

PHAM-DINH-TUAN

**Problème de test d'hypothèses linéaires multiples
en analyse de la variance**

Revue de statistique appliquée, tome 19, n° 1 (1971), p. 77-85

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1971__19_1_77_0

© Société française de statistique, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈME DE TEST D'HYPOTHÈSES LINÉAIRES MULTIPLES EN ANALYSE DE LA VARIANCE

PHAM-DINH-TUAN

Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Grenoble

1 - INTRODUCTION

Dans le modèle I d'Analyse de la Variance, les hypothèses (que ce soit une hypothèse à priori ou celles que l'on veut tester) sont toujours des hypothèses linéaires. Dans ce modèle, les observations sont des variables aléatoires X_1, \dots, X_n normales, indépendantes, de moyennes ξ_1, \dots, ξ_n et de même variance σ^2 . Le vecteur $\xi \in \mathbb{R}^n$, de composantes ξ_1, \dots, ξ_n est supposé appartenir à un sous-espace vectoriel V de \mathbb{R}^n ($\dim V < n$). C'est l'hypothèse à priori. On s'intéresse à savoir si ξ appartient à un ou plusieurs sous-espaces vectoriels donnés V_1, \dots, V_k de V . Par exemple, considérons le cas d'un plan factoriel à deux facteurs. Si l'on fait l'hypothèse à priori qu'il n'y a pas d'interaction entre les facteurs, les observations sont de la forme :

$$X_{ij} = \mu + \varepsilon_i^A + \varepsilon_j^B + e_{ij} \quad i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J$$

où μ et $\varepsilon_i^A, i = 1, \dots, I; \varepsilon_j^B, j = 1, \dots, J$ sont des constantes avec :

$$(1) \sum_{i=1}^I \varepsilon_i^A = 0 \quad ; \quad (2) \sum_{j=1}^J \varepsilon_j^B = 0$$

et $e_{ij}, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$ sont des variables aléatoires normales, indépendantes, centrées de variance commune σ^2 .

Le terme μ représente la moyenne générale des observations, les termes $\varepsilon_i^A, i = 1, \dots, I$ représentent l'effet du facteur A, les termes $\varepsilon_j^B, j = 1, \dots, J$ celui du facteur B et les termes $e_{ij}, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$ tiennent compte des effets du hasard.

Ici le nombre des observations est $n = I \cdot J$, et le vecteur $\xi \in \mathbb{R}^n$, de composantes $\xi_{ij} = E X_{ij}, i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J$ appartient au sous-espace vectoriel

$$V = \left\{ \xi = (\xi_{ij}) : \xi_{ij} = \mu + \varepsilon_i^A + \varepsilon_j^B / \sum_{i=1}^I \varepsilon_i^A = 0, \sum_{j=1}^J \varepsilon_j^B = 0 \right\}$$

On pourra s'intéresser à déterminer si le facteur A n'a pas d'influence sur les observations, ce qui se traduit par $\varepsilon_i^A = 0, i = 1, \dots, I$; c'est-à-dire que ξ appartient au sous-espace vectoriel :

$$V_1 = \left\{ \xi = (\xi_{1j}) \quad \xi_{1j} = \mu + \varepsilon_j^B / \sum_{j=1}^J \varepsilon_j^B = 0 \right\}$$

De façon analogue, on pourra se demander si le facteur B n'a pas d'influence sur les observations, ce qui veut dire que ξ appartient au sous-espace vectoriel :

$$V_2 = \left\{ \xi = (\xi_{1j}) \quad \xi_{1j} = \mu + \varepsilon_1^A / \sum_{i=1}^I \varepsilon_1^A = 0 \right\}$$

Les hypothèses que l'on pourra formuler sont :

- | | |
|--|---------------------------|
| H1 : $\xi \in V_1$, $\xi \in V_2$ | pas d'influence de A et B |
| H2 : $\xi \in V_1$, $\xi \notin V_2$ | Influence de B seul |
| H3 : $\xi \notin V_1$, $\xi \in V_2$ | Influence de A seul |
| H4 : $\xi \notin V_1$, $\xi \notin V_2$ | Influence de A et B |

On a donc un problème de test d'hypothèses multiples. Il en est de même pour les plans factoriels à plusieurs facteurs, avec interaction ou non entre les facteurs, à ceci près que l'on a un plus grand nombre de sous-espaces vectoriels V_1, \dots, V_k et plus d'hypothèses à tester.

Une manière naturelle de résoudre ce problème est d'effectuer séparément les tests de l'hypothèse $\xi \in V_1$ contre $\xi \notin V_1$ pour chaque $i = 1, \dots, k$ et de conclure suivant les résultats de ces tests. Dans l'exemple précédent, si par le premier test on est amené à accepter l'hypothèse $\xi \in V_1$ et par le second, on est amené à rejeter l'hypothèse $\xi \in V_2$, alors on choisira l'hypothèse H2. La suite de cet article est consacré à l'étude d'un tel procédé.

2 - DEFINITION DU PROBLEME ET LE TEST CORRESPONDANT

Soit n variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n , normales de moyennes respectives ξ_1, \dots, ξ_n et de variance commune σ^2 ; le vecteur des moyennes $\xi \in \mathcal{R}^n$ est supposé appartenir à un sous-espace V de \mathcal{R}^n .

Soient alors V_1, \dots, V_k , k sous-espaces vectoriel de V ($\dim V_i < \dim V$, $i = 1, \dots, k$), on se propose, au vu d'une observation x de $X = (X_1, \dots, X_n)$ de choisir une des 2^k hypothèses :

$$\begin{aligned} H_j : \xi \in V_i & \quad i \in J \\ & \xi \in V_i & \quad i \notin J \end{aligned}$$

où j est une partie de $\{1, \dots, k\}$.

Désignons par W_i , l'orthogonal de V_i dans V et supposons que :

(C) Les sous-espaces vectoriels $W_i, i=1, \dots, k$ sont orthogonaux deux à deux.

La condition C est très importante, elle permet de réduire le problème de test par la considération de l'invariance.

Notons ξ_{W_i} la projection de ξ sur W_i . Les hypothèses à tester peuvent s'écrire d'une autre manière :

$$H_J : \xi_{W_i} = 0 \quad i \in J$$

$$\xi_{W_i} \neq 0 \quad i \in J$$

Le test que nous proposons est le suivant :

Désignons x_{W_i} , $i = 1, \dots, k$, x_{V^*} les projections de l'observation x de $X \in R^n$ sur W_i , $i = 1, \dots, k$ et sur V^* (V^* étant l'orthogonal de V dans R^n), on choisit l'hypothèse H_J si et seulement si

$$(2.1) \quad \frac{\|x_{W_i}\|}{\|x_{V^*}\|} < \rho_i \quad \forall i \in J$$

$$\frac{\|x_{W_i}\|}{\|x_{V^*}\|} > \rho_i \quad \forall i \notin J$$

où ρ_i , $i = 1, \dots, k$ sont des constantes données à l'avance.

On remarque qu'effectuer ce test équivaut à tester simultanément l'hypothèse $\xi_{W_i} = 0$ contre $\xi_{W_i} \neq 0$ pour chaque $i = 1, \dots, k$, par la méthode de test d'hypothèses linéaire (le F-test).

3 - ETUDE DU TEST PRECEDENT

3.1. Test d'hypothèse multiple et fonction puissance

Soit X un élément aléatoire de loi de probabilité P_θ où θ est un paramètre inconnu, appartenant à un ensemble abstrait Θ . Soient $\Theta_1, \dots, \Theta_k$ une partition de Θ en r parties, le problème de test d'hypothèses multiples est de décider au vu de l'observation x de X , l'une de k hypothèses :

$$H_i : \theta \in \Theta_i \quad i = 1, \dots, k$$

Un test est alors une fonction φ , mesurable de X dans R

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)).$$

telle que :

$$\varphi_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, k ; \quad \sum_{i=1}^k \varphi_i(x) = 1$$

où $\varphi_i(x)$ représente la probabilité que l'on accepte l'hypothèse H_i quand x est observé.

La performance d'un test φ s'exprime à l'aide de la fonction puissance $\beta(\cdot; \varphi)$ définie sur Θ et à valeurs dans R^k :

$$\beta(\theta; \varphi) = E_{P_\theta}(\varphi) \quad \theta \in \Theta$$

La composante $\beta_1(\theta; \varphi) = E_{P_\theta}(\varphi_1)$ de $\beta(\theta; \varphi)$ représente la probabilité

que l'on accepte l'hypothèse H en utilisant le test φ et quand P_θ est la vraie ici. Un test est d'autant meilleur que si $\beta_1(\theta; \varphi)$ est d'autant petit quand $\theta \notin \theta_1$

3.2. Propriétés optimales du test précédent :

On trouvera quelques propriétés optimales et une étude plus complète du test précédent dans PHAM-DINH [3]. On remarque que l'on a affaire à un problème de décision et que l'optimalité d'une procédure de décision s'étudie ici au niveau de la fonction du risque correspondant à une fonction de coût très simple.

4 - FONCTION PUISSANCE DU TEST (2.1) . RESULTAT NUMERIQUE DANS LE CAS DE DEUX HYPOTHESES LINEAIRES

La fonction puissance du test (2.1) définie dans § 2 est une fonction à valeurs dans R^{2k} , soit $\beta(\theta)$ dont les composantes sont

$$\begin{aligned} \beta_J(\theta) &= P_\theta \{ \text{accepter hypothèse } H_J \} \quad \theta = \xi, \sigma^2 \\ &= P_\theta \left\{ \frac{\|X_{W_i}\|^2}{\|X_{V^*}\|^2} < \rho_i \quad i \in J ; \frac{\|X_{W_i}\|^2}{\|X_{V^*}\|^2} > \rho_i \quad \forall i \in J \right\} \end{aligned}$$

Introduisons les variables aléatoires :

$$U_i = \frac{\|X_{W_i}\|^2}{\sigma^2} \quad i = 1, \dots, k$$

$$U_0 = \frac{\|X_{V^*}\|^2}{\sigma^2}$$

Les variables aléatoires U_i , $i = 1, \dots, k$ suivent des lois du χ^2 décentrées à $n_i = \dim W_i = \dim V - \dim V_i$ degrés de liberté et de paramètre de décentrage $p_i = \|\xi_{W_i}\|^2 / \sigma^2$ et la variable aléatoire U_0 suit une loi du χ^2 centrée à $n_0 = n - \dim V$ degrés de liberté.

La fonction puissance du test se déduit donc de la loi de probabilité du k -tuples $(U_1/U_0, \dots, U_k/U_0)$, elle est une fonction de (p_1, \dots, p_k) et dépend des degrés de liberté n_0, n_1, \dots, n_k ainsi que les séparatrices paratrices ρ_1, \dots, ρ_k qui définissent le test

Dans le cas où $k = 2$, la fonction puissance a quatre composantes

$$\beta_{\{1,2\}} = P \left\{ \frac{U_1}{U_0} < \rho_1, \frac{U_2}{U_0} < \rho_2 \right\}$$

$$\beta_{\{1\}} = P \left\{ \frac{U_1}{U_0} < \rho_1, \frac{U_2}{U_0} > \rho_2 \right\}$$

$$\beta_{\{2\}} = P \left\{ \frac{U_1}{U_0} > \rho_1, \frac{U_2}{U_0} > \rho_2 \right\}$$

$$\beta_\emptyset = P \left\{ \frac{U_1}{U_0} > \rho_1, \frac{U_2}{U_0} < \rho_2 \right\}$$

Table 1
FONCTION DE PUISSANCE

$\alpha = 0.05, n_0 = 12, n_1 = 4, n_2 = 3$

$P_1 = P_2 = 0$	$P_1 > 0$
$P_1 = 0$	$P_2 > 0$
$P_2 > 0$	$P_1 > 0$
	$P_2 > 0$

Probabilités
de décider

$P_1 \backslash P_2$	0.0	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0
0.0	0.090 0.041 0.041 0.009	0.699 0.251 0.021 0.029	0.460 0.490 0.009 0.041	0.271 0.679 0.004 0.046	0.146 0.804 0.001 0.049	0.074 0.876 0.000 0.050	0.036 0.914 0.000 0.050
5.0	0.052 0.019 0.298 0.031	0.528 0.142 0.193 0.137	0.366 0.305 0.104 0.226	0.225 0.446 0.049 0.280	0.126 0.545 0.022 0.308	0.066 0.605 0.008 0.321	0.032 0.638 0.003 0.326
10.0	0.387 0.007 0.563 0.043	0.329 0.066 0.392 0.214	0.241 0.154 0.229 0.376	0.156 0.239 0.118 0.487	0.092 0.303 0.056 0.550	0.050 0.344 0.025 0.581	0.026 0.368 0.010 0.595
15.0	0.203 0.002 0.747 0.048	0.178 0.026 0.542 0.253	0.137 0.068 0.333 0.463	0.094 0.111 0.181 0.614	0.058 0.147 0.090 0.705	0.033 0.172 0.041 0.754	0.018 0.187 0.018 0.777
20.0	0.097 0.001 0.853 0.049	0.088 0.009 0.633 0.270	0.070 0.027 0.400 0.503	0.050 0.047 0.224 0.679	0.033 0.065 0.115 0.788	0.019 0.078 0.055 0.848	0.011 0.086 0.025 0.878
25.0	0.043 0.000 0.907 0.050	0.040 0.003 0.681 0.276	0.033 0.010 0.437 0.520	0.025 0.018 0.249 0.707	0.017 0.026 0.131 0.826	0.011 0.033 0.064 0.893	0.006 0.037 0.030 0.927

Une procédure Algol permet de calculer les quatre composantes de la fonction puissance pour chaque valeur de n_0 , n_1 , n_2 , p_1 , p_2 , et ρ_1 , ρ_2 .

Comme exemple, reprenons le plan factoriel à deux facteurs sans interaction. On prend $I = 5$, $J = 4$. Il est facile de voir que :

$$\dim V = I + J - 1 = 8$$

$$\dim V_1 = J = 4$$

$$\dim V_2 = I = 5$$

D'où $n_0 = 12$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$.

D'autre part, on choisira les séparatrices ρ_1 , ρ_2 de façon que

$$P \left\{ \frac{U_1}{U_0} < \rho_i \right\} = 1 - \alpha \quad \text{quand } p_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

où α est un nombre compris entre 0, et 1. Pour $\alpha = 5\%$, on a :

$$\rho_1 = 1.08637, \quad \rho_2 = 0.87259.$$

Dans la table 1, on a listé, pour chaque couple p_1 , p_2 les quatre probabilités de décider les quatre hypothèse :

$H_1 : p_1 = p_2 = 0$ (en haut à gauche), $H_2 : p_1 > 0$, $p_2 = 0$ (en haut, à droite), $H_3 : p_1 = 0$, $p_2 > 0$ (en bas à gauche), $H_4 : p_1 > 0$, $p_2 > 0$ (en bas à droite). On voit que l'erreur de décision (par exemple, décider H_j , $j \neq i$ quand H_i , $i = 1, \dots, 4$ s'est réalisée) est moins que 5 % si p_1 n'est pas comprise entre 0 et 30.0 et p_2 n'est pas compris entre 0 et 25.0. Plus précisément, soit p_i^* , $i = 1, 2$, définis par

$$P \left\{ \frac{U_1}{U_0} < \rho_i / p_i = p_i^* \right\} = \alpha \quad i = 1, 2.$$

où ρ_i , $i = 1, 2$ sont les séparatrices du test, alors le test est valable pour tester les hypothèses :

$$H'_1 : p_1 = p_2 = 0$$

$$H'_2 : p_1 > p_1^*, p_2 = 0$$

$$H'_3 : p_1 = 0 ; p_2 > p_2^*$$

$$H'_4 : p_1 > p_1^*, p_2 > p_2^*.$$

Les probabilités pour chaque types d'erreur de décision seront inférieures à α .

La valeur de p_1^* ne dépend que de n_1 , n_0 et α : $p_1^* = p^*(n_1, n_0, \alpha)$ où $p^*(n_1, n_0, \alpha)$ est donné par

$$\int_0^P f_{n_1, n_0}(0, x) dx = 1 - \alpha$$

$$\int_0^P f_{n_1, n_0}(p^*, x) dx = \alpha$$

$f_{n_1, n_0}(p, x)$ étant la densité de la loi β décentrée de paramètre $n_1/2$, $n_0/2$ et de paramètre de décentrage $p/2$, soit :

$$f_{n_1, n_0}(p, x) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-p/2} \frac{(p/2)^j}{j!} \frac{\Gamma((n_0 + n_1)/2 + j)}{\Gamma(n_0/2) \Gamma(n_1/2 + j)} \frac{x^{n_1/2 - 1 + j}}{(1+x)^{n_1 + n_2}/2 + j}$$

On a tabulé les valeurs de $p^*(n_1, n_0; \alpha)$ pour $\alpha = 0.05$ (table 2) et pour $\alpha = 0.10$ (table 3) et pour $n_0 = 1$ (1) 20, $n_1 = 1$ (1) (1) 20.

Dans l'exemple précédent, $n_0 = 12$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$; on trouve pour $\alpha = 0.05$ $p_1^* = 27.74$ $p_2^* = 24.12$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HISLEUR G. - Exemple d'utilisation d'un calculateur en Statistique (Chapitre 3). Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Grenoble (1969).
- [2] FERGUSON, TH. S. - Mathematical Statistics. A decision theoretic approach (Chapitre 6). Academic press, New York (1967).
- [3] PHAM-DINH T. - Contributions à l'Analyse de la Variance et aux plans d'expérience (chapitre 1). Thèse présentée à la faculté des Sciences de Grenoble (1970).

Table 2
 PARAMETRE DE DECENTRAGE A PARTIR DUQUEL LE TEST DISTINGUE LES HYPOTHESES
 $\alpha = .05$

$\frac{N-1}{n}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	624.2	1544	2490	3490	4486	5455	6423	7370	8334	9383	11410	12597								
2	60.40	117.8	175.1	232.6	290.1	347.6	404.8	442.0	520.0	577.6	636.8	692.8	749.4	807.4	865.6	923.6	978.9	1038	1097	1152
3	31.97	54.39	76.12	97.63	119.0	140.4	161.7	183.0	204.3	225.6	246.7	268.0	289.2	310.6	331.7	353.1	374.2	395.5	416.7	438.1
4	24.29	38.03	51.03	63.75	76.34	88.37	101.4	113.8	126.2	138.7	151.0	163.4	175.8	188.2	200.6	213.0	225.4	237.8	250.1	262.5
5	20.92	31.06	40.43	49.51	58.46	67.32	76.14	84.93	93.69	102.4	111.2	119.9	128.6	137.3	146.0	154.7	163.4	172.1	180.8	189.5
6	19.07	27.28	34.73	41.89	48.89	55.82	62.70	69.54	76.36	83.13	89.91	96.70	103.4	110.2	116.9	123.7	130.4	137.1	143.9	150.6
7	17.90	24.95	31.22	37.20	43.04	48.78	54.46	60.10	65.71	71.32	76.89	82.45	88.01	93.55	99.10	104.6	110.2	115.7	121.2	126.7
8	17.11	23.37	28.56	34.05	39.09	44.04	48.92	53.76	58.57	63.36	68.14	72.89	76.64	82.38	87.11	91.84	96.57	101.3	106.0	110.7
9	16.54	22.23	27.17	31.80	36.27	40.64	44.96	49.23	53.47	57.68	61.88	66.06	70.23	74.39	78.54	82.70	86.82	90.96	95.09	99.21
10	16.10	21.37	25.89	30.11	34.16	38.11	42.00	45.84	49.64	53.43	57.19	60.94	64.68	68.39	72.11	75.82	79.52	83.23	86.91	90.60
11	15.76	20.71	24.90	28.79	32.52	36.14	39.70	43.21	46.68	50.13	53.55	56.96	60.36	63.75	67.12	70.49	73.85	77.21	80.55	83.91
12	15.49	20.18	24.12	27.74	31.21	34.57	37.86	41.11	44.31	47.49	50.65	53.79	56.92	60.04	63.14	66.23	69.32	72.40	75.48	78.55
13	15.26	19.74	23.47	26.89	30.14	33.29	36.37	39.39	42.38	45.34	48.28	51.20	54.11	57.00	59.88	62.75	65.62	68.48	71.33	74.18
14	15.07	19.38	22.94	26.18	29.26	32.23	35.13	37.97	40.78	43.56	46.31	49.05	51.77	54.47	57.18	59.86	62.54	65.21	67.88	70.54
15	14.91	19.07	22.48	25.58	28.51	31.33	34.08	36.77	39.43	42.05	44.65	47.23	49.79	52.35	54.89	57.42	59.94	62.46	64.96	67.47
16	14.78	18.81	22.10	25.07	27.87	30.56	33.18	35.74	38.27	40.76	43.23	45.68	48.11	50.52	52.93	55.33	57.71	60.10	62.47	64.84
17	14.66	18.58	21.76	24.63	27.32	29.90	32.40	34.86	37.27	39.64	42.00	44.33	46.64	48.95	51.24	53.52	55.79	58.05	60.31	62.56
18	14.56	18.39	21.47	24.24	26.83	29.32	31.73	34.08	36.40	38.67	40.93	43.16	45.37	47.57	49.76	51.93	54.11	56.27	58.42	60.57
19	14.46	18.21	21.21	23.90	26.41	28.81	31.13	33.40	35.62	37.81	39.98	42.12	44.25	46.36	48.46	50.54	52.62	54.69	56.75	58.81
20	14.38	18.06	20.98	23.60	26.03	28.36	30.60	32.79	34.94	37.06	39.14	41.21	43.25	45.29	47.30	49.31	51.30	53.29	55.28	57.25

Table '3

PARAMETRE DE DECENTRAGE A PARTIR DUQUEL LE TEST DISTINGUE LES HYPOTHESES

$\alpha = 0.10$

η_1 η_0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	106.6	209.5	435.3	603.5	772.8	942.2	1115	1285	1455	1630	1797	1978	2147	2314	2477	2664	2836	2981	3197	3313
2	23.13	45.94	64.79	85.62	106.5	127.4	148.4	169.1	189.9	210.8	231.6	252.5	273.4	294.0	315.0	335.9	356.7	377.8	398.7	419.6
3	15.43	25.71	35.67	45.50	55.29	65.06	74.79	84.54	94.27	104.0	113.7	123.4	133.1	142.8	152.5	162.2	172.0	181.6	191.3	201.1
4	13.00	20.05	26.73	33.25	39.71	46.11	52.50	58.87	65.24	71.58	77.93	84.27	90.60	96.93	103.3	109.6	115.9	122.3	128.6	134.9
5	11.78	17.40	22.56	27.55	32.46	37.32	42.14	46.96	51.75	56.54	61.31	66.08	70.84	75.61	80.37	85.13	89.88	94.63	99.37	104.1
6	11.09	15.88	20.19	24.31	28.33	32.31	36.25	40.17	44.07	47.96	51.84	55.71	59.57	63.43	67.29	71.14	75.00	78.85	82.70	86.54
7	10.64	14.90	18.66	22.22	25.69	29.09	32.46	35.80	39.13	42.44	45.74	49.03	52.31	55.60	58.86	61.14	65.40	68.68	71.94	75.20
8	10.33	14.22	17.59	20.77	23.85	26.86	29.83	32.77	35.70	38.60	41.50	44.39	47.26	50.13	53.00	55.87	58.73	61.58	64.43	67.29
9	10.10	13.71	16.62	19.71	22.50	25.22	27.90	30.54	33.17	35.78	38.38	40.96	43.54	46.11	48.68	51.25	53.80	56.36	58.90	61.46
10	9.92	13.33	15.22	18.90	21.47	23.97	26.42	28.84	31.24	33.62	35.99	38.35	40.69	43.04	45.36	47.70	50.03	52.34	54.66	56.98
11	9.78	13.02	15.75	18.26	20.65	22.97	25.26	27.50	29.72	31.92	34.10	36.28	38.44	40.60	42.75	44.89	47.04	49.17	51.30	53.43
12	9.66	12.78	15.37	17.74	19.99	22.18	24.31	26.41	28.48	30.54	32.57	34.60	36.61	38.62	40.62	42.62	44.61	46.59	48.57	50.55
13	9.57	12.58	15.05	17.31	19.45	21.52	23.53	25.51	27.46	29.40	31.31	32.21	35.10	36.99	38.87	40.73	42.60	44.46	46.32	48.17
14	9.49	12.40	14.79	16.95	19.00	20.96	22.88	24.76	26.61	28.44	30.25	32.04	33.83	35.61	37.38	39.14	40.91	42.66	44.41	46.16
15	9.42	12.26	14.57	16.65	18.61	20.49	22.32	24.12	25.88	27.62	29.35	31.05	32.75	34.44	36.12	37.79	39.46	41.13	42.79	44.44
16	9.36	12.13	14.37	16.39	18.28	20.09	21.84	23.56	25.25	26.92	28.56	30.20	31.82	33.43	35.03	36.63	38.22	39.80	41.38	42.96
17	9.31	12.03	14.21	16.16	17.99	19.73	21.42	23.08	24.70	26.30	27.88	29.45	31.00	32.54	34.08	35.61	37.13	38.65	40.15	41.66
18	9.27	11.93	14.06	15.96	17.73	19.42	21.06	22.65	24.22	25.76	27.28	28.79	30.29	31.77	33.24	34.71	36.17	37.62	39.07	40.52
19	9.23	11.85	13.93	15.78	17.50	19.15	20.73	22.28	23.79	25.28	26.76	28.21	29.65	31.08	32.50	33.92	35.32	36.72	38.12	39.51
20	9.19	11.77	13.81	15.62	17.31	18.90	20.45	21.95	23.42	24.86	26.28	27.69	29.08	30.47	31.84	33.21	34.57	35.92	37.26	38.61