REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. BRIL

Influence économique de la précision lors de contrôles industriels

Revue de statistique appliquée, tome 18, nº 3 (1970), p. 71-85
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1970__18_3_71_0>

© Société française de statistique, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

INFLUENCE ÉCONOMIQUE DE LA PRÉCISION LORS DE CONTROLES INDUSTRIELS

J. BRIL

Centre de Recherches du Groupe Péchiney B.P. 24-38 — Voreppe

L'acceptation ou le refus d'une fabrication sur un échantillon (que ce soit chez le producteur ou chez son client) se fait sur la foi du résultat d'une mesure. Les caractéristiques de la mesure (exactitude et précision) qui permettent de situer la grandeur mesurée par rapport à une limite de tolérance, contribuent donc à définir, pour une fabrication déterminée, un certain risque pour le fournisseur de livrer un produit de spécification inférieure à celle faisant l'objet du contrat de vente - et il s'expose au retour de la marchandise -, ou de rejeter indûment un produit répondant en fait aux spécifications.

A partir de résultats obtenus lors de l'élaboration d'alliages d'aluminium, on s'est efforcé de donner à ce risque une formulation générale en fonction des caractéristiques du résultat analytique et des limites de tolérance.

Dans ce qui suit, sont présentées les méthodes de calcul générales permettant de traiter l'ensemble des problèmes de ce type en vue de mettre à la disposition des responsables de fabrications, des services de normalisation, des laboratoires, un outil directement utilisable, permettant d'évaluer dans des cas concrets, le coût des imperfections du contrôle, des éventuelles inadéquations des normes, etc...

Deux exemples concrets font l'objet d'un traitement numérique.

INTRODUCTION

Une certaine fabrication supposée, dans un premier temps, stable, c'est-à-dire considérée comme sans dérive, et unimodale est suivie au moyen d'un contrôle effectué à l'aide d'une technique déterminée. Le problème consiste à estimer l'incidence économique des caractéristiques du résultat de mesure. Référence plus ou moins implicite est faite à l'élaboration d'un alliage dont les spécifications comportent des tolérances sur les taux de différents éléments et à la détermination de ces taux par une technique analytique appropriée.

De l'exactitude de ce résultat, c'est-à-dire de l'exactitude et de la précision de la méthode qui le fournit, dépend en effet le rejet ou l'acceptation de la fourniture et les risques qui s'y rattachent :

- risque de rejet (à l'usine même) d'une marchandise répondant effectivement aux spécifications, mais rebutée sur la foi d'un résultat analytique inexact ; dans ce cas, le rejet se traduit

- par un déclassement de la marchandise,
- par une rétrogradation dans l'état d'élaboration de la marchandise ;

- risque de rejet (chez le client) d'une fourniture ne répondant pas aux spécifications, mais n'ayant pas été arrêtée à l'usine, également du fait d'une analyse inexacte.

Il faut noter que la seconde catégorie de risques est plus importante que la première, la tendance à redresser un résultat défavorable étant évidemment plus marquée que celle à mettre en doute un résultat apparemment satisfaisant ; en outre, il sera toujours licite au moins lors du traitement général du problème de supposer que le client chez qui se trouve l'origine des risques de 2ème espèce, dispose de méthodes de contrôle plus exactes et plus précises.

Par ailleurs, les caractéristiques du résultat analytique concourent ou doivent concourir avec les propriétés du matériau à analyser, à la définition des spécifications. Ces dernières auront d'autant plus de signification technique que les renseignements relatifs à ces deux catégories de données seront connus avec plus de précision.

1 - POSITION DU PROBLEME. HYPOTHESES

Le traitement général du problème, tel qu'il va être exposé, suppose qu'il a été formulé dans un cadre bien délimité. Nous avons cherché à l'aborder sous un angle extrêmement concret en nous contentant de considérer les choses telles quelles sont ; tout ce qui suit dérive d'observations réelles. Dès lors, les hyptohèses de base n'ont pour but que de décrire le cadre dans lequel a lieu la relation entre les fonctions de Fabrication, de Contrôle et de Décision.

Ainsi, d'une part :

- aucun jugement n'est porté sur la représentativité de l'échantillon qui est ce qu'il est et sur l'examen duquel, de toute façon, est prise la décision ;

- aucun jugement n'est porté sur le bien-fondé des limites de tolérance : l'étude de leur relation avec les caractères du résultat analytique devrait faire l'objet d'un examen spécial ;

- aucune estimation n'est faite des risques effectifs de rebut qui peuvent, dans la pratique, être pondérés par des paramètres non rationalisables : qualité des rapports avec les clients, etc... En outre, il est implicitement attribué le même poids au risque de laisser passer un produit dont la qualité devrait entraîner le rebut et au risque de rejeter un produit dont la qualité répond aux tolérances.

Par contre, on suppose d'autre part :

- que le produit examiné est fabriqué par une technique bien définie et si possible normalisée ;

- qu'il n'y a pas de dérive systématique dans le temps de la qualité du produit.

2 - TRAITEMENT DU PROBLEME DANS LE CAS GENERAL

2.1 Par souci de simplicité, on ne s'intéressera ici qu'à la limite supérieure de tolérance T_s. Le caractére X du produit dont on considère la fabrication présente une certaine fonction de fréquence

$$R_X = f(x) \tag{1}$$

telle que

$$\int_I^S f(x)\, dx = 1$$

I et S étant les bornes inférieure et supérieure possibles de la valeur x de X pour la fabrication considérée. Soit T_s la limite supérieure de tolérance fixée pour des raisons techniques telles que : $x > T_s$ entraîne un abaissement de la qualité du produit supérieur à une certaine valeur arbitraire fixée à l'avance en fonction de sa compatibilité avec les conditions d'utilisation du produit (par exemple module d'élasticité, difficultés de laminage, etc.) On sait que, dans la fabrication que décrit l'équation (1), on a à supporter des frais supplémentaires d'élaboration correspondant à

$$1 - \int_{T_i}^{T_s} f(x)\, dx \tag{2}$$

La décision d'exploitation, qui revient à juger que la fabrication résumée par R est génératrice de profit, dépendra à la fois du prix de revient, de l'état du marché et des positions respectives de R et de T_s, c'est-à-dire de la possibilité commerciale de faire supporter les frais correspondant à l'expression (2) par la fraction de la fabrication répondant à la spécification définie par T_s (ou par une autre fabrication, etc...).

En pratique :

a) D'une façon générale, on ne connait pas la vraie fonction de fréquence R mais on peut habituellement en obtenir une bonne approximation à l'aide par exemple de mesures de laboratoire du type de celles qui sont (ou devraient être) mises en oeuvre dans une analyse d'expertise, plus précises que les mesures industrielles.

b) La connaissance concrète que l'on a de la qualité de la fabrication repose sur l'ensemble des données analytiques obtenues par le laboratoire de contrôle, qui définit une fonction de fréquence

$$R'_X = g(x) \neq R_X$$

telle que

$$\int_{I'}^{S'} g(x)\, dx = 1$$

et qui

- généralement est (doit être) plus dispersée que R, ce qui traduit l'imprécision de la méthode ;

- peut être décalée par rapport à R, ce qui traduit l'existence d'une erreur systématique.

Dans l'hypothèse d'une connaissance idéale de la qualité de la fabrication, le risque de rejet encouru par le fournisseur est proportionnel à l'aire A

$$A = \int_{T_s}^{S} f(x)\ dx$$

indiquée en noir sur la figure 1.

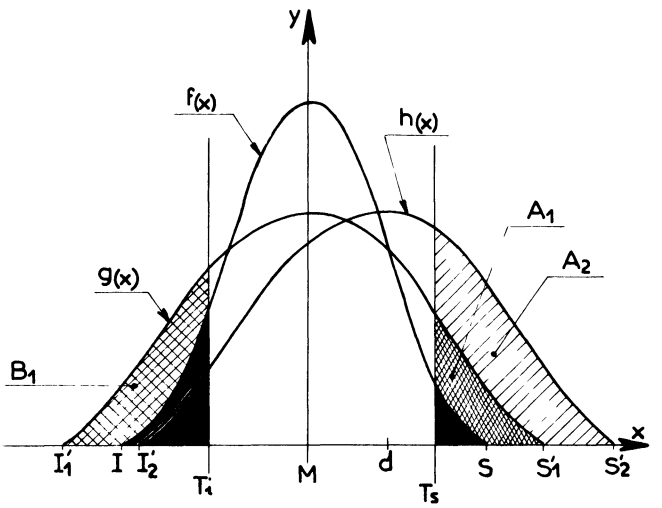

Figure 1

La question qui se pose est l'évaluation du risque supplémentaire que l'imperfection de la détermination fait courir au fournisseur. Ce risque est proportionnel à l'aire A_1, quadrillée sur la figure, qui s'exprime :

$$A_1 = \int_{T_s}^{S'_1} g(x)\ dx - \int_{T_s}^{S} f(x)\ dx \qquad (3)$$

Cette relation est générale. Dans le cas où la mesure est de plus systématiquement inexacte, par excès par exemple, l'expression de l'aire à laquelle le risque supplémentaire encouru est proportionnel, devient :

$$A_2 = \int_{T_s}^{S'_1+d=S'_2} g(x - d)\ dx - \int_{T_s}^{S} f(x)\ dx$$

où $g(x - d) = h(x)$.

2.2 On pourrait s'intéresser également à la limite inférieure T_i ; ce cas, qui est justiciable d'un raisonnement analogue, ne sera pas étudié en détail. Nous remarquerons seulement que tant que l'erreur systématique d reste approximativement inférieure à la différence $I'_1 - I$ des valeurs minimales observées et réelles du caractère mesuré, le risque de rebut pour les grandeurs mesurées supérieures à T_s est partiellement compensé par l'acceptation de fourniture pour laquelle le caractère X mesuré est supérieur à T_i alors qu'il lui est en réalité inférieur.

Le calcul que l'on se propose de faire suppose donc la connaissance de la description "industrielle" de la production (seule description dont dispose le producteur et qui lui a permis de prendre en leur temps les différentes décisions élémentaires), et une description "de référence" réputée exacte. Ce sont ces deux descriptions qui ont été désignées respectivement par g(x) et f(x). La démarche à effectuer comporte :

a) La détermination du type analytique des deux répartitions de fréquence ;

b) celle des valeurs numériques des paramètres intervenant dans les fonctions précédentes ;

c) les tests de validité des ajustements des fonctions choisies aux valeurs expérimentales ;

d) le calcul des aires exprimant le rebut ou l'acceptation injustifiés, but initialement proposé ;

e) enfin, la transformation en données économiques des résultats du calcul.

Dans ce qui suit :

- seront traités de façon plus ou moins détaillée les points a), b) et d) dans le cadre d'hypothèses générales formulées sur la foi d'observations portant sur des fabrications réelles ;

- le point c) ne sera pas autrement mentionné : on supposera sans démonstration que la technique de détermination, exposée sous a), de la forme analytique de la fonction de fréquence est de nature à fournir un ajustement des valeurs expérimentales correspondant à une probabilité élevée qu'un test d'ajustement comme le χ^2 soit satisfaisant ;

- le point e) ne sera pas traité ici : bien que l'objectif du présent travail soit de fournir des valeurs économiquement significatives, exprimables en unité monétaire, nous avons estimé que seul le responsable d'une fabrication a qualité pour effectuer cette transformation finale.

3 - SOLUTION GENERALE

3.1 Choix de la fonction de fréquence

L'ajsutement d'une fonction de fréquence aux données expérimentales revêt ici une importance particulière du fait que les conclusions font intervenir les extrémités de deux distributions à comparer. C'est pourquoi on ne se contentera généralement pas d'ajuster les données à l'aide d'une loi de GAUSS mais on s'efforcera de trouver une fonction qui décrive les observations de la façon la plus exacte possible.

La pratique a montré que la technique de représentation élaborée par Karl PEARSON [1,2] est particulièrement bien adaptée à ce genre de travail. Le principe en est rappelé rapidement ci-dessous.

Karl PEARSON fait sur la distribution un certain nombre d'hypothèses assez générales pour être acceptables dans la plupart des cas de distribution

unimodale, ce que l'on supposera réalisé. L'ensemble des hypothèses retenues conduit à faire intervenir la densité de probabilité y dans une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = y \frac{b - x}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}$$

où x est la valeur du caractère X, b est une racine du polynôme figurant au numérateur de l'expression du second membre, a_0 a_1 et a_2 sont des constantes.

Dans ces conditions,

- pour $x = b$, la fonction y et sa dérivée y' s'annulent,
- pour $x = 0$, $y = c^{te}$ et $y' = 0$,

ce qui constitue les principales hypothèses de Karl PEARSON.

3.2 Diagramme en $\beta_1 \beta_2$

L'équation différentielle générale admet un certain nombre de solutions représentées chacune par une fonction de fréquence elle-même définie par certaines valeurs des paramètres. Karl PEARSON a montré que ces paramètres peuvent être exprimés simplement en fonction des moments de la distribution et particulièrement de combinaisons simples β_1 et β_2 entre ces moments, définis respectivement comme caractéristiques de symétrie et d'aplatissement et ayant comme expression

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \qquad \text{et} \qquad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

comme il est bien connu.

D'après la théorie de Karl Pearson, le plan (β_1, β_2) est divisé en un certain nombre de domaines par des courbes exprimant des relations caractéristiques entre β_1 et β_2. On trouve ainsi principalement :

a) Une biquadratique, exprimant la relation :

$$\frac{\beta_1 (8\beta_2 - 9\beta_1 - 12)}{4\beta_2 - 3\beta_1} = \frac{(10\beta_2 - 12\beta_1 - 18)^2}{(\beta_2 + 3)^2}$$

à chacune des branches de laquelle correspond un type particulier (dits VIII et IX).

b) Une cubique

$$4(4\beta_2 - 3\beta_1)(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6) = \beta_1 (\beta_2 + 3)^2$$

à laquelle correspond le type V.

Les relations précédentes et différentes autres découpent dans le plan des régions à l'intérieur desquelles le point β_1 β_2 exprime une solution particulière de l'équation différentielle. Parmi les points privilégiés de ce diagramme, on trouvera le point $(\beta_1 = 0, \beta_2 = 3)$ auquel correspond la loi de GAUSS dont l'expression analytique n'est qu'un cas particulier parmi les so-

lutions de l'équation différentielle. La figure 2 représente à la fois le diagramme (simplifié) de Karl Pearson et les principales fonctions de fréquence rencontrées dans le genre de problèmes qui nous occupe.

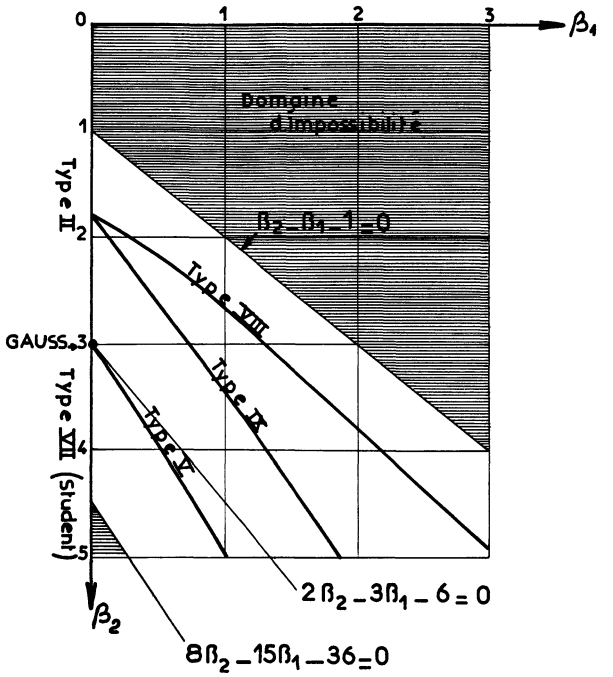

Figure 2 - Diagramme β_1, β_2 selon KARL PEARSON

Type II : $y = y_o \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\nu}$ Type VIII : $y = y_o \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-\nu}$

Type V : $y = y_o \left(e^{\frac{-\gamma}{x}} x^{-p}\right)$ Type IX : $y = y_o \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\nu}$

Type VII : $y = y_o \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\nu}$ Gauss : $y = y_o \; e^{\frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}}$

Lors de la définition de la loi de répartition, il faut prendre soin de considérer que les erreurs commises sur β_1 et β_2 à partir d'un échantillon de n individus d'une population infinie sont assez importantes : dans le cas où la population échantillonnée est gaussienne, la variance sur l'estimation de β_1 et de β_2 peut être pris comme égal à 6/n et 24/n respectivement [3], ce qui justifie les assimilations que l'on peut être amené à faire d'une certaine loi de distribution à une loi de formulation plus simple.

3.3 Estimation des paramètres

Le type analytique de chacune des distributions à considérer étant choisi, on en estimera les paramètres au moyen de la méthode du maximum de vraisemblance ou de la méthode des moments, cette dernière conduisant généralement à des calculs plus simples.

Enfin on admettra, comme on l'a déjà mentionné, que la procédure résumée ci-dessus dispense de l'application d'un test de validité.

4 - CALCUL DES AIRES EXPRIMANT LE REBUT OU L'ACCEPTATION INJUSTIFIES

Dans le cadre général, rappelé ci-dessus, que nous nous sommes assigné pour la solution de ce problème, seront traités à titre d'exemple 2 cas concrets empruntés à l'expérience industrielle de deux établissements de notre Groupe et relatifs à l'élaboration et au contrôle d'alliages d'aluminium. Le calcul sera mené dans le détail de façon à en faciliter l'application à d'autres cas susceptibles de concerner le lecteur.

1er exemple

Il s'agit du contrôle d'un alliage de transformation élaboré par coulées unitaires de 12 tonnes environ ; le taux nominal de l'élément dosé est 4,55 %, les limites de tolérance étant 4,40 et 4,70 %. Le contrôle est effectué au Laboratoire de l'Usine par une certaine méthode M_2 qui fournira la population g(x) ; ce moyen de contrôle a été vérifié par une technique M_1, plus longue et plus coûteuse, mais aussi plus précise, qui a fourni sur les échantillons eux-mêmes analysés par l'usine la population de référence f(x).

Les observations portent sur 194 cas ; elles sont résumées dans le tableau I et les fonctions de fréquence qu'on en peut déduire sont représentées sur la figure 3.

Tableau I

Dosage d'un élément A dans un alliage d'aluminium

Composition visée : A = 4,55
Limites de tolérance : 4,40 - 4,70

Méth.	Observations					Fonction de fréquence ajustée		
	n	$\bar{x}$	σ	β_1	β_2	Type	Forme analytique	Paramètres
M_1	194	4,45	0,18	0,20	4,11	STUDENT	$f(x) = y_o \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\nu}$	$\nu = 5,23$ $a = 0,49$ $y = 2,45$
M_2	194	4,48	0,21	0,05	5,05	STUDENT	$g(x) = y_o \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\nu}$	$\nu = 3,96$ $a = 0,46$ $y = 2,2$

Les deux populations, symétriques ($\beta_1 \neq 0$), peuvent être décrites, l'une et l'autre, par une loi de STUDENT ($\beta_2 > 3$) de paramètres différents.

Calcul des paramètres dans le cas général :

On exprimera la condition :

$$y_o \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\nu} dx = 1$$

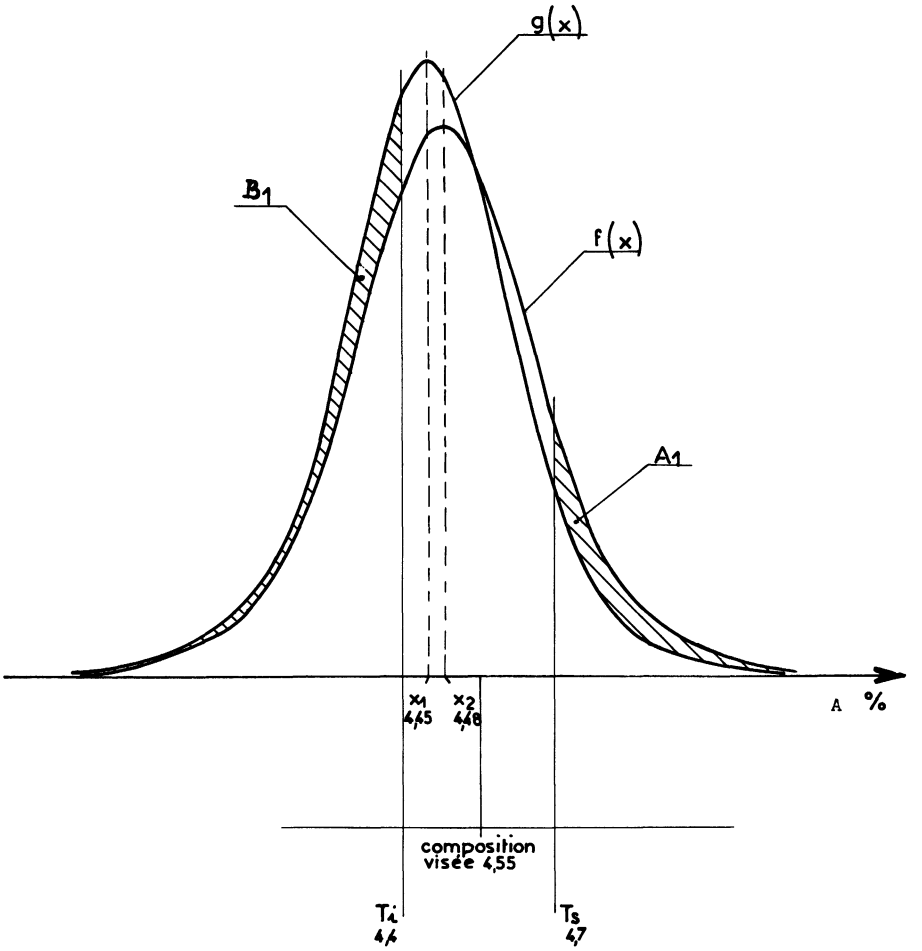

Figure 3 - Exemple n° 1 : fonctions de fréquence, relatives à la production de l'alliage considéré, du taux de l'élément A déterminé par les méthodes M_1 – f(x) et M_2 – g(x).

En effectuant le changement de variable :

$$1 + \frac{x^2}{a^2} = \xi^{-1}$$

c'est-à-dire :

$$x = a \left(\frac{1 - \xi}{\xi}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{a}{2} (1 - \xi)^{-1/2} \xi^{-3/2} d\xi$$

et en utilisant la propriété de symétrie de la fonction, il vient après simplification :

$$y \; a \int_0^1 \xi^{\nu-3/2} (1 - \xi)^{-1/2} d\xi = 1$$

où l'expression sous le signe $\int$ n'est autre que l'intégrale eulérienne de 1è espèce B (ν - 1/2, 1/2). On a donc :

$$y_o = \frac{1}{a\ B\left(\nu - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{a}\ \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu - 1)\ .\ \sqrt{\pi}}$$

Par l'expression du moment d'ordre 2q

$$\mu_{2q} = y_o \int_{-\infty}^{+\infty} x^{29} \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\nu} dx$$

le calcul conduit à l'expression :

$$\mu_{2q} = a^{2q}\ \frac{\Gamma\left(\nu - q - \frac{1}{2}\right)\ .\ \Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\ .\ \sqrt{r}}$$

ce qui donne :

$$\mu_2 = a^2\ \frac{1}{2\nu - 3}$$

$$\mu_4 = a^4\ \frac{3}{(2\nu - 3)\ (2\nu - 5)}$$

D'où

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{3(2\nu - 3)}{2\nu - 5}$$

Ces expressions permettent de calculer, d'après les résultats expérimentaux que sont le coefficient d'aplatissement et la variance, les valeurs des paramètres intervenant dans la fonction de fréquence :

$$\nu = \frac{5\beta_2 - 9}{2\beta_2 - 6} \qquad \text{et} \qquad a = \sigma\left(\frac{2\beta_2}{\beta_2 - 3}\right)^{1/2}$$

Il est dès lors facile de calculer l'aire A_1 qui, dans l'exemple présenté, exprime la probabilité de livrer une fourniture hors tolérance supérieure, c'est-à-dire de s'exposer à un retour de la part du client.

Il suffit de calculer :

$$A_1 = y_2 \int_{T_s}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{a_2^2}\right)^{-\nu_2} dx - y_1 \int_{T_s}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{a_1^2}\right)^{-\nu_1} dx$$

l'indice 1 se rapportant à la fonction f(x) ajustant la population des valeurs réputées exactes, l'indice 2 se rapportant à la fonction g(x) ajustant la population de valeurs de qualité "contrôle courant". Le changement de variable précédemment indiqué conduit à :

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[a_2 y_2 \int_0^{\frac{a_2^2}{a_2^2+T_s^2}} \xi^{\nu_2-\frac{3}{2}} (1-\xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi - a_1 y_1 \int_0^{\frac{a_1^2}{a_1^2-T_s^2}} \xi^{\nu_1-\frac{3}{2}} (1-\xi)^{-\frac{1}{2}} d\xi \right]$$

Les expressions sous le signe $\int$ ne sont autres que l'intégrale eulérienne de première espèce bornée B_z (p, q) ; en remplaçant dans l'expression précédente y_1 et y_2 par leur valeur, et en désignant par S_z (p, q)(*) le rapport B_z (p, q)/B (p, q), il vient :

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[S_{z_2}(p_2, q_2) - S_{z_1}(p_1, q_1)\right]$$

Dans le cas de l'exemple dont les données sont condensées dans le tableau I, on a obtenu :

$$A_1 \neq 4{,}5\ \%$$

résultat, d'ailleurs peu différent de celui qu'aurait donné la simple considération de la loi de GAUSS(**), qui signifie que, dans le cas des hypothèses faites (stabilité de la production), on s'expose 4,5 fois sur 100 à une contestation de la part du client. Le calcul a conduit d'autre part à affecter à l'aire B_1 une valeur de 5,5 %, ce qui signifie, vu la position relative des deux courbes, que, dans 5,5 % des cas, on était conduit à rebuter à l'usine un produit qui, en fait, répondait aux spécifications.

2e exemple

Il s'agit ici du contrôle d'un autre alliage élaboré dans des conditions générales analogues à celles mentionnées dans l'exemple précédent. Les caractéristiques de l'alliage et des résultats recueillis sur 42 coulées unitaires figurent au tableau II et les fonctions de fréquence qu'on en peut déduire sont représentées sur la figure 4.

La différence d'avec le premier exemple porte sur deux considérations : on recherchait en fait à tester la méthode de contrôle désignée sous le numéro M_2 qui, plus rapide et moins coûteuse, aurait comporté un notable avantage sur la méthode de référence M_1 seule utilisée finalement pour un contrôle en usine ; en effet la méthode à tester faisait apparaître à tort, sur une population suffisamment importante, un décalage systématique notable de la fabrication. Par ailleurs, les deux populations sont dissymétriques et sont l'une et l'autre justiciables d'un ajustement au moyen d'une fonction dite type V de Karl PEARSON ; ainsi le traitement du problème abordé requiert une solution différente de celle exposée dans l'exemple précédent.

(*) Les valeurs de S_z (p, q) ont été tabulées par Karl PEARSON, mais le pas adopté étant assez peu faborable pour le domaine dans lequel se situent les valeurs habituellement rencontrées dans ce genre de travaux, nous avons demandé à notre Service "Calculatrice Electronique" (M. CHAMPETIER DE RIBES) de tabuler un ensemble de valeurs d'emploi plus commode constituant une table qui pourra être publiée ultérieurement.

(**) Le calcul, plus simple, n'est pas développé ; les nombreuses tables existantes de la loi de GAUSS permettent de traiter facilement et rapidement le problème.

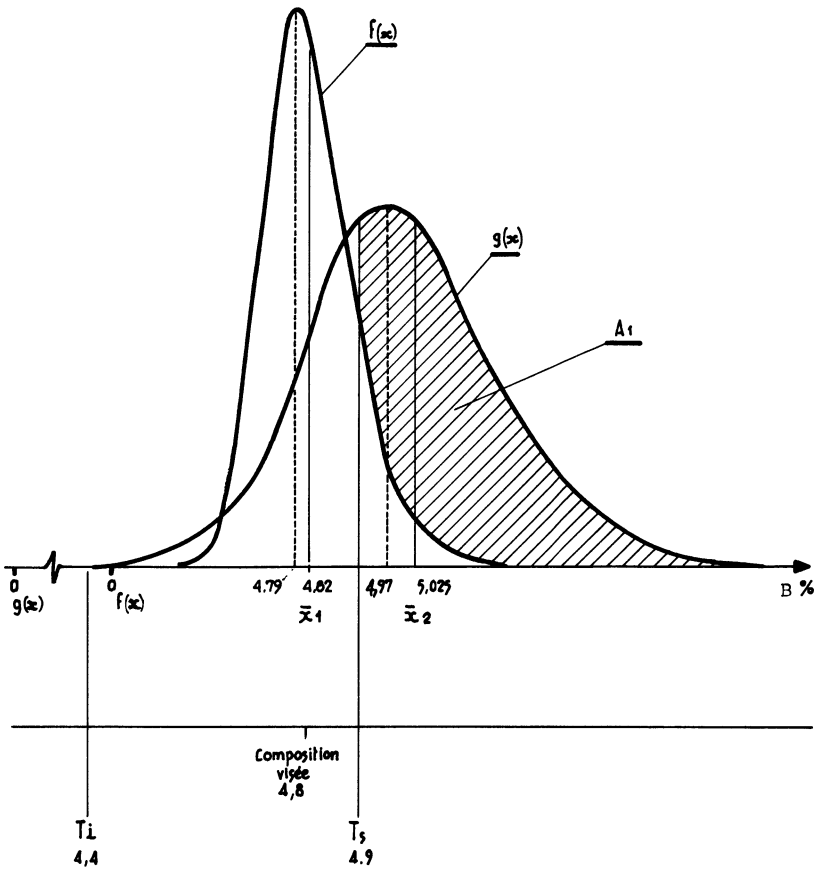

Figure 4 - Exemple n° 2 : fonctions de fréquence, relatives à la production de l'alliage considéré, du taux de l'élément B déterminé par les méthodes M_1 – f(x) et M_2 – g(x).

Tableau II

Dosage d'un élément B dans un alliage d'aluminium

Composition visée : B = 4,80
Limites de tolérance : 4,40 - 4,90

Méth.	Observations					Fonction de fréquence ajustée		
	n	$\bar{x}$	σ	β_1	β_2	Type	Forme analytique	Paramètres
M_1	42	4,819	0,084	0,55	3,95	K.P.V	$f(x) = y_o\, e^{-\frac{\gamma}{x}}\, x^{-p}$	$p = 34$ $\gamma = 15_{3,4}$ $y_o = 10$ $\gamma_1' = 0,47$
M_2	42	5,025	0,179	0,20	3,63	K.P.V	$g(x) = y_o\, e^{-\frac{\gamma}{x}}\, x^{-p}$	$p = 85$ $\gamma = 133_{54}$ $y_o = 10$ $\gamma_1' = 1,61$

Calcul des paramètres dans le cas général :

La fonction de fréquence

$$y = y_o \, e^{-\frac{\gamma}{x}} \quad x^{-p}$$

est bornée aux valeurs 0 et + ∞ ; son mode est égal à γ/p et la moyenne μ_1 est égale à σ p-3. On calculera y_o en écrivant la condition :

$$y_o \int_o^\infty e^{-\gamma/x} \, x^{-p} \, dx = 1$$

En effectuant le changement de variable

$$\xi = \frac{\gamma}{x}$$

c'est-à-dire :

$$x = \frac{\gamma}{\xi} \qquad \text{et} \qquad dx = -\gamma \, \xi^{-2} \, d\xi$$

il vient après simplification :

$$y \quad \gamma^{1-p} \int_o^\infty e^{-\xi} \quad \xi^{p-2} \, d\xi = 1$$

où l'expression sous le signe $\int$ n'est autre que l'intégrale eulérienne de seconde espèce $\Gamma(p - 1)$. On a donc :

$$y = \frac{\gamma^{p-1}}{\Gamma(p - 1)}$$

Le calcul du moment d'ordre q par rapport à l'origine fournira l'expression générale

$$\mu'_q = y_o \int_o^\infty x^q \, e^{-\frac{\gamma}{x}} \quad x^{-p} \, dx = \gamma^q \, \frac{\Gamma(p - q - 1)}{\Gamma(p - 1)}$$

et conduit pour la moyenne

$$\mu'_1 = y_o \int x \, e^{-\frac{\gamma}{x}} \quad x^{-p} \, dx$$

à la valeur

$$\mu'_1 = \frac{\gamma^{p-1}}{\Gamma(p - 1)} \gamma^{2-p} \; \Gamma(p - 2) = \frac{\gamma}{p - 2}$$

On passera ensuite aisément, par l'intermédiaire des relations connues :

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_1 \, \mu'_2 + 2\mu'^3_1$$

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_1 \, \mu'_3 + 6\mu'^2_1 \, \mu'_2 + 3\mu'^4_1$$

aux expressions des moments par rapport à la moyenne :

$$\mu_2 = \frac{\gamma^2}{(p - 2)^2 \, (p - 3)}$$

$$\mu_3 = \frac{4\gamma^3}{(p-2)^3\,(p-3)\,(p-4)}$$

$$\mu_4 = \frac{3(p+4)\,\gamma^4}{(p-2)^4\,(p-3)\,(p-4)\,(p-5)}$$

De là on tirera pour les paramètres β_1 et β_2, qui sont d'autre part calculés à partir de leur définition et des données expérimentales, les expressions suivantes qui permettent la détermination numérique de γ et de p :

$$\gamma = \sigma(p-2)\,(p-3)^{1/2} \qquad \text{et} \qquad p = 4 + \frac{2}{\beta_1}\,(\beta_1 + 4)^{1/2}$$

Le calcul de l'aire A_1, dont la disposition des courbes indique qu'il convient de s'occuper seule,

$$A_1 = y_2 \int_{T_s}^{\infty} e^{-\frac{\gamma_2}{x}}\, x^{-\gamma_2}\, dx - y_1 \int_{T_s}^{\infty} e^{-\frac{\gamma_1}{x}}\, x^{-\gamma_1}\, dx$$

s'effectuera à l'aide des changements de variable indiqués plus haut. Pour chacune des intégrales, il vient une expression de la forme :

$$\frac{1}{\Gamma(p-1)}\,\Gamma_{\gamma/T_s}\,(p-1)$$

où Γ_{γ/T_s} (p-1) désigne la fonction eulérienne incomplète de seconde espèce. Le rapport R (z, p-1) = Γ_z (p-1)/(p-1) a été tabulé par Karl Pearson et le calcul de l'aire A_1

$$A = R\left(\frac{\gamma_2}{T_s}, p_2 - 1\right) - R\left(\frac{\gamma_1}{T_s}, p_1 - 1\right)$$

devient donc extrêmement simple [4].

Dans l'exemple considéré ici (tableau II), on a obtenu

$$A_1 \# 56\,\%$$

Autrement dit, le contrôle, effectué par la méthode de contrôle M_2 entraînerait un refus injustifié de 56 % de la production, alors que le calcul montre (il suffit pour cela de considérer $R(\gamma_1/T_s, p_1-1)$) que la fraction de la production effectivement hors tolérance supérieure n'est que de 16 % environ. Il appartient évidemment aux responsables de la production et du contrôle, d'examiner conjointement la question et de décider si les frais élevés entraînés par l'application de la méthode de contrôle M_1 sont justifiés (ce qui ici ne fait d'ailleurs pas de doute !).

CONCLUSIONS

Les considérations précédentes, jointes aux exemples qui les illustrent voudraient montrer qu'il est possible de remplacer par la mesure objective

l'appréciation souvent mal fondée de la réponse à une question controversée : Dans quelle mesure convient-il de rechercher l'accroissement coûteux de la précision d'un contrôle industriel ?

Il est évident que le cadre des exemples donnés ne constitue pas une limitation au raisonnement qu'ils illustrent mais que, avec les restrictions faites d'autre part (concernant la représentativité de l'échantillon, la valeur concrète du risque...), le procédé est généralisable et ses applications multiples.

Connaissant la forme des distributions susceptibles de décrire une fabrication selon que l'on portera son attention aux limites de tolérance ou à la valeur modale de la grandeur considérée, les mêmes calculs permettront de juger le bien-fondé de certaines normes, l'importance de l'exactitude des taux annoncés pour les étalons destinés à la mise en oeuvre de méthodes physiques d'analyse, l'adéquation d'une technique de contrôle etc...

REMERCIEMENTS

Je remercie vivement M. LORIDON, Directeur de la Division "Recherches de Transformation" et M. PLATEAU, Chef de la Division des Etudes Fondamentales du Centre de Recherches du Groupe PECHINEY, de l'intérêt qu'ils ont pris aux travaux relatés ci-dessus. De même je remercie également pour leur collaboration à différents titres MM. DUGAIN, LEFEBVRE, les équipes qu'ils animent et Mme VEDOVATI ainsi que les responsables de fabrication dans divers Etablissements du Groupe qui ont bien voulu participer à ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] PEARSON K. - Phil. Trans. Roy. Soc. A 186 343 (1895)

[2] PEARSON K. - Phil. Trans. Roy. Soc. A 197 443 (1901)

[3] KENDALL M.G., STUART A. - The Advanced Theory of Statistics Ch. Griffin London (1962) T I p. 243

[4] PEARSON K. - Tables of the Incomplete Γ Function H.M.S.O. London (1922)