REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

B. SORIN
P. THIONET

Lois de probabilités de Bessel

Revue de statistique appliquée, tome 16, nº 4 (1968), p. 65-72
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1968__16_4_65_0>

LOIS DE PROBABILITÉS DE BESSEL

B. SORIN et P. THIONET

INTRODUCTION

La présente note se propose seulement de réunir quelques renseignements, trouvés à droite et à gauche, répondant à une question qu'un statisticien a parfois l'occasion de se poser.

Désignons par u_i une variable aléatoire de Laplace-Gauss (autrement dit normale) de moyenne 0 et de variance 1, en abrégé :

$$\mathcal{L}(u_i) = \mathcal{N}(0,1) \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots\ldots$$

On supposera les u_i indépendantes. Il est bien connu que

$$\mathcal{L}(u_1 + u_2) = \mathcal{N}(0,2)$$

$$\mathcal{L}(u_1 - u_2) = \mathcal{N}(0,2)$$

$u_1 + u_2$ et $u_1 - u_2$ étant alors indépendantes.

De plus on a :

$$\mathcal{L}(u_1^2 + u_2^2) = \chi^2(2)$$

(définition courante d'une variable χ^2 à 2 degrés de liberté).

Maintenant si l'on a la curiosité de chercher la loi de u_1/u_2, on voit facilement qu'il s'agit d'une variable de Cauchy. En revanche on ne connaît aucune loi de probabilité courante qui corresponde à :

$$\mathcal{L}(u_1^2 - u_2^2) \quad \text{ou à} \quad \mathcal{L}(u_1 u_2)\ ;$$

ce qui revient au même, puisque

$$\Delta = u_1^2 - u_2^2 = (u_1 - u_2)(u_1 + u_2) = 1\ \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{2}}\ \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{2}}$$

$$= 2\ v_1 v_2$$

avec

$$\mathcal{L}(v_1) = \mathcal{N}(0,1) \qquad ; \qquad v_1,\ v_2 \text{ indépendantes.}$$

Nous allons voir que $u_1^2 - u_2^2$ (ou $u_1\, u_2$) suit une loi de Bessel c'est-à-dire que sa densité de probabilité est une certaine fonction de Bessel .

C'est également le cas pour d'autres variables aléatoires, qu'on a l'occasion de rencontrer et dont on donnera quelques exemples, - par exemple la différence entre deux χ^2 indépendants (leur rapport ayant la distribution bien connue de Fisher Snedecor F).

EQUATION DE BESSEL. FONCTIONS DE BESSEL

On appelle équation de Bessel l'équation différentielle du 2ème ordre sans 2ème membre à coefficients variables

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)\, y = 0$$

Ses solutions sont de deux espèces :

$$(1) \quad J_\nu(x) \qquad \text{et} \qquad (2) \quad K_\nu(x)$$

En fait on a intérêt (passant dans le plan complexe) à remplacer x par z.

D'un autre côté, nous nous intéresserons spécialement ici au cas $\nu = 0$; l'équation

$$z^2 y'' + z\, y' - z^2 y = 0$$

admet les solutions $J_o(z)$ et $K_o(z)$: fonctions de Bessel d'ordre zéro.

FONCTIONS DU TYPE J

voir [1] page 101

$$J_\nu(v) = \frac{1}{2\Pi} \int_o^{2\Pi} \text{Cos}\,(\nu\theta - x \sin\theta)\, d\theta$$

d'où

$$J_o(x) = \frac{1}{2\Pi} \int_o^{2\Pi} \text{Cos}\,(x \sin\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\Pi} \int_o^{2\Pi} \text{Cos}\,(x\, \text{Cos}\,\theta)\, d\theta$$

ou

$$= \frac{1}{\Pi} \int_o^{\Pi} \text{Cos}\,(x\, \text{Cos}\,\theta)\, d\theta = \frac{2}{\Pi} \int_o^{\Pi/2} \text{Cos}\,(x\, \text{Cos}\,\theta)\, d\theta$$

ou

$$= \frac{1}{\Pi} \int_o^{\Pi} \exp\,(i\, x\, \text{Cos}\,\theta)\, d\theta$$

car $\int_o^{\Pi} \sin\,(x\, \text{Cos}\,\theta)\, d\theta = 0$ par symétrie.

EXEMPLE D'EMPLOI

Une variable aléatoire réelle X a pour densité 0 partout sauf sur (-a, +a), où l'on a :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\Pi} \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ F(x) = \dfrac{1}{\Pi} \text{arc sin} \left(\dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Quelle est sa fonction caractéristique ?

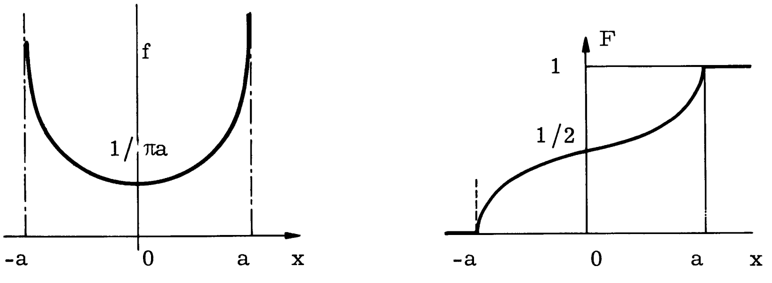
Réponse : c'est

$$\varphi(t) = \int e^{itx} \frac{1}{\Pi} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad (\text{poser } x = a \text{ Cos } \theta)$$

$$= \frac{1}{\Pi} \int_{-\Pi/2}^{+\Pi/2} \exp(iat \text{ Cos } \theta)\, d\theta = J_0(at)$$

Ce résultat et sa réciproque sont dans PARZEN, exercice 34 (p. 404-405) [2].

Nous renvoyons à l'Annexe (3) pour une relation assez cachée existant entre J_0 et la loi de Δ.



FONCTIONS DU TYPE K

Nous rejoignons le problème posé au début. Commençons par établir la fonction caractéristique de

$$\Delta = u_1^2 - u_2^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\Delta}{2} = u_1 u_2$$

(u_1 u_2 étant indépendantes).

On a

$$\varphi_{u^2}(t) = E(e^{iu^2}) = (1 - 2\,it)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_{u^2}(-t) = (1 + 2\,it)^{-\frac{1}{2}}$$

d'où

$$\varphi_{\Delta}(t) = \varphi_{u^2}(t)\, \varphi_{u^2}(-t) = (1 + 4\,t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ou

$$\varphi_{\Delta/2}(t) = E(e^{i\frac{\Delta t}{2}}) = (1 + t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Pour ce qui est de la densité de probabilité correspondante, on se reportera aux Annexes 1 et 2. On trouve :

$$f(\Delta) = \frac{1}{2\Pi} K_0 \left(\frac{|\Delta|}{2}\right)$$

où : $K_0(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre 0 et de 2ème espèce (type K) définie comme suit : cf [3] p. 376, formule 9.6.22.

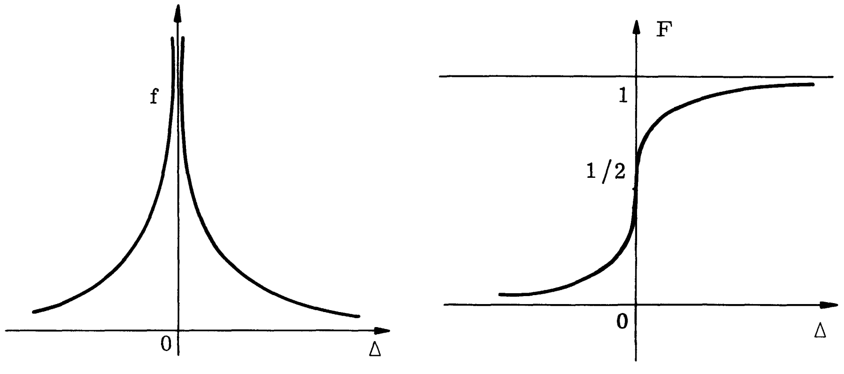
$$K_0(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{Cos} tx}{\sqrt{t^2+1}}\, dt \qquad (x \text{ réel}, > 0)$$

On a ainsi la fonction de répartition :

$$F(\Delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\Pi}\int_0^{\Delta} K_0\left(\frac{y}{2}\right) dy \quad , \quad \Delta > 0$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\Pi}\int_0^{|\Delta|} K_0\left(\frac{y}{2}\right) dy \quad , \quad \Delta < 0$$

Le graphe de $K_0(x)$ est la figure 9.7, page 374 dans [3]. On en déduit celui de $f(\Delta)$.



AUTRES PROBLEMES STATISTIQUES

1/ On trouve dans Kendall et Stuart [4] les énoncés d'exercices suivants :

page 271, Ex. 11.15. - Montrer que la différence z de deux variables indépendantes ayant chacune une distribution (gamma).

$$dF = e^{-x} x^{p-1} dx/\Gamma(p) \qquad p > 0,\ 0 \leq x < \infty$$

a pour densité

$$f(z) = z^{p-\frac{1}{2}} K_{p-\frac{1}{2}}(z)/2^{p-\frac{1}{2}}\Gamma(p)\,\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

où $K_r(x)$ désigne la fonction de Bessel de 2ème espèce d'argument imaginaire.

page 394, Ex. 16.2.

"Si u_1, u_2, ...u_n sont indépendantes et distribuées selon des lois de χ^2, montrer que $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i$ (où $a_i = +1$ ou -1) est soit une variable χ^2, soit une variable dont la densité est une fonction de Bessel, soit enfin la différence entre un χ^2 et une variable ayant pour densité une fonction de Bessel".

Il est fait référence à un article de Karl Pearson, Stouffer et Florence David paru en 1932 [5].

2/ Un problème plus général, celui de la distribution d'une combinaison linéaire de divers χ^2 (indépendants) centrés ou décentrés, fait en ce moment l'objet d'une littérature trop abondante pour que nous puissions en donner ici une bibliographie. En général, cependant, les coefficients de la combinaison linéaire restent positifs. Par exception on peut citer les articles de SHAH (1963) [6] et GURLAND (1955) [7]. La formule (14) de SHAH renferme les fonctions K_r de Bessel ; la formule (15) renferme les fonctions K_r et J_r. GURLAND les utilisait déjà.

Dans certains articles concernant les seules combinaisons à coefficients positifs, les K et J figurant dans les formules ne semblent plus désigner des fonctions de Bessel (voir par exemple [8]).

3/ En particulier, MANTEL et PASTERNAK ont indiqué quelques cas de différences entre χ^2 indépendants dont la distribution était particulièrement simple (1966) [9].

Par exemple : soit deux χ^2 à 2 degrés de liberté, χ_1^2 et χ_2^2. Posons :

$$2\,Y = (\chi_1^2 - \chi_2^2) = (u_1^2 + u_2^2) - (u_3^2 + u_4^2)$$

$$= (u_1^2 - u_3^2) + (u_2^2 - u_4^2) = \Delta_1 + \Delta_2$$

La fonction caractéristique de Y est :

$$\varphi_{2Y}(t) = (1 + 4\,t^2)^{-1} = \frac{1}{(1 + s^2)} \quad , \quad \text{avec} \quad s = 2\,t\ ;$$

de sorte que Y suit une loi de Laplace :

$$f(Y) = \frac{1}{2}\,e^{-|Y|}\,dY$$

ANNEXES

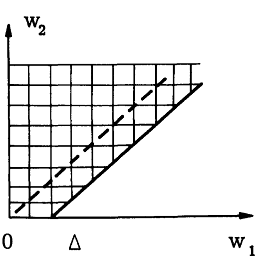
1/ Calcul de $f(\Delta)$, $\Delta = u_1^2 - u_2^2$

α) Posons

$$\frac{u_1^2}{2} = w_1 ; \frac{\Delta}{2} = \Delta' \quad ; \quad w_1 = \Delta' + w_2 \ ; \ dw_1 dw_2 = d\Delta'\, dw_2$$

Densité :

$$g(w) = e^{-w}\, w^{\frac{1}{2}}/\sqrt{\Pi} \ , \ w > 0 \quad [\sqrt{\Pi} = \Gamma(\tfrac{1}{2})]$$



La probabilité élémentaire est

$$\Delta' > 0 : f(\Delta)\, d\Delta = \frac{d\Delta}{2}\int_0^{+\infty} g(w_2 + \Delta')\ g(w_2)\ dw_2$$

poser $w_2 = w$; l'intégrale est :

$$\Pi^{-1}\int_0^{\infty} e^{-\Delta' - 2w}\ [w\,(\Delta' + w)]^{-\frac{1}{2}}\, dw$$

Poser

$$\Delta' + 2w = \Delta' \operatorname{ch} s \Longrightarrow \Delta'^2 + 4\Delta' w + 4w^2 = \Delta'^2 \operatorname{ch}^2 s = \Delta'^2 + \Delta'^2 \operatorname{sh}^2 s$$

$$\begin{array}{l|l} w = \dfrac{\Delta'}{2} (\operatorname{ch} s - 1) & 4(\Delta' + w)\, w = \Delta'^2 \operatorname{sh}^2 s \\ dw = \dfrac{\Delta'}{2} \operatorname{sh} s \, ds & [(\Delta' + w)\, w]^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\Delta'}{2} \operatorname{sh} s \end{array}$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(\Delta)\, \frac{1}{2\Pi} \int_0^{+\infty} e^{-\Delta' \operatorname{ch} s}\, ds} \qquad = \frac{1}{2\Pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\Delta}{2} \operatorname{ch} s} ds$$

c'est une première expression.

β) Posant

$$\Delta' \operatorname{ch} s = T$$

$$\Delta' \operatorname{sh} s \, ds = dT \quad ; \quad ds = \frac{dT}{\sqrt{T^2 - \Delta^2}}$$

$$\Longrightarrow f(\Delta) = \frac{1}{2\Pi} \int_0 e^{-T} \frac{dT}{\sqrt{T^2 - \Delta'^2}}$$

(seconde expression).

γ) On trouve dans [3] p. 1 028 la transformée de Laplace suivante :

$$\begin{array}{l|l} k > 0 & f^*(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt \\ t > 0 & F(t) = \dfrac{s}{\sqrt{t^2 - k^2}} \text{ est l'original} \end{array}$$

Il lui correspond l'image :

$$f^*(s) = K_0(ks)$$

On a donc :

$$K_0(ks) = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - k^2}}$$

d'où

$$s = 1, \ k = \Delta'$$

donc

$$f(\Delta) = \frac{1}{2\Pi} f^*(1) = \frac{1}{2\Pi} K_0(\Delta') = \frac{1}{2\Pi} K_0\left(\frac{\Delta}{2}\right)$$

(3ème expression)

2 - TRANSFORMEE DE FOURIER

On peut aussi retrouver $f(\Delta)$ par la transformation de Fourier ; mais l'énoncé habituel des théorèmes sur l'obtention d'une densité de probabilité à partir de la fonction caractéristique est mal adapté. On a :

$$\varphi(t) = (1 + 4\, t^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{(TF)} \qquad f(\Delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\Pi} \frac{e^{-it\Delta}}{\sqrt{1 + 4t^2}} dt = \frac{1}{2\Pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos t\Delta}{\sqrt{1 + 4t^2}} d(2t)$$

car l'intégrale relative à $\sin t\Delta$ disparaît par symétrie.

Or les traités de calcul des probabilités prennent la précaution de spécifier que la formule (TF) est valable quand $|\varphi(t)|$ est intégrable ; et ce n'est pas le cas ici.

On observera que c'est une condition suffisante, non nécessaire (cf. par exemple RENYI p. 289 : "Bornons-nous au cas où ; etc...) [10]. Elle est beaucoup trop restrictive.

Remarque 1 - On a encore :

$$K_o(x) = \int \cos(x \;\text{sh}t)\; dt$$

(4ème expression)

Remarque 2 - La formule d'inversion donnant $F(b) - F(a)$, en des points de continuité de F, est valable même si $|\varphi(t)|$ n'est pas intégrable. On peut en déduire la densité de probabilité par dérivation, ce qui justifie un emploi très large de (TF).

3 - RELATION ENTRE J_o et K_o

Posant :

$$S = u_1^2 + u_2^2 \;, \quad \frac{\Delta}{S} = \zeta,$$

on obtient facilement

$$g(w_1)\, dw_1 \;\; g(w_2)\, dw_2 = \frac{1}{\Pi} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-S/2} \frac{dS}{2} \quad ; \quad -1 < \zeta < +1$$

Posant :

$$\zeta = \sin\varphi \;, \quad -\frac{\Pi}{2} < \varphi < +\frac{\Pi}{2} \;, \quad \frac{1}{\Pi} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{d\varphi}{\Pi}$$

Ainsi φ et S sont indépendants. D'où :

$$E\, e^{it\Delta} = E\, e^{itS\zeta}$$
$$= \mathscr{E}_S\, E\, [e^{itS\zeta}/S]$$

Mais

$$E(e^{iu\zeta}) = \frac{1}{\Pi} \int_{-1}^{+1} e^{iu\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \int_{-\Pi/2}^{+\Pi/2} e^{iu \sin\varphi} \frac{d\varphi}{\Pi}$$
$$= J_o(u) \qquad \text{avec } u = tS$$

d'où

$$Ee^{it\Delta} = \int_0^\infty e^{-S/2} J (tS) \frac{dS}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}$$

Autrement dit

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-s} J_0(tS)\, dS = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}} \quad \text{transformée de Laplace de } J_0$$

Il existe ainsi entre J_0 et K_0 une réciprocité, analogue à celle existant entre la loi de Laplace et celle de Cauchy (mais bien entendu plus compliquée).

REFERENCES

[1] WHITTAKER E.T. et WATSON G.N. - A course of modern analysis Cambridge U.P. - 4ème édition (1952).

[2] PARZEN E. - Modern probability theory and its applications, John Wiley (1960).

[3] ABRAMOWITZ (W) et STEGUN (A) - Handbook of mathematical functions. Washington, National Bureau of Standards (1964).

[4] KENDALL M.G. et STUART A. - The advanced theory of Statistics Charles GRIFFIN.

[5] PEARSON K., STOUFFER, DAVID F. - Further applications in statistics of the T_m (x) Bessel function. Biometrika 24 (1932) p. 293.

[6] SHAH B.K. - Distribution of definite and of indefinite quadratic forms from a non-central normal distribution. Annals of Mathematical Statistics 34. 1 (1963) p. 186/90.

[7] GURLAND J. - Distribution of definite and indefinite quadratic forms Annals of Mathematical Statistics 26 (1955) p. 122/27. Corrections dans 33 (1962) p. 813.

[8] SHELDON JAMES PRESS - Linear combinations of non-central chi-square variates. Annals of Mathematical Statistics 37.2 (1966) p. 480/87.

[9] MANTEL N. et PASTERNAK B.S. - Light Bulb Statistics. Journal of the American Statistical Association 61 (1966) p. 633/39.

[10] RENYI A. - Calcul des probabilités. DUNOD (1966).