) Partons par exemple de (14) sous son écriture générale (25) :

$$F_{\nu}^{\rho}(p) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+2)} p^{\nu} q^{\rho+1} \mathfrak{F}(n+1, 1, \rho+2, q),$$

que (27) transforme en :

$$F_{\nu}^{\rho}(p) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)} p^{\nu} q^{\rho+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^{\rho}}{(1-qt)^{n+1}} dt.$$

Le changement de variable  $t = \frac{1-u}{1-qu}$  donne au second membre l'expression :

$$F_{\nu}^{\rho}(p) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)} q^{\rho+1} \int_0^1 u^{\rho} (1-qu)^{\nu-1} du.$$

encore du type (27) à condition de prendre :

$$\alpha = -\nu+1, \quad \beta = \rho+1, \quad \gamma = \rho+2, \quad x = q,$$

et à quoi (27) fait correspondre la nouvelle expression hypergéométrique

$$F_{\nu}^{\rho}(p) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+2)} q^{\rho+1} \mathfrak{F}(-\nu+1, \rho+1, \rho+2, q).$$

On retrouve donc (23) sous son écriture généralisée (26).

(f) Nous l'avons constaté pour (23) en conclusion de (e). Vérifions-le directement pour (1). Nous écrirons successivement :

$$\begin{aligned} F_{\nu}^{\rho}(p) &= 1 - I_{\nu}^{\rho}(p) = C_n^{\nu-1} p^{\nu-1} q^{\rho+1} + C^{\nu-2} p^{\nu-2} q^{\rho+2} + \dots + q^n \\ &= \frac{n!}{(\nu-1)! (\rho+1)!} p^{\nu-1} q^{\rho+1} \left[ 1 + \frac{\nu-1}{\rho+2} \frac{q}{p} + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{(\rho+2)(\rho+3)} \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\nu-1)\dots 1}{(\rho+2)\dots n} \left(\frac{q}{p}\right)^{\nu-1} \right] \\ &= \frac{\nu(\nu+1)\dots n}{(\rho+1)!} p^{\nu-1} q^{\rho+1} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\nu+1)\dots(-\nu+k)}{(\rho+2)\dots(\rho+1+k)} \cdot \left(-\frac{q}{p}\right)^k \right] \\ F_{\nu}^{\rho}(p) &= \frac{\nu(\nu+1)\dots n}{(\rho+1)!} p^{\nu-1} q^{\rho+1} \mathfrak{F}\left(-\nu+1, 1, \rho+2, -\frac{q}{p}\right). \end{aligned}$$

## TROISIEME PARTIE

### APPLICATIONS ET CONCLUSION

Les applications que nous avons pu faire de la théorie précédente sont d'ordres assez divers et nous ne chercherons pas à les classer. Le point de vue "pratique" ne nous fera d'ailleurs pas négliger le point de vue "explicatif".

3.1 - (1.2) Si, à  $p$  fixé, on se donne a priori plusieurs expériences différentes  $(v_1, \rho_1)$ ,  $(v_2, \rho_2)$  etc., les règles de cheminement sur le polyèdre  $I(v, \rho)$  fournissent un procédé graphique (ou le support d'un algorithme) pour les classer par ordre croissant de leurs probabilités de succès relatif, sans avoir besoin de calculer ces probabilités.

3.2 - (1.3.1) Pour mémoire (K. Pearson).

3.3 - (1.3.3) En réponse à l'objection faite en fin de 1.3.1., la formule (6) fournit le moyen le plus économique de calcul direct d'un nombre  $I_v^p(p)$  désigné.

Donnons-nous par exemple  $p = 0,12$  ;  $v = 25$  ;  $\rho = 4$ .

Le calcul "en ligne" se développera comme suit :

$$\begin{aligned}
 I^{-1} &= 0 \\
 I^0 - I^{-1} &= p^v = 0,88^{25} = 0,040\,932\,4 \\
 I^1 - I^0 &= id \times \frac{25}{1} \times 0,12 = 0,122\,797\,2 \\
 I^2 - I^1 &= id \times \frac{26}{2} \times 0,12 = 0,191\,563\,6 \\
 I^3 - I^2 &= id \times \frac{27}{3} \times 0,12 = 0,206\,888\,6 \\
 I^4 - I^3 &= id \times \frac{28}{4} \times 0,12 = 0,173\,786\,4 \\
 I^4 &= \underline{0,735\,968\,2}
 \end{aligned}$$

Il est plus rapide et plus précis que le calcul "diagonal" issu du binome, qui, sous la forme récurrentielle (8), donnerait :

$$\begin{aligned}
 I^{-1} &= 0 \\
 I^0 - I^{-1} &= p^{v+p} = 0,88^{29} = 0,024\,547\,0 \\
 I^1 - I^0 &= id \times \frac{29}{1} \times \frac{0,12}{0,88} = 0,097\,072\,2
 \end{aligned}$$

$$I^2 - I^1 = \text{id} \times \frac{28}{2} \times \frac{0,12}{0,88} = 0,1853196$$

$$I^3 - I^2 = \text{id} \times \frac{27}{3} \times \frac{0,12}{0,88} = 0,2274376$$

$$I^4 - I^3 = \text{id} \times \frac{26}{4} \times \frac{0,12}{0,88} = 0,2015924$$

$$I^4 = 0,7359688$$

On gagnera donc à baser sur la formule (6) un sous-programme de calcul à l'ordinateur.

3.4 - (2.2) L'interpolation a valeur explicative, -nous y avons fait allusion dans la présentation-, sinon grâce aux formes mêmes qu'elle introduit, -et qui ne sont pas toujours très maniables-, du moins par le truchement de calculs numériques et des faisceaux de courbes continues qu'ils permettent de tracer.

. Pour  $\nu$  et  $\rho$  quelconques, particulièrement pour  $\nu$  et  $\rho < 1$ , nous avons généralement utilisé la formule (14) sous une forme un peu aménagée :

$$F_{\nu}^{\rho} = \frac{\nu(\nu+1)\dots(n-1)}{\rho!} p^{\nu} q^{\rho} [ ]$$

avec

$$[ ] = u_1 + u_2 + \dots$$

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} a_1 = n \\ b_1 = \rho + 1 \end{array} \right. & \quad u_1 = \frac{a_1}{b_1} q \\ \left| \begin{array}{l} a_2 = a_1 + 1 \\ b_2 = b_1 + 1 \end{array} \right. & \quad u_2 = u_1 \frac{a_2}{b_2} q \\ & \dots\dots\dots \\ \left| \begin{array}{l} a_k = a_{k-1} + 1 \\ b_k = b_{k-1} + 1 \end{array} \right. & \quad u_k = u_{k-1} \frac{a_k}{b_k} q, \end{aligned}$$

en la prolongeant éventuellement par les formules de récurrence de 1.3.3.

. Pour  $\rho$  entier nous avons employé la formule (11)

. et pour  $\nu$  entier la formule (23) (en y remplaçant  $\rho!$  Par  $\Gamma(\rho+1)$ ).

. Pour tracer les courbes continues  $I_{\nu}^{\rho}(p) = C^{te}$  à  $\rho$  donné, c'est-à-dire, par exemple, calculer des valeurs implicites de la fonction  $\rho(p, I, \nu)$  pour  $\nu$  entier, on peut procéder par itération sur la formule (14), écrite plus simplement pour  $\nu$  et  $\rho - 1$ , en la décomposant comme suit :

$$A = 1 + \frac{\rho + \nu}{\rho + 1} q \left[ 1 + \frac{\rho + \nu + 1}{\rho + 2} q \left[ 1 + \frac{\rho + \nu + 2}{\rho + 3} q \dots \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. B = \left( 1 + \frac{\rho}{1} \right) \dots \left( 1 + \frac{\rho}{\nu - 1} \right) \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \rho = \frac{\log AB}{|\log q|} + \frac{|\log F| - \nu |\log p|}{|\log q|} \right. \right. \right.$$

### 3.5 - EXPLICATION D'UN CERTAIN "EFFET de PETIT NOMBRE"

Nous terminerons par un exemple global d'analyse qualitative.

On se propose, à  $p$  donné, de "décrire" dans l'espace  $(v, \rho, I)$  à 3 dimensions l'ensemble des points  $[v, \rho, I(v, \rho)]$  concrets (dont les coordonnées  $v$  et  $\rho$  sont des entiers positifs ou nuls). On peut pour cela examiner comment ces points se séparent quand on trace les lignes de niveau

- soit du polyèdre ayant ces points pour sommets (d'après 1.2.),
- soit d'une surface continue passant par ces points (en interpolant au sens de 2.3).

La première méthode met nettement en évidence la tendance asymptotique : à  $I$  donné,  $\rho/v$  tend vers  $q/p$  par valeurs décroissantes lorsque  $v$  et  $\rho$  augmentent indéfiniment (voir figure 5) (1).

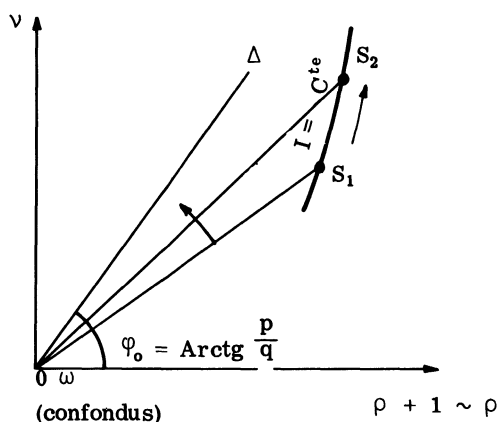


Figure 5

Dans le domaine "régulier" des grands nombres où cette tendance se manifeste, deux expériences quelconques  $(v', \rho')$  et  $(v'', \rho'')$  sont toujours telles que :

$$v'' \geq v' \text{ et } \frac{\rho''}{v''} > \frac{\rho'}{v'} \Rightarrow I_{v''}^{\rho''} > I_{v'}^{\rho'}.$$

Cela rejoint l'intuition vulgaire selon laquelle, à nombre au moins égal de coups utiles, on se procure davantage de chances en s'accordant un plus fort pourcentage de coups pour rien.

Mais cette intuition peut se trouver en défaut dans la région des petits nombres. L'interpolation schématise sans doute mieux ce qui s'y passe (ou peut s'y passer) au voisinage du point 0 (voir figure 6).

Toute courbe interpolée  $I = C^te$  passant par le pôle  $\omega(0, -1)$  (g), il est

(1) du moins si, par exemple, avec  $q \ll p$ , l'on s'en tient à des valeurs de  $I$  relativement élevées - ce que nous supposons.

(g) On peut s'en assurer en posant  $v = \varepsilon$  et  $\rho = -1 + \eta$  dans l'expression (25), dès lors équivalente à  $1/(1 + \eta/\varepsilon)$  lorsque  $\varepsilon$  et  $\eta \rightarrow 0$  et tendant bien ainsi vers toute valeur de l'intervalle  $[0, 1]$ . (Par la même occasion, on obtient une nouvelle preuve d'indétermination du nombre  $I_0^{-1}$  du tableau de la figure 1).

possible -au moins dans certaines conditions- de lui mener une tangente OT par le point 0.

Le point  $T(v_0, \rho_0)$  divise alors la courbe en 2 parties dont la première (arc AT) offre l'"irrégularité", à I constant, que  $\rho/v$  varie en sens contraire de  $v$  et  $\rho$ .

D'un point de vue plus rigoureux, on peut faire appel à la théorie géométrique de 1.2., sinon pour déterminer les conditions strictes de cette irrégularité, du moins pour en fournir des majorantes.

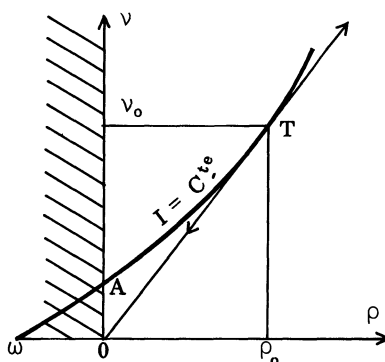


Figure 6

#### 4 - CONCLUSION

En publiant cette sorte de "révision du formulaire du binome", l'auteur pense avoir complété utilement l'arsenal mathématique du calculateur. Il espère aussi intéresser le théoricien, soit sans sortir du cadre de la loi binomiale où la définition géométrique, par exemple, pourrait rendre plus perceptibles certaines analyses -fussent-elles classiques -, soit dans un cadre plus large en y suggérant des démarches analogues. Il est en tout cas à peu près assuré d'avoir fourni au professeur la matière d'un certain nombre d'exercices...

#### REFERENCES

CNRS Formulaire de mathématiques à l'usage des physiciens et des ingénieurs

- [1] . Fascicule IX - Fonctions de la physique mathématique (CNRS, Paris, 1957)
- [2] . Fascicule XII - Calcul des probabilités (1959)
- [3] KAMPE DE FERIET (J.) - La fonction hypergéométrique, fascicule LXXV du Mémorial des sciences mathématiques (Gauthier-Villars, Paris, 1937)

- [4] PEARSON (K.) - Tables of the incomplete Beta-function (Cambridge, 1956)
- [5] VALIRON (G.) - Cours d'analyse mathématique (Masson, Paris, 1950) -  
Tome I Théorie des fonctions  
Tome II Equations fonctionnelles, applications
- [6] WHITTAKER (E.T.) et WATSON (G.N.) - A course of modern Analysis  
(Cambridge, 1946).