

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

E. MORICE

Puissance de quelques tests classiques effectif d'échantillon pour des risques α , β fixés

Revue de statistique appliquée, tome 16, n° 1 (1968), p. 77-126

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1968__16_1_77_0

© Société française de statistique, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PUISSANCE DE QUELQUES TESTS CLASSIQUES EFFECTIF D'ÉCHANTILLON POUR DES RISQUES α , β FIXÉS

E. MORICE

Deux problèmes d'un intérêt pratique certain se posent au technicien qui veut baser sa décision dans un problème d'estimation ou de test d'une hypothèse, sur l'information fournie par un échantillon (ou par deux échantillons s'il s'agit d'un problème de comparaison).

a) Quelle est, pour un effectif donné de l'échantillon (ou des échantillons) et un risque donné α de refuser une hypothèse vraie H_0 , la puissance du test c'est-à-dire la probabilité $1 - \beta$ de rejeter une hypothèse alternative spécifiée H_1 , ou, si l'on préfère quel est la risque β de ne pas déceler un certain désaccord entre la réalité et l'hypothèse que l'on teste ?

b) Quel doit être l'effectif de l'échantillon (ou des échantillons) pour avoir une probabilité $1 - \beta$ donnée de rejeter l'hypothèse H_0 soumise au test, lorsqu'une hypothèse alternative particulière H_1 est vraie, le test étant fait à un risque donné α de rejeter l'hypothèse H_0 si elle est vraie.

Parallèlement à ce dernier problème, se pose le problème de déterminer l'effectif d'échantillon pour que l'intervalle de confiance à $1 - \alpha$ dans l'estimation d'un paramètre inconnu, ait une probabilité donnée d'être inférieur à une valeur fixée à l'avance.

La solution théorique de ces divers problèmes se trouve généralement indiquée dans de nombreux ouvrages de statistique théorique, mais la solution effective dans un cas particulier est le plus souvent laissée aux soins du lecteur, les graphiques ou tables nécessaires à cette solution n'étant pas donnés.

De plus si, pour les problèmes relatifs à l'estimation ou à la comparaison de variances, les calculs nécessaires peuvent être faits - ils ne demandent qu'un petit effort de calcul numérique, à partir des tables classiques de χ^2 et de F - il n'en est pas de même pour les calculs relatifs à l'estimation ou à la comparaison de moyennes, dans le cas de populations normales à variance inconnue, impliquant précisément une estimation de cette variance.

Etant donnée l'importance pratique de ces divers problèmes, nous avons jugé utile d'en présenter une revue d'ensemble et de mettre à la disposition des techniciens quelques graphiques fournissant aisément la solution de ces problèmes pour quelques valeurs fréquemment utilisées des risques α et β .

Evidemment ces graphiques n'ont pas la prétention de donner des résultats aussi précis que des tables numériques, mais compte tenu des échelles adoptées, ils paraissent répondre aux exigences des praticiens.

A - TEST D'UNE MOYENNE

A. 1 - Test unilatéral au risque α de rejeter une hypothèse vraie $H_0(m = m_0)$ contre l'hypothèse H_1 (par exemple $m > m_0$) (Population normale de variance inconnue).

1/ Intervalle d'acceptation de l'hypothèse $H_0(m = m_0)$

La méthode classique du test conduit à l'acceptation si :

$$\frac{\bar{x} - m_0}{s} \sqrt{n} < t_{1-\alpha}^{(n-1)} \quad (1)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

étant la variance estimée sur un échantillon de n observations provenant d'une population normale de variance inconnue σ^2 et $t^{(n-1)}$ la variable de Student pour $\nu = n - 1$ degrés de liberté (figure 1).

2/ Puissance du test

La puissance du test ou probabilité de rejeter l'hypothèse $m = m_0$, si en réalité la moyenne de la population est une valeur particulière m est :

$$\begin{aligned} \Pi(m) &= 1 - \beta = \Pr \left[\frac{\bar{x} - m_0}{s} \sqrt{n} > t_{1-\alpha}^{(n-1)} \mid m, \sigma^2 \right] \\ &= \Pr \left[\frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n} + \frac{m - m_0}{s} \sqrt{n} > t_{1-\alpha}^{(n-1)} \mid m, \sigma^2 \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Elle dépend de m et de σ : pour m et m_0 fixés son calcul implique une hypothèse préalable sur σ .

Si l'on pose

$$\delta = \frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

la distribution de la variable

$$t(\delta, \nu) = \frac{1}{s} [\sqrt{n} (\bar{x} - m) + \delta \sigma]$$

est celle d'une variable t non centrée, de paramètre δ , que l'on peut écrire sous la forme classique

$$t(\delta, \nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\chi^2(\nu)}} (u + \delta),$$

compte tenu de la relation $\frac{\nu s^2}{\sigma^2} = \chi^2(\nu)$, u étant la variable normale réduite.

(1) Dans tout ce qui suit on désigne, pour toute variable aléatoire Y , par y_θ , la valeur telle que $\theta = \Pr[Y < y_\theta]$.

La distribution de t non centré ayant été tabulée [6], on peut donc construire, pour α fixé, les courbes qui donnent :

- soit β (ou $1 - \beta$), en fonction de $\frac{m - m_0}{\sigma}$ et de n [3]

- soit β (ou $1 - \beta$) en fonction de $\frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$ et de v .

Ces dernières - qui ont un caractère plus général en liaison avec la distribution de $t(\delta, v)$ - sont données dans les abaques n° 1, 2, 3, 4 pour les valeurs particulières $\alpha = 0,005 - 0,01 - 0,025 - 0,05$. (Elles ont été tracées à partir des tables données par Dixon and Massey [12]).

Diverses approximations de $\Pi(m)$, peuvent dans certains cas être envisagées, pour des valeurs de n et de $\frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$ satisfaisant à certaines conditions.

a) Première approximation (Indjoudjian [13])

On a

$$\Pi(m) = 1 - \beta = \Pr \left[\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}^{(n-1)} > m_0 \mid m, \sigma^2 \right] \quad (3)$$

Pour n non petit et pratiquement pour $n > 10$, on peut, pour les valeurs usuelles de α , considérer la variable $Z = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}^{(n-1)}$ comme une variable normale telle que

$$E(Z) \sim m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}^{(n-1)} \quad , \quad V(Z) \sim \frac{\sigma^2}{n} \left[1 + \frac{t_{1-\alpha}^2}{2(n-1)} \right]$$

La condition

$$1 - \beta = \Pr [Z > m_0] = \Pr \left[\frac{Z - E(Z)}{\sigma(Z)} > \frac{m_0 - E(Z)}{\sigma(Z)} \right]$$

s'écrit alors

$$1 - \beta = \Pr \left[u > \frac{\frac{m_0 - m}{\sigma} \sqrt{n} + t_{1-\alpha}^{(n-1)}}{\sqrt{1 + \frac{t_{1-\alpha}^2}{2(n-1)}}} \right]$$

soit

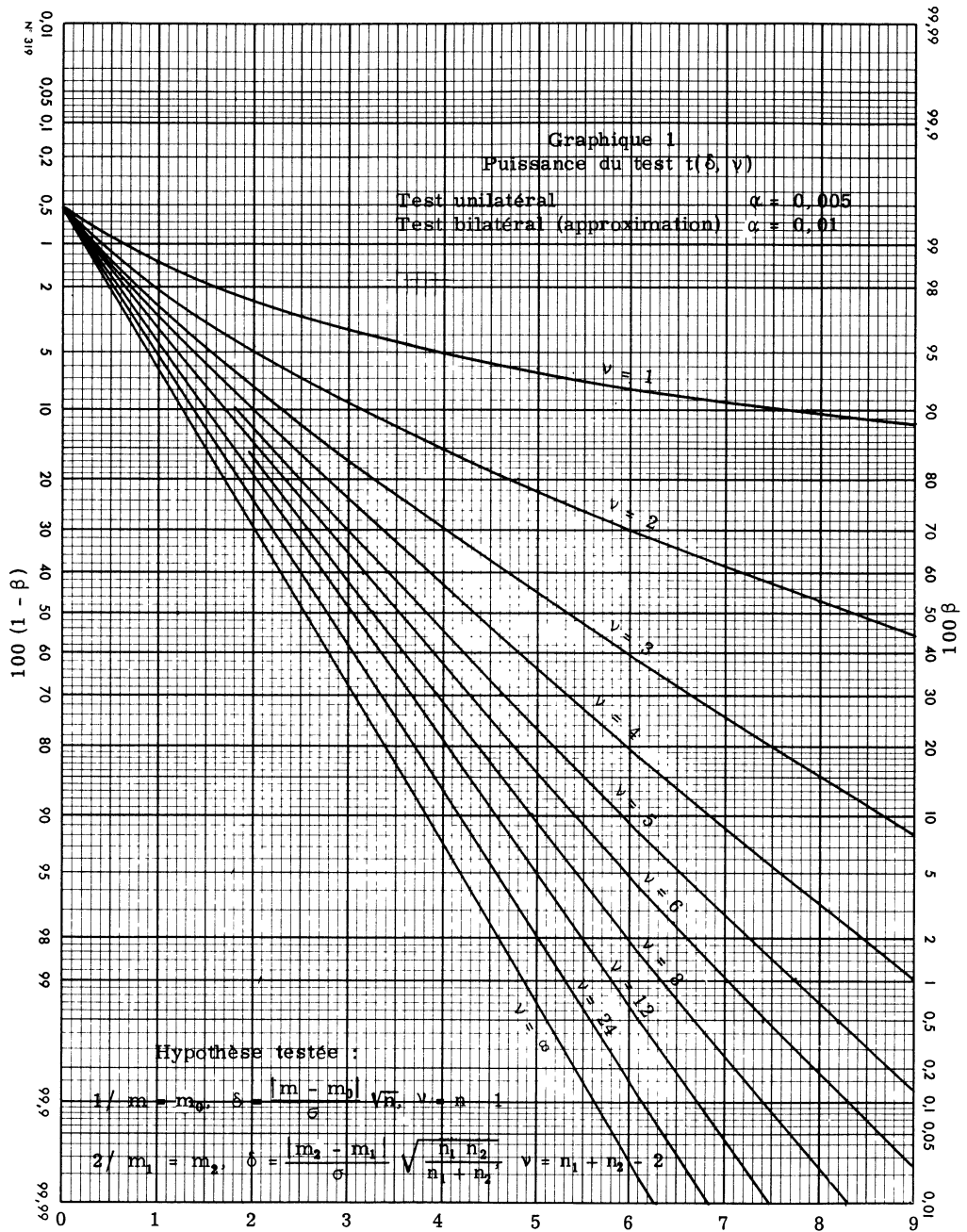
$$1 - \beta = F \left[\frac{\frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n} + t_{\alpha}^{(n-1)}}{\sqrt{1 + \frac{t_{\alpha}^2}{2(n-1)}}} \right] \quad (4)$$

$F(u)$ étant la fonction cumulative de la distribution de la variable normale centrée réduite u .

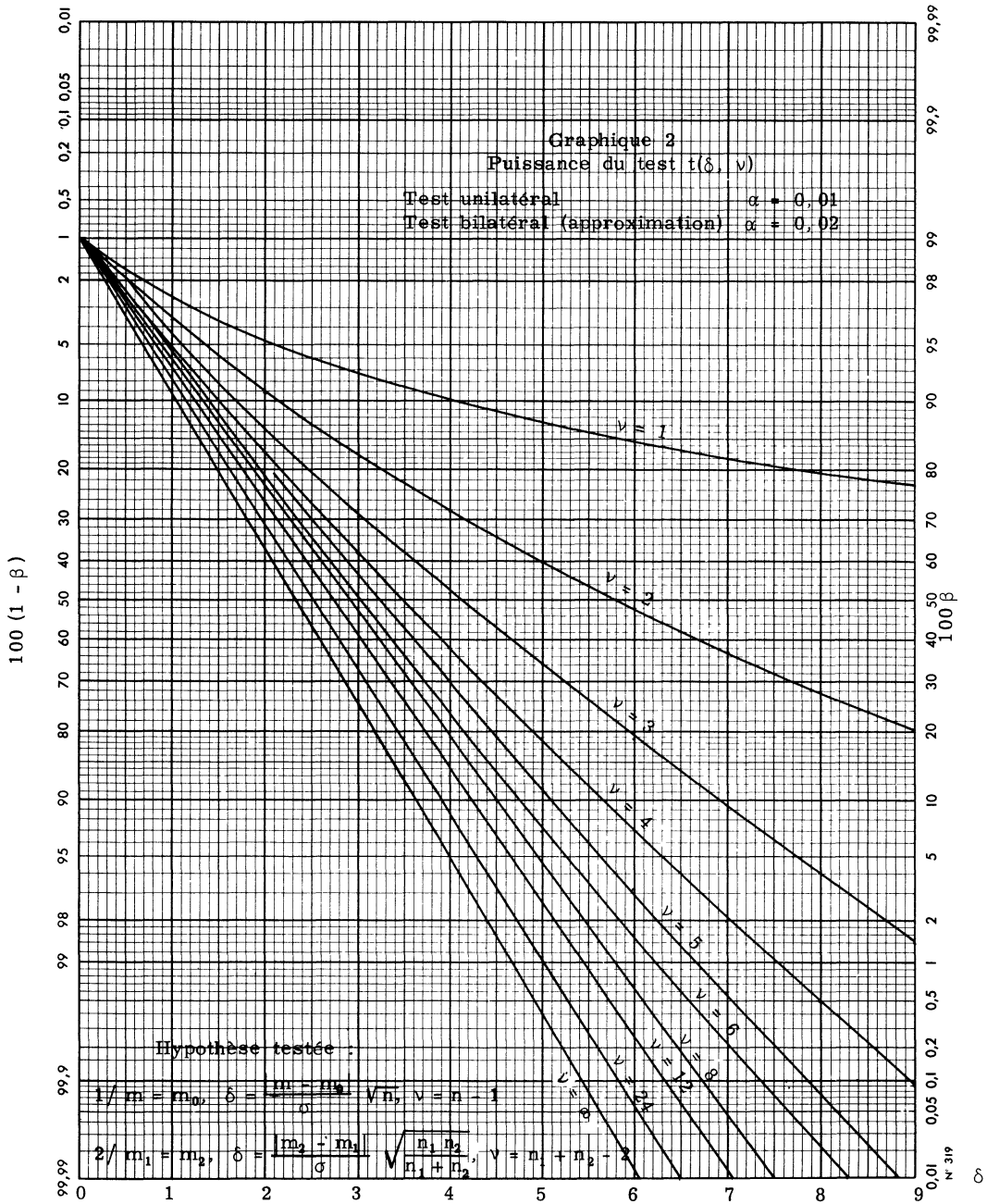
Pour n grand (par exemple $n > 30$), on pourra se contenter de l'approximation normale définie par :

$$\Pi(m) = 1 - \beta \sim F(t_{\alpha}^{(n-1)} + \delta) \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n} \quad (5)$$

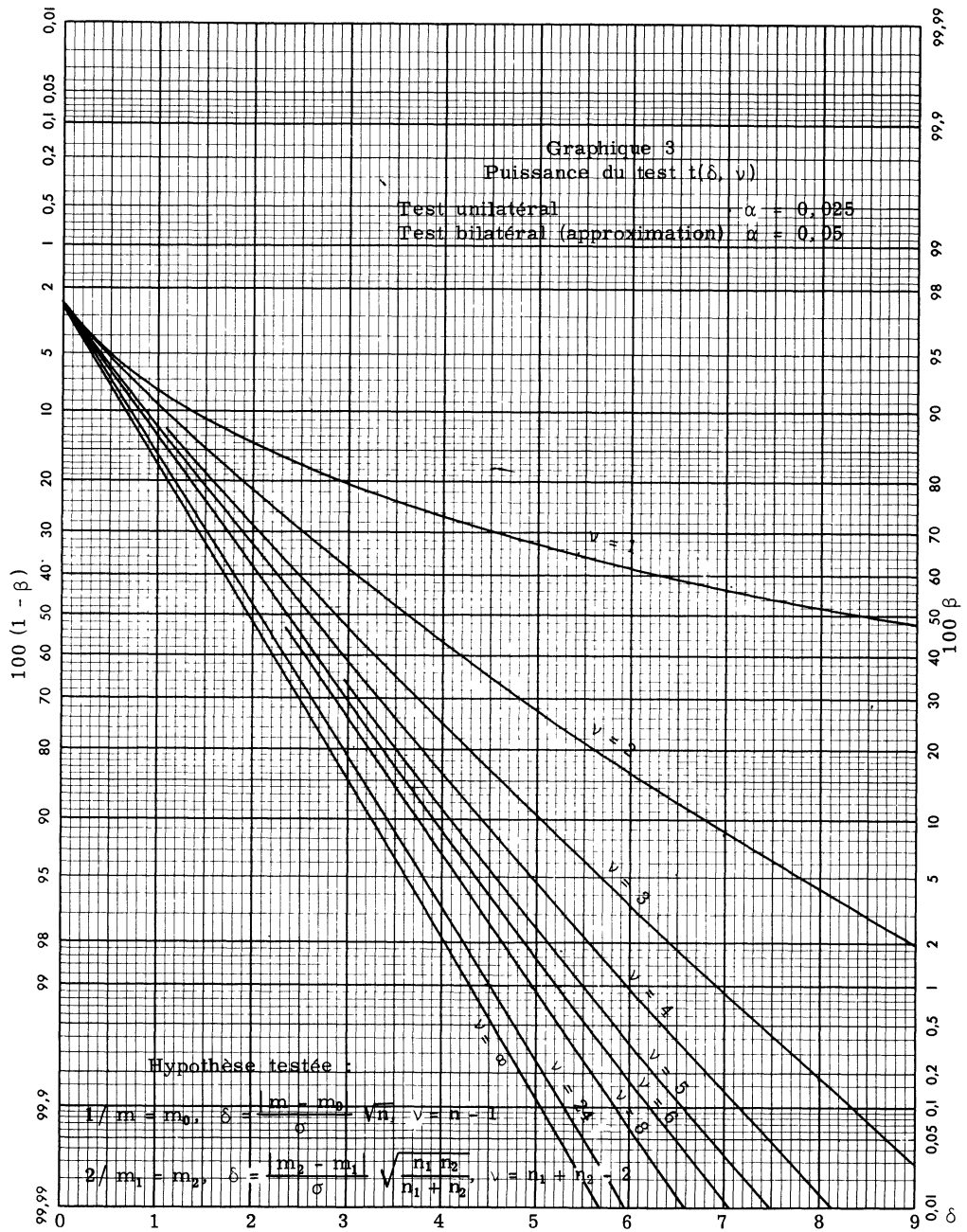
Graphique 1



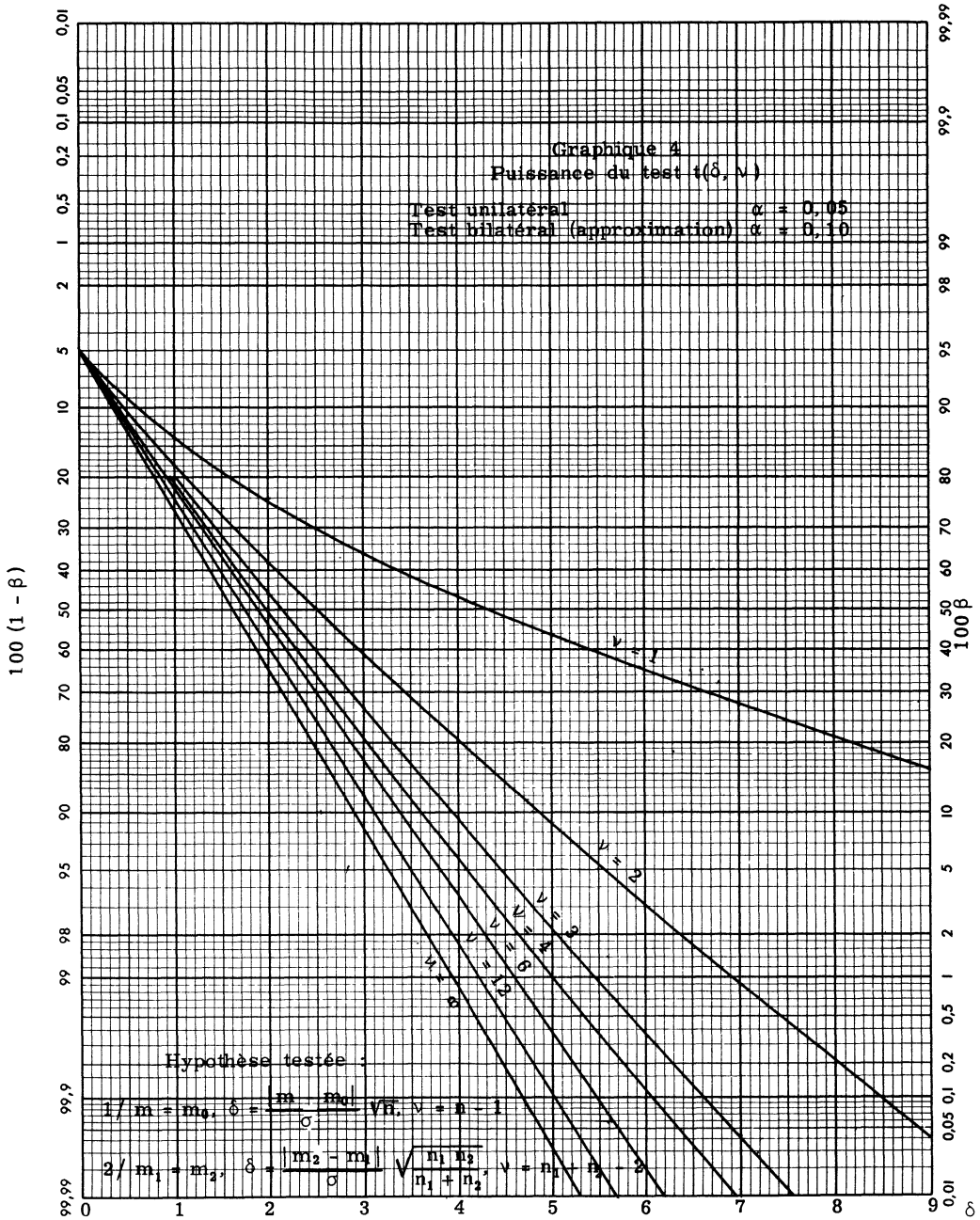
Graphique 2



Graphique 3



Graphique 4



b) Seconde approximation

Pour les valeurs usuelles de α , pour n non trop petit ($n > 10$) et pour $\frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n} > 3$, on peut, avec une approximation suffisante, estimer la puissance du test à partir de

$$t_{1-\beta}^{(n-1)} \sim \frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n} - t_{1-\alpha}^{(n-1)} \quad (6)$$

d'où $\Pi(m) = 1 - \beta$ par interpolation dans la table de la fonction de répartition de la variable t .

Remarque - La relation approximative (6) n'est autre que la traduction algébrique approchée de ce que montre la figure (1) pour $m > m_0$.

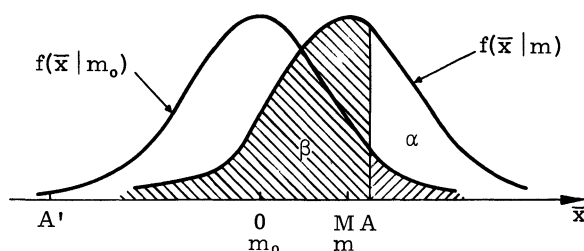


Fig. 1 - Test unilatéral

Si le test unilatéral de l'hypothèse $m = m_0$ au niveau de confiance $1 - \alpha$ a conduit à déterminer un intervalle d'acceptation $A'A$ (non borné à gauche), tel que $OA = \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}^{(n-1)}$, à partir de la variance estimée s^2 , on peut écrire :

$$OM = OA + AM$$

soit

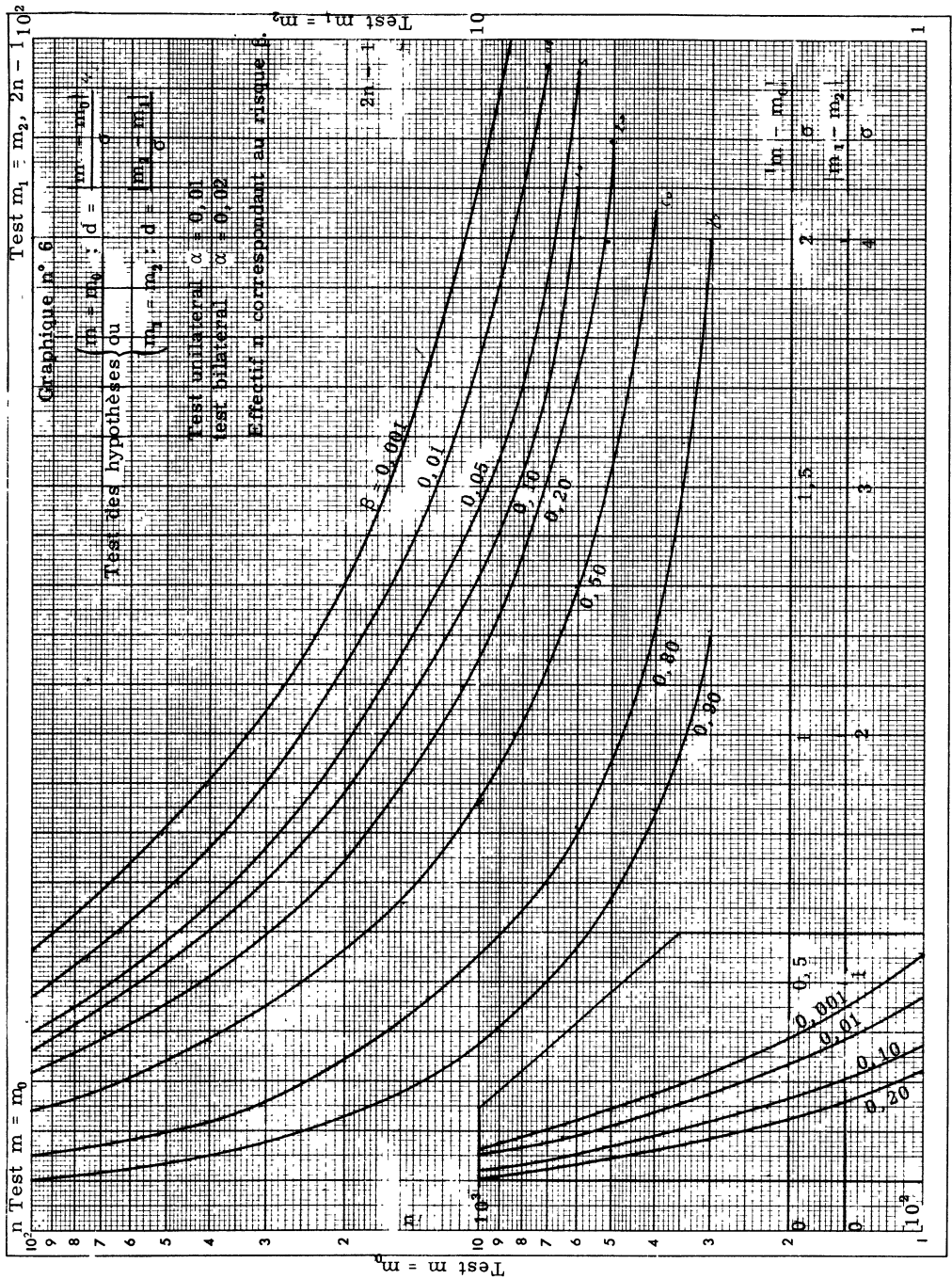
$$m - m_0 = \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}^{(n-1)} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\beta} \sim \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (t_{1-\alpha}^{(n-1)} + t_{1-\beta}^{(n-1)}) \quad (7)$$

Exemples - Pour $\alpha = 0,025$ $n = 25$ $v = 24$, le graphique n° 3 relatif à $\alpha = 0,025$ donne $1 - \beta = 0,82$ pour $\frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n} = 3$, la relation (5) donne $1 - \beta = 0,81$ et la relation (6) donne $1 - \beta \sim 0,82$ par interpolation linéaire entre 0,80 et 0,90 dans la table de la variable t .

3/ Effectif n de l'échantillon pour que le risque de seconde espèce soit égal à une valeur donnée β : probabilité d'accepter l'hypothèse $m = m_0$ alors que $m > m_0$.

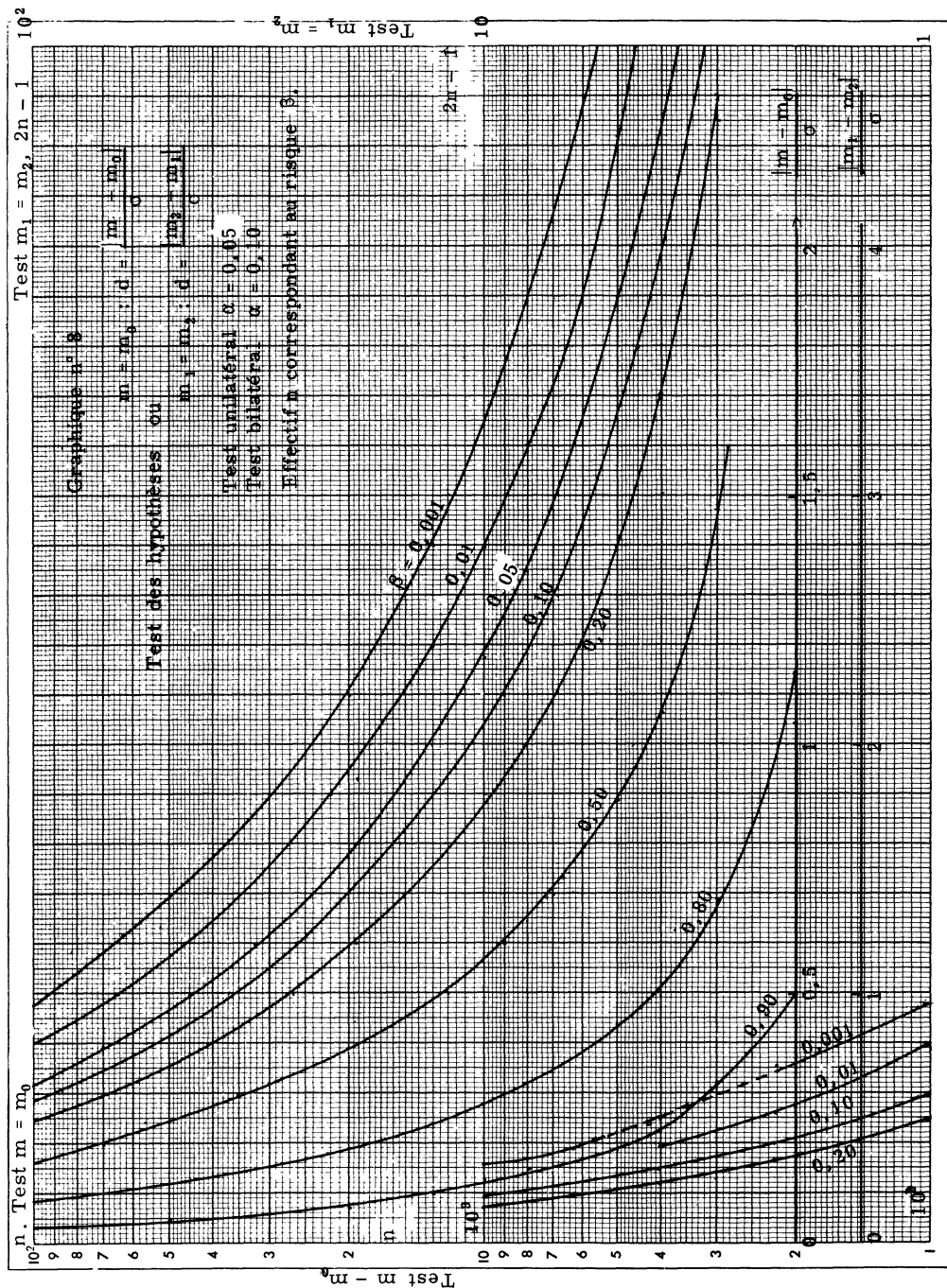
Il s'agit de résoudre par rapport à n l'équation $\Pi(m) = 1 - \beta$: pour α , β et $v = n - 1$ fixés les tables de t non centré permettent de déterminer le paramètre $\delta = \frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$ d'où la valeur de $\frac{m - m_0}{\sigma}$ correspondant à n et permettant de construire les courbes donnant n en fonction de $\frac{m - m_0}{\sigma}$ (graphiques n° 5, 6, 7, 8).

Graphique 6





Graphique 8



En fait, pour les valeurs usuelles de α et β , la relation approchée :

$$\frac{m - m_0}{\sigma} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} (t_{1-\alpha}^{(n-1)} + t_{1-\beta}^{(n-1)}) \quad (8)$$

permet, pour α et β fixés, de calculer $\frac{m - m_0}{\sigma}$ en fonction de n avec une très bonne approximation.

Exemple - Pour $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,10$, la table de t non centré donne $\frac{m - m_0}{\sigma} = 1,61$ pour $n = 5$.

Pour ces valeurs de α , β et n la relation (8) donne

$$\frac{m - m_0}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{5}} (2,132 + 1,533) = 1,64$$

Remarques

1/ Le test unilatéral à $1 - \alpha$ de l'hypothèse $m = m_0$ contre l'hypothèse $m < m_0$, conduisant à la condition d'acceptation :

$$\frac{\bar{x} - m_0}{s} \sqrt{n} > t_{\alpha}^{(n-1)},$$

donne lieu, en ce qui concerne la puissance du test et la détermination de l'effectif n de l'échantillon, à l'emploi des mêmes abaques en remplaçant $m - m_0$ par $m_0 - m$.

2/ Les calculs ci-dessus et les abaques qui en résultent impliquent une hypothèse préalable concernant la vraie valeur de σ dans la population échantillonnée.

En pratique, il se peut que l'on dispose d'une bonne estimation préalable de σ (par exemple, provenant d'une série d'échantillonnages antérieurs dans des populations analogues dont on admet a priori que la variance reste pratiquement constante, les moyennes seules pouvant être différentes) : ce problème pourra se présenter dans la comparaison de moyennes de sous-populations provenant d'une population de variance connue ou dans des problèmes d'étalonnage : comparaison d'instruments de mesure ou de procédés d'échantillonnage à un instrument ou à un procédé n'ayant pas d'erreur systématique).

On pourra alors utiliser cette estimation comme valeur de σ dans l'emploi des graphiques n° 5 à 8.

D'une manière plus précise

- si un échantillon préliminaire d'effectif arbitraire n_0 a donné une estimation s_0^2 de la variance, avec $\nu_0 = n_0 - 1$ degrés de liberté,

- si n est l'effectif correspondant à la condition $\Pi(m) = 1 - \beta$ et pour lequel on obtient alors une estimation s de la variance, servant à définir la condition d'acceptation

$$\frac{\bar{x} - m_0}{s} \sqrt{n} < t_{1-\alpha}^{(n-1)},$$

la puissance du test :

$$\Pi(m) = \Pr \left[\frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n} + \frac{m - m_0}{s} \sqrt{n} > t_{1-\alpha}^{(n-1)} \mid m, \sigma^2 \right] \quad (2)$$

peut s'écrire :

$$1 - \beta = \Pr \left[t > t_{1-\alpha}^{(n-1)} - \frac{m - m_0}{s_0} \sqrt{n} \sqrt{F} \right], \quad (2 \text{ bis})$$

$F = \frac{s_0^2}{s^2}$ étant la variable de Fisher-Snedecor avec $v_1 = n_0 - 1$ et $v_2 = n - 1$ degrés de liberté.

La loi de probabilité à deux variables t et F intervenant dans l'équation ci-dessus a été étudiée par Harris, Horvitz et Mood [7], qui, pour $\alpha = 0,05$ (test unilatéral) ou $\alpha = 0,10$ (test bilatéral), et $\beta = 0,05$ et $0,20$, ont calculé les valeurs de $\frac{m - m_0}{s_0}$, correspondant à des valeurs données de $v_1 = v_0 = n_0 - 1$ (1 ... 6, 8, 12, 14, 16, 24, 32, ∞) et de $v_2 = n - 1$ (1 ... 10, 12 ... 20, 25, 30, 40, 50, 60, 80, 100)⁽¹⁾.

A partir de ces valeurs, on peut construire les courbes donnant n en fonction de $\frac{m - m_0}{s_0}$ pour les valeurs envisagées ci-dessus de α , β et v_1 (graphiques n° 8a pour $\beta = 0,05$ et 8b pour $\beta = 0,20$).

La comparaison des graphiques 8a 8b au graphique 8 qui correspondent tous à $\alpha = 0,05$ (test unilatéral montre que si n_0 est petit, l'information relative à s étant médiocre, il en résulte une majoration sensible de n par rapport à la valeur donnée par le graphique n° 8.

Ainsi pour $n_0 = 7$, ($v_0 = 6$), $\beta = 0,05$

pour $\frac{m - m_0}{\sigma} = 0,5$ le graphique n° 8 donne $n = 45$

pour $\frac{m - m_0}{s_0} = 0,5$ le graphique n° 8a donne $n - 1 = 78$, $n = 79$.

Par contre pour $n_1 = 33$ ($v_1 = 32$), on trouve respectivement $n = 45$ et $n = 49$.

Les calculs correspondant à la méthode de Harris, Horvitz et Mood n'ayant pas été faits pour d'autres valeurs que $\alpha = 0,05$ et $\beta = 0,05$ ou $0,20$, on sera amené - si l'on ne connaît rien à priori sur la valeur de σ^2 - à utiliser les graphiques 5, 6, 7, 8, en remplaçant σ par une valeur estimée.

(1) Si $\frac{m - m_0}{s_0}$ est trop petit pour l'étendue des graphiques ($n > 100$), on pourra déterminer n par la relation approchée

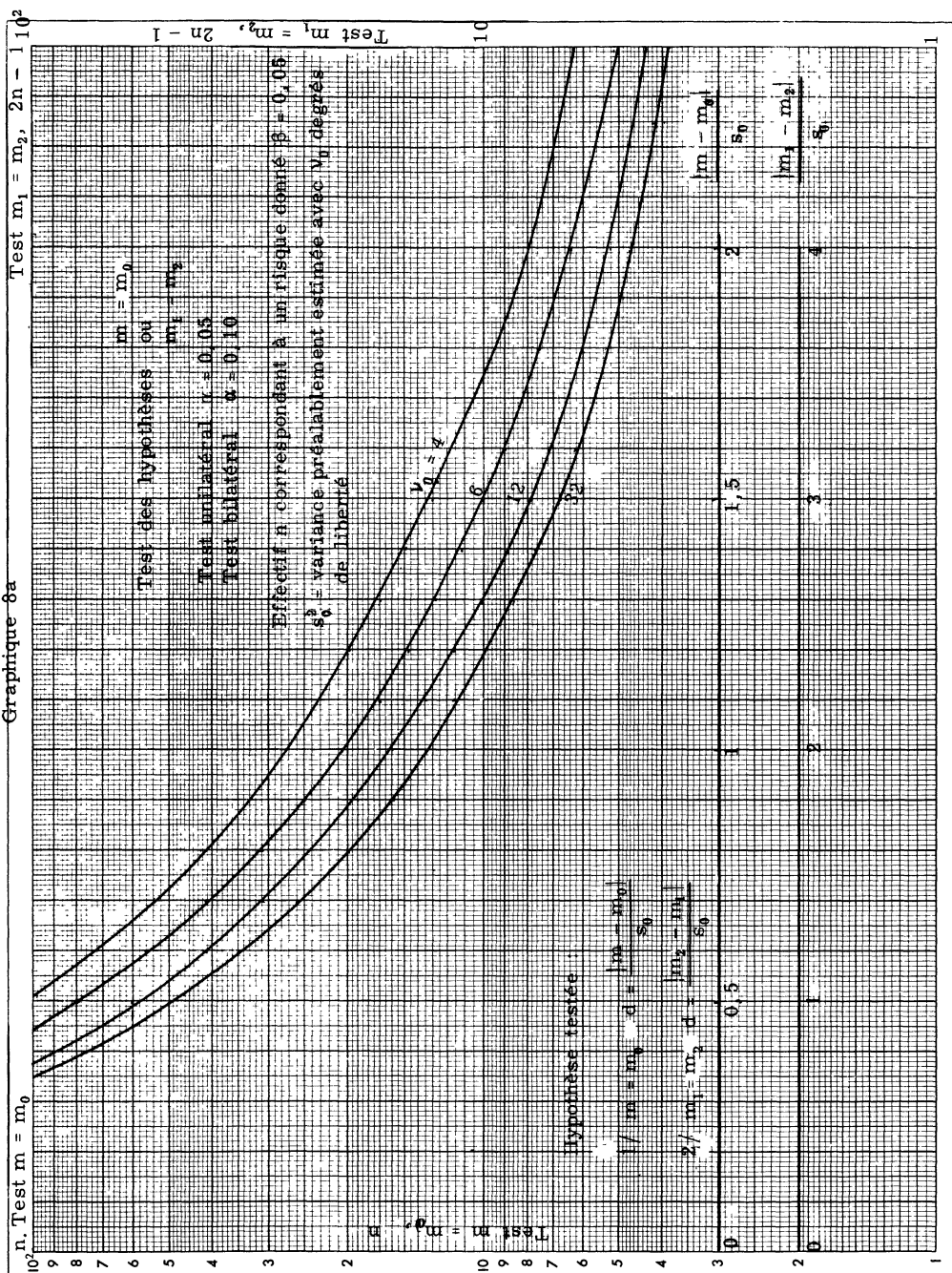
$$n \sim 100 \left(\frac{s_0}{m - m_0} K \right)^2$$

K étant la valeur qui, pour les valeurs fixées de α , β et $\frac{m - m_0}{s_0}$, est donnée par le graphique pour la valeur considérée de v_0 .

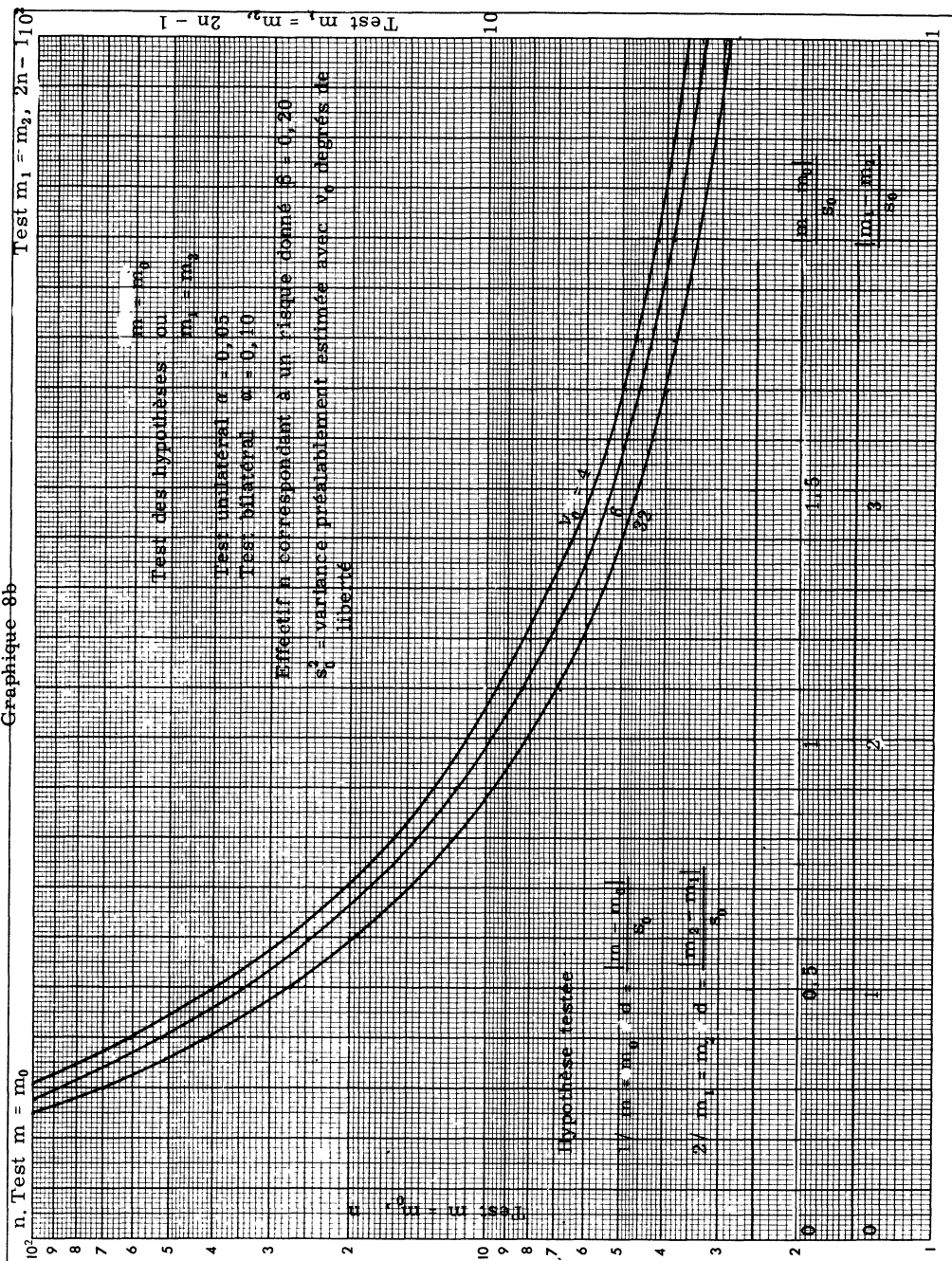
Exemple - $m - m_0 = 0,6$, $s_0 = 3$, $v_0 = 12$, $\alpha = 0,05$ (test unilatéral) et $\beta = 0,05$. Pour $n = 100$, le graphique 8 donne $K = 0,28$ d'où

$$n \sim 100 \left(\frac{0,28}{0,2} \right)^2 \sim 196$$

Graphique 8a



Graphique 8b



Mais il convient de remarquer que si cette estimation est par défaut, les graphiques donneront une valeur de n pour laquelle le risque réel β' sera supérieur à celui qui a été utilisé dans l'emploi du graphique.

L'estimation s^2 de σ^2 fournie par cet échantillon de n permettra de déterminer pour σ^2 un intervalle de confiance à un niveau de confiance préalablement choisi et de voir dans quelle mesure il convient s'il y a lieu d'augmenter l'effectif de l'échantillon pour que le risque de 2ème espèce ait une forte probabilité de ne pas excéder la valeur β qu'on s'était fixée.

Cas particulier - Si la variance est connue à priori, l'intervalle d'acceptation étant défini par

$$\bar{x} < m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} \quad (\text{test de } m = m_0 \text{ contre } m > m_0)$$

ou

$$\bar{x} > m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha} \quad (\text{test de } m = m_0 \text{ contre } m < m_0)$$

on aura alors (graphique 4a)

$$\Pi(m) = 1 - \beta = F(u_{\alpha} + |\delta|) \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

et

$$n = \frac{1}{d^2} (u_{1-\alpha} + u_{1-\beta})^2 \quad \text{avec} \quad d = \frac{m - m_0}{\sigma}$$

Les courbes donnant n , pour α et β donnés, en fonction de $\frac{|m - m_0|}{\sigma}$ sont alors des droites, en coordonnées logarithmiques (graphiques n° 9, 10, 11, 12).

La droite $n(d, \alpha, \beta)$ pourra être définie par les deux points

$$n = 100 \quad \frac{m - m_0}{\sigma} = \frac{1}{10} (u_{1-\alpha} + u_{1-\beta})$$

$$n = 1 \quad \frac{m - m_0}{\sigma} = u_{1-\alpha} + u_{1-\beta}$$

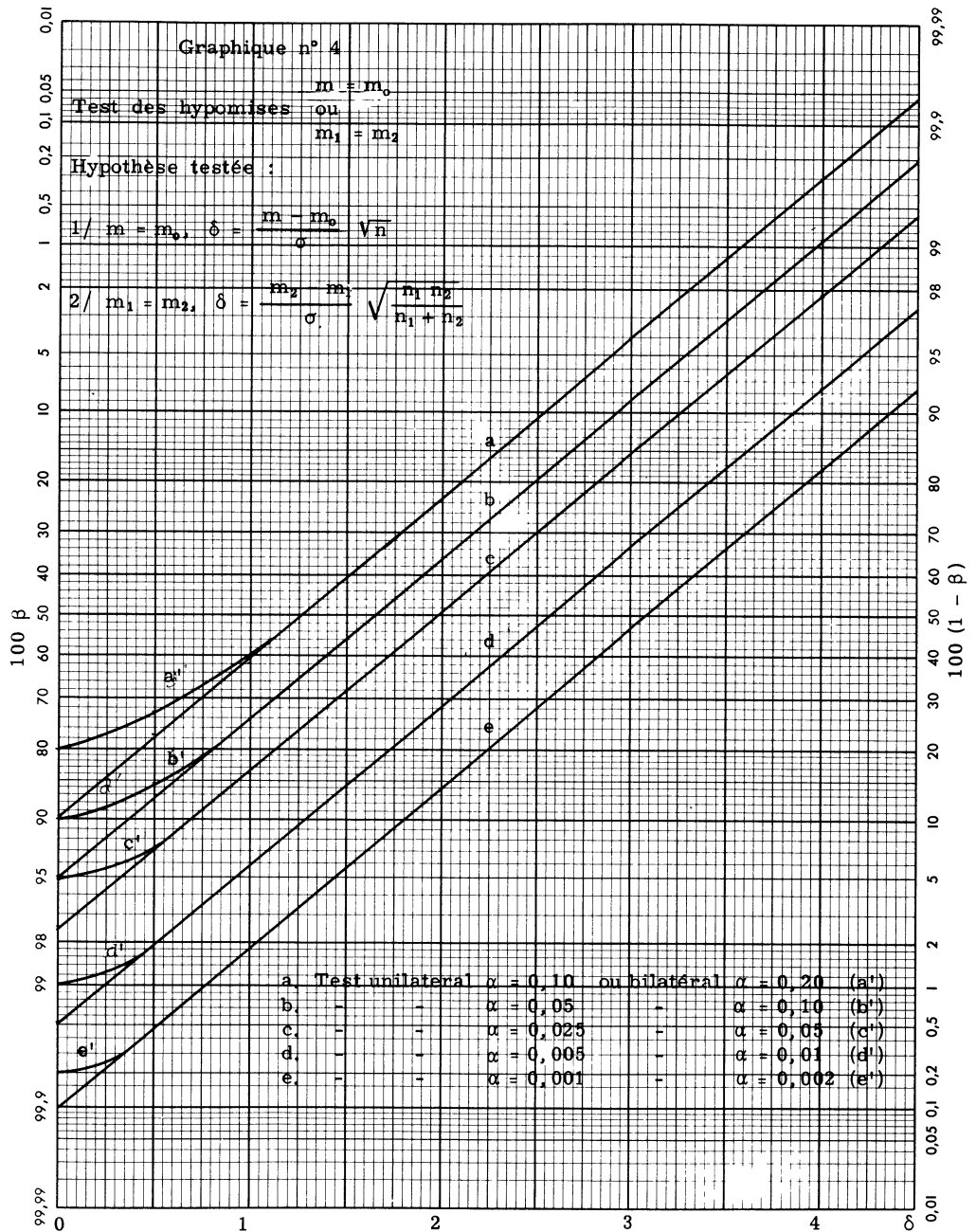
A.2 - Test bilatéral symétrique au risque $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$ de rejeter l'hypothèse $H_0(m = m_0)$ contre l'hypothèse $m \neq m_0$ (Population normale de variance inconnue)

1/ Intervalle d'acceptation de l'hypothèse

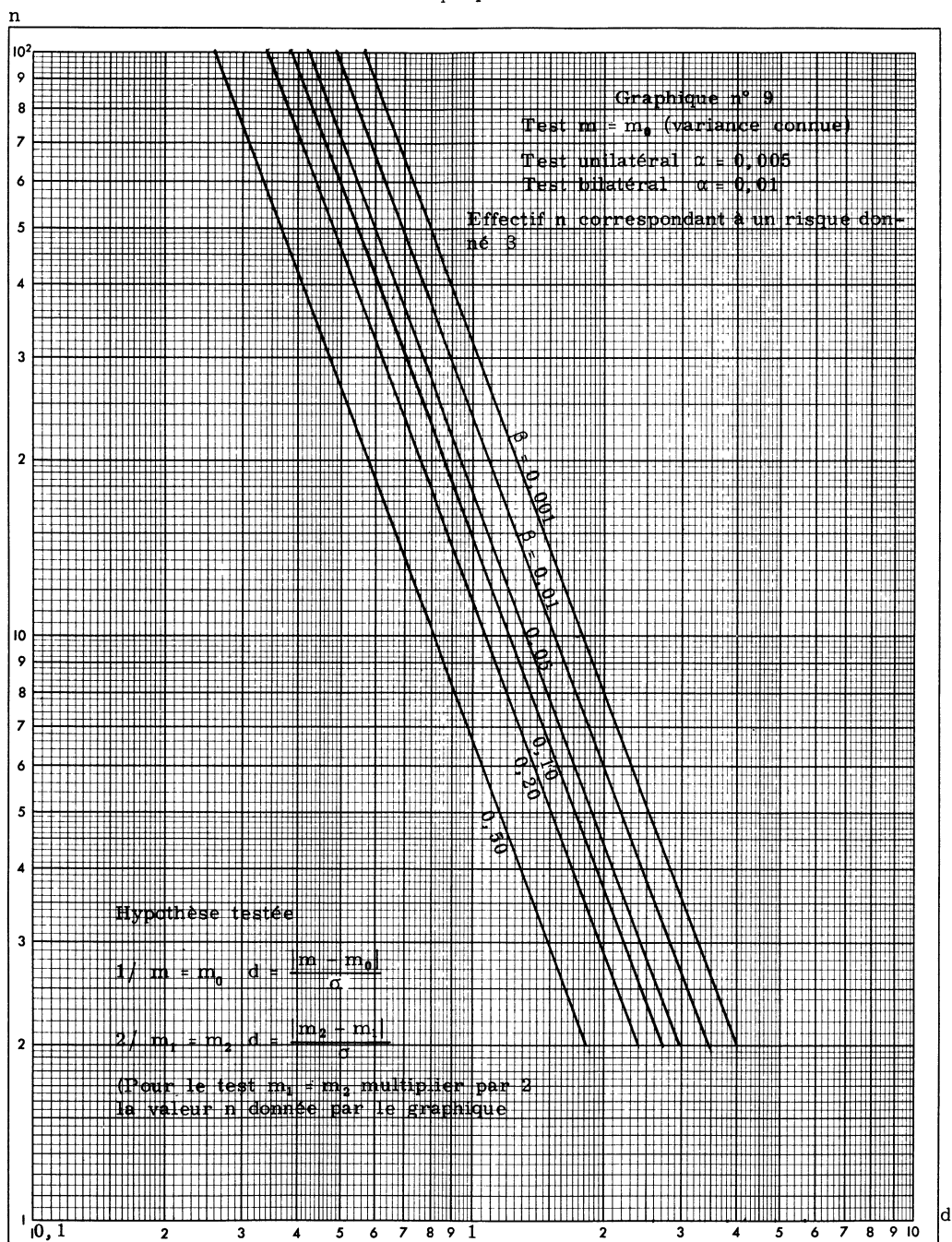
Il est défini par la condition

$$\left| \frac{\bar{x} - m_0}{s} \sqrt{n} \right| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \quad (9)$$

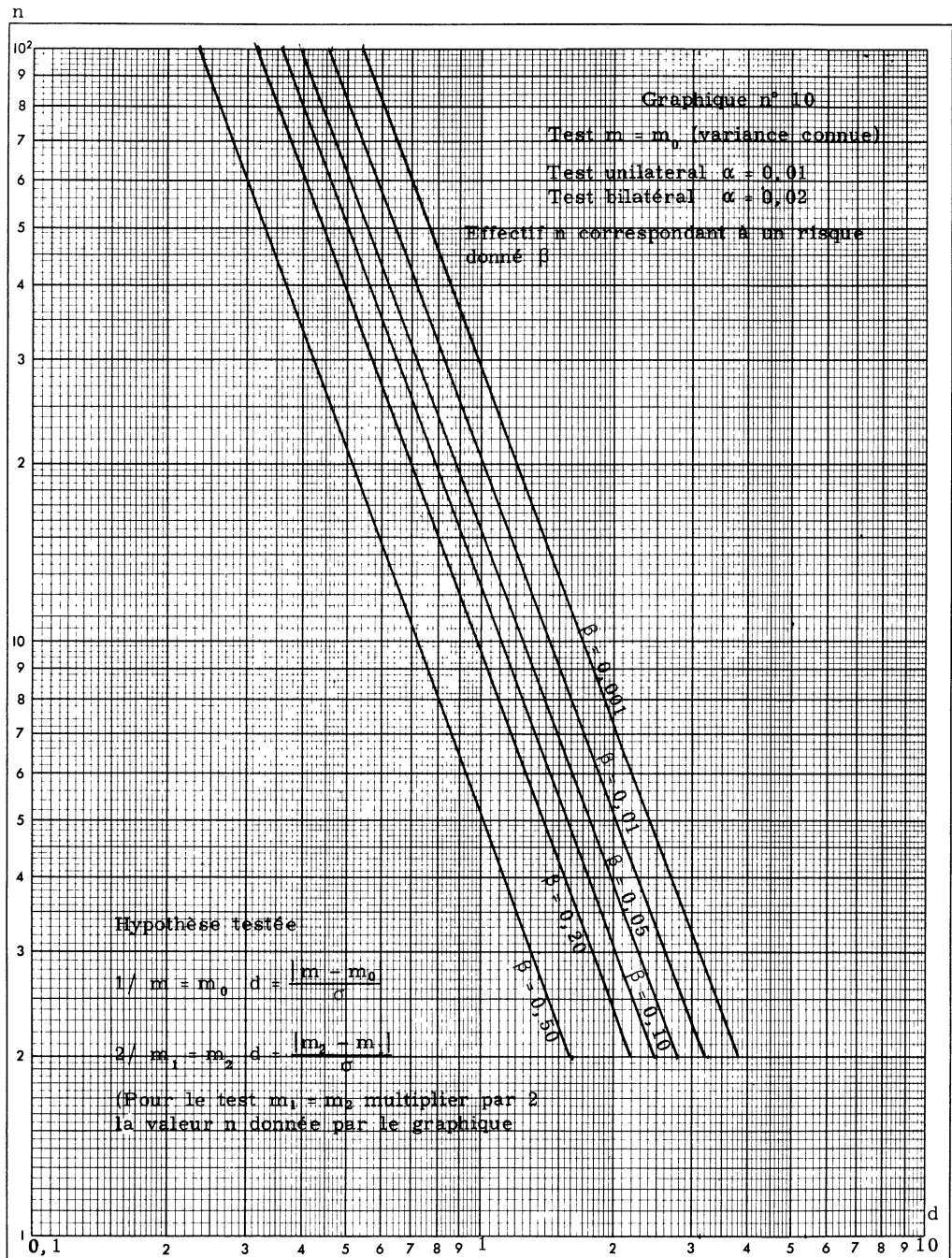
Graphique 4a



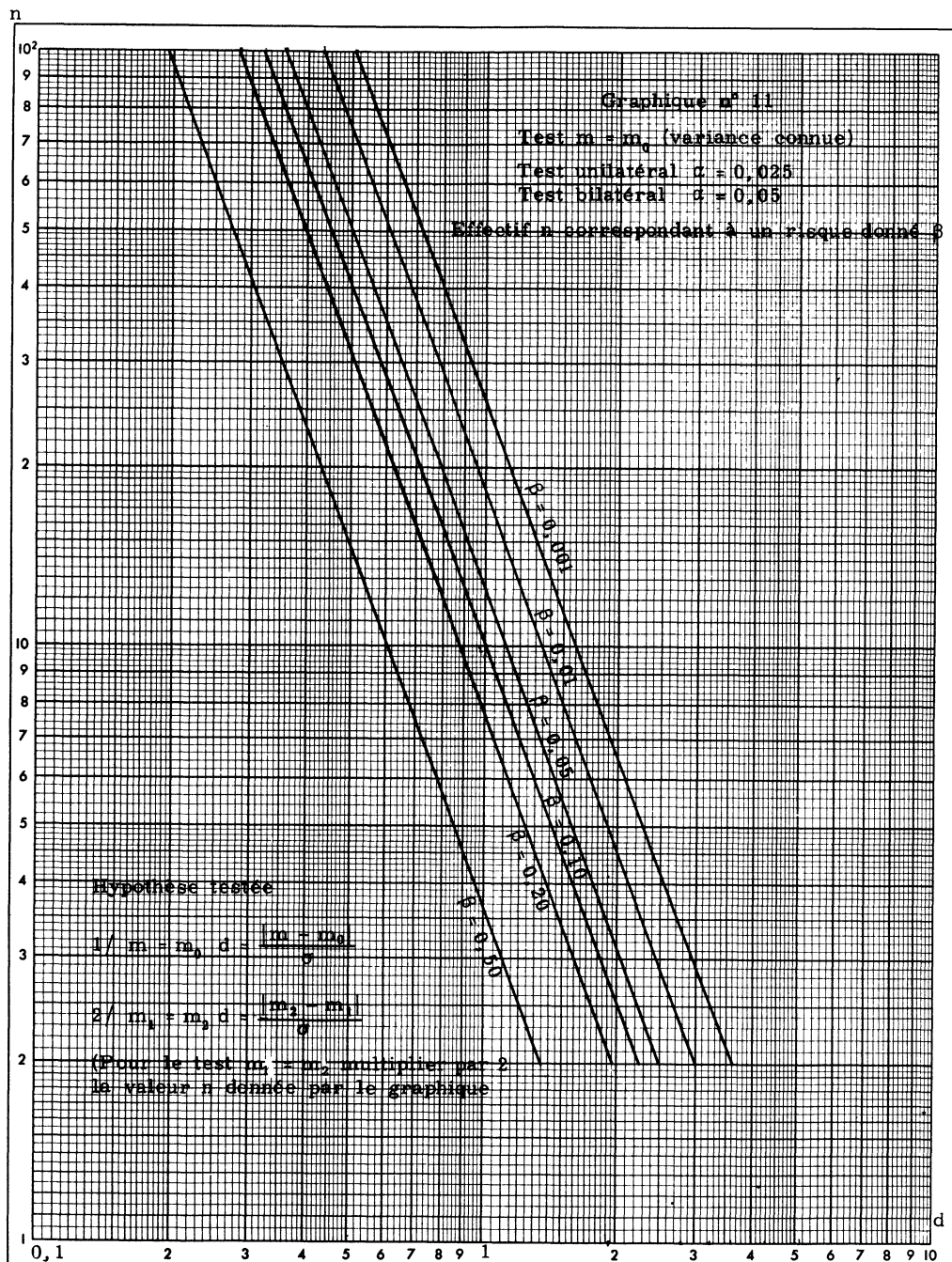
Graphique 9



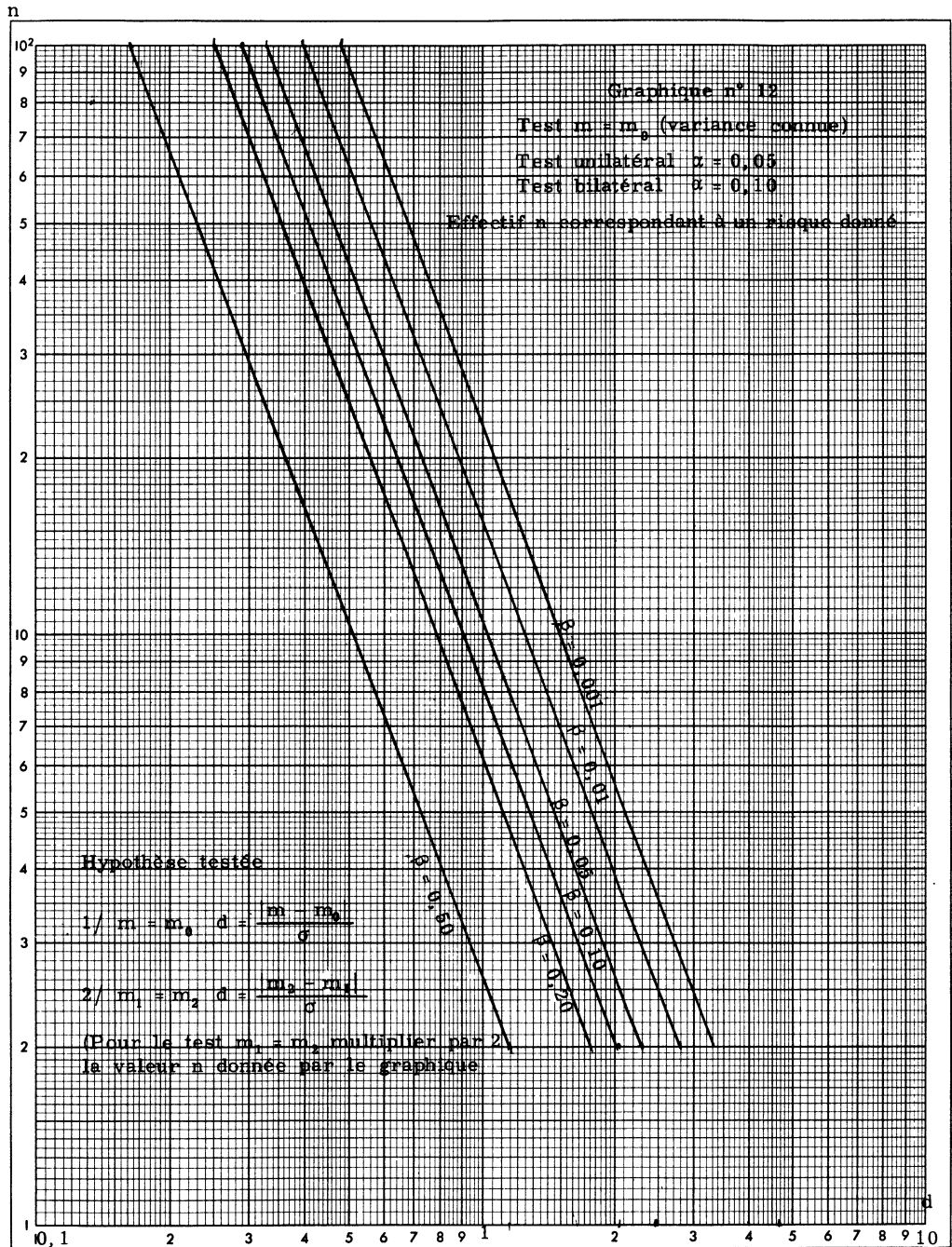
Graphique 10



Graphique 11



Graphique 12



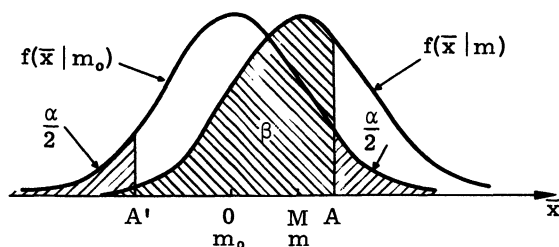


Fig. 2 - Test bilatéral

2/ Puissance du test

La puissance du test, probabilité de rejeter l'hypothèse $m = m_0$ si, en réalité, la moyenne a une valeur m est :

$$\begin{aligned} \Pi(m) &= 1 - \beta = \Pr \left[\left| \frac{\bar{x} - m_0}{s} \sqrt{n} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \mid m, \sigma^2 \right] \\ &= \Pr \left[\frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n} + \frac{m - m_0}{s} \sqrt{n} < t_{\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} + \right. \\ &\quad \left. + \Pr \left[\frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n} + \frac{m - m_0}{s} \sqrt{n} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \right] \right] \end{aligned} \quad (10)$$

La variable $t(\delta, \nu) = \frac{1}{s} [\sqrt{n}(\bar{x} - m) + \delta\sigma]$ avec $\delta = \frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$ est la variable t non centrée envisagée ci-dessus.

On peut donc construire comme précédemment les courbes donnant $\Pi(m)$ en fonction de $\frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$.

On remarquera que l'un des deux termes du second membre de l'expression de $\Pi(m)$ est nécessairement inférieur à $\frac{\alpha}{2}$ si $m \neq m_0$. Pour les valeurs usuelles de α , (si $|\delta|$ n'est pas très petit, par exemple $|\delta| > 1$), on peut le négliger et considérer que pratiquement la puissance est définie par exemple, pour $m > m_0$, par :

$$1 - \beta \sim \Pr \left[\frac{\bar{x} - m}{s} \sqrt{n} + \frac{m - m_0}{s} \sqrt{n} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \right]$$

Dans ces conditions, la courbe donnant $\Pi(m)$ en fonction de $\left| \frac{m - m_0}{\sigma} \right| \sqrt{n}$ pour un risque α dans un test unilatéral est pratiquement la même que celle qui correspond à un risque 2α dans un test bilatéral.

Les approximations envisagées précédemment restent valables dans les mêmes conditions, sous réserve d'y remplacer α par $\frac{\alpha}{2}$, soit,

a) pour $n > 10$

$$1 - \beta \sim F(u_1) + F(u_2)$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} u_1 &= \frac{\frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n} + t_{\alpha/2}}{\sqrt{1 + \frac{t_{1-\alpha/2}^2}{2(n-1)}}} \\ u_2 &= \frac{-\frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n} + t_{\alpha/2}}{\sqrt{1 + \frac{t_{1-\alpha/2}^2}{2(n-1)}}} \end{aligned} \right.$$

l'un des deux termes devenant rapidement négligeable si $\left| \frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n} \right|$ n'est pas très petit.

b) pour $\left| \frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| > 3$ et $n > 10$

$$t_{1-\beta}^{(n-1)} \sim \left| \frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| - t_{1-\alpha}^{(n-1)} \quad (9)$$

3/ Effectif n de l'échantillon pour que le risque de seconde espèce soit égal à une valeur donnée β .

Les courbes donnant, pour α et β fixés, les valeurs de n en fonction de $\left| \frac{m - m_0}{\sigma} \right|$ peuvent être déterminées à partir des tables de t non centré. On constate encore qu'elles sont, pour les valeurs usuelles de α et β , pratiquement définies par

$$\left| \frac{m - m_0}{\sigma} \right| \sim \frac{1}{\sqrt{n}} [t_{1-\alpha}^{(n-1)} + t_{1-\beta}^{(n-1)}] \quad (10)$$

c'est-à-dire que la courbe relative à un test unilatéral au risque α est valable pour un test bilatéral au risque 2α .

Remarque - Si l'on possède une estimation préalable s_0^2 de la variance basée sur ν_0 degrés de liberté, on pourra, pour $\alpha = 0,10$, utiliser les graphiques 8a et 8b respectivement à $\beta = 0,05$ et $\beta = 0,20$.

Cas particulier - Si la variance est connue à priori, l'intervalle d'acceptation étant défini par

$$\left| \frac{\bar{x} - m_0}{\sigma} \sqrt{n} \right| < u_{1-\alpha/2},$$

la puissance du test est, pour une moyenne vraie m, (graphique 4a)

$$\Pi(m) = F(u_{\alpha/2} - \delta) + F(u_{\alpha/2} + \delta)$$

avec

$$\delta = \frac{m - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$$

Pour les valeurs usuelles de α , dès que $|\delta| > 0,6$ l'un des termes du second membre de $\Pi(m)$ est négligeable et

$$\Pi(m) \sim F(u_{\alpha/2} + |\delta|)$$

L'effectif n correspondant à des risques α et β est défini par

$$n = \frac{1}{d^2} [u_{1-\alpha/2} + u_{1-\beta}]^2$$

avec

$$d = \frac{m - m_0}{\sigma}$$

On retrouve encore les droites définies en coordonnées logarithmiques dans le cas d'un test unilatéral en y remplaçant α par $\alpha/2$.

4/ Déterminer l'effectif n , permettant d'estimer pour la moyenne, un intervalle de confiance bilatéral symétrique à $1 - \alpha$ avec une probabilité donnée $1 - \gamma$ pour que cet intervalle ait une longueur inférieure à une valeur fixée 2λ lorsque l'on dispose préalablement d'une estimation s_0^2 de σ^2 basée sur ν_0 degrés de liberté.

Si s^2 est l'estimation de σ^2 correspondant à l'effectif inconnu n on devra avoir :

$$\Pr \left[t_{1-\alpha/2}^{(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} < \lambda \right] = 1 - \gamma$$

soit

$$\Pr \left[s < \frac{\lambda \sqrt{n}}{t_{1-\alpha/2}^{(n-1)}} \right] = 1 - \gamma$$

Mais d'autre part on sait que l'on a toujours

$$1 - \gamma = \Pr [s < s_0 \sqrt{F_{1-\gamma}(n-1, \nu_0)}]$$

d'où par comparaison

$$\left(\frac{\lambda}{s_0} \right)^2 = \frac{t_{1-\alpha/2}^2 (n-1)}{n} F_{1-\gamma} (n-1, \nu_0)$$

Cette équation en n pourra être résolue par approximations successives.

Exemple - $s_0 = 3$, $\nu_0 = 9$, $\alpha = 0,02$, $\gamma = 0,05$, $\lambda = 2$

d'où

$$\frac{4}{9} = 0,444 = \frac{t_{0,99}^2 (n-1)}{n} F_{0,95} (n-1, 9)$$

Si on essaye $n = 40$, on trouve $\frac{(2,426)^2}{40} \times 2,83 = 0,41$ au lieu de 0,444. Pour $n = 36$, on trouve 0,47, d'où finalement $n \sim 38$.

Pour un intervalle unilatéral à $1 - \alpha$, on aurait de même pour un intervalle de confiance de longueur λ :

$$\left(\frac{\lambda}{s_0} \right)^2 = \frac{t_{1-\alpha}^2 (n-1)}{n} F_{1-\gamma} (n-1, \nu_0)$$

B - TEST DE COMPARAISON DE DEUX MOYENNES

B.1 - Test unilatéral au risque α de rejeter l'hypothèse $m_1 - m_2 = 0$, lorsqu'elle est vraie (populations normales de même variance inconnue).

1/ Intervalle d'acceptation de l'hypothèse $H_0 (m_2 - m_1 = 0)$ contre l'hypothèse $H_1 (m_2 - m_1 = D$, par exemple $D > 0$).

$$\text{Si } s^2 = \frac{(n_1-1) s_1^2 + (n_2-1) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{avec} \quad s_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} (x_j - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1}$$

($i = 1, 2$ et $j = 1, 2, \dots, N_i$), est l'estimation de la variance commune σ^2 , l'intervalle d'acceptation est défini, pour $\bar{x}_2 > \bar{x}_1$, par la condition :

$$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} < t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} . \quad (11)$$

2/ Puissance du test

Si l'on pose $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = W$, la puissance du test pour $m_2 - m_1 = D$ est

$$\begin{aligned} \Pi(D) &= 1 - \beta = \Pr \left[\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \mid D, \sigma^2 \right] \\ &= \Pr \left[\frac{W - D}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} + \frac{D}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} > t_{1-\alpha}^{(n_1+n_2-2)} \mid D, \sigma^2 \right] \quad (12) \end{aligned}$$

qui dépend de la distribution d'une variable t non centrée de paramètre

$$\delta = \frac{D}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} .$$

Pour α donné et pour tout couple de valeurs n_1, n_2 les tables de t non centré permettent de calculer $\Pi(m)$ en fonction de δ ou de $\frac{D}{\sigma}$.

Dans le cas particulier de $n_1 = n_2 = n$, on a

$$\delta = \frac{m_2 - m_1}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2}} .$$

Le problème est le même que celui qui a été traité au § A.1, sa solution est donnée par les graphiques 1, 2, 3, 4, à condition de prendre comme abscisse

$$\delta = \frac{m_2 - m_1}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} ,$$

(ou $\delta = \frac{m_2 - m_1}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2}}$ si $n_1 = n_2 = n$) au lieu de $\delta = \frac{m_1 - m_0}{\sigma} \sqrt{n}$ et $v = n_1 + n_2 - 2$ (ou $v = 2n - 2$) au lieu de $v = n - 1$.

Dans les mêmes conditions que précédemment, des approximations pourraient être utilisées, par exemple

$$\Pi(D) = 1 - \beta \sim F \left[\frac{\frac{D}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2}} + t_{\alpha}^{(2n-2)}}{\sqrt{1 + \frac{t_{\alpha}^2}{2(n-1)}}} \right]$$

ou

$$t_{1-\beta}^{(2n-2)} = \frac{D}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2}} - t_{1-\alpha}^{(2n-2)}.$$

3/ Détermination de l'effectif commun n des deux échantillons, correspondant, dans un test unilatéral au niveau de confiance $1 - \alpha$, à un risque de seconde espèce ayant une valeur donnée β .

La résolution en n de l'équation $\Pi(D) = 1 - \beta$ montre encore que pour les valeurs usuelles de α et β , la relation entre $m_2 - m_1$ et n est pratiquement équivalente à :

$$\frac{m_2 - m_1}{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{n}} \left[t_{1-\alpha}^{(2n-2)} + t_{1-\beta}^{(2n-2)} \right]. \quad (13)$$

Exemple - Pour $\frac{m_2 - m_1}{\sigma} = 0,20$, $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,10$, la valeur de n calculé à partir de la table de t non centré est $n = 430$.

Pour $n = 430$, la relation (13) donne

$$\frac{m_2 - m_1}{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{430}} (1,2825 + 1,6466) \neq 0,20$$

On pourrait donc, pour α et β fixés, tracer les courbes donnant n en fonction de $\frac{m_2 - m_1}{\sigma}$, mais on peut remarquer que si on avait cherché l'effectif n correspondant à $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,10$ pour

$$\frac{m - m_0}{\sigma} = \frac{1}{2} \times 0,20 = 0,10,$$

dans le test d'une moyenne, on aurait trouvé $n \sim 860 = 430 \times 2$.

Cette propriété est générale : en effet si on pose $d_1 = \frac{m - m_0}{\sigma}$, et $d_2 = \frac{m_2 - m_1}{\sigma}$, les relations qui, pour α et β fixés, lient d_1 et d_2 à l'effectif du ou des deux échantillons, par l'intermédiaire des degrés de liberté correspondants, peuvent s'écrire :

(I) Test $m = m_0$, $d_1 = \frac{1}{\sqrt{n_1}} \Phi(n_1 - 1)$ définissant la courbe $C_1(d_1, n_1)$

(II) Test $m_1 = m_2$, $\frac{d_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{2n_2}} \Phi(2n_2 - 2)$ définissant la courbe $C_2(d_2, n_2)$

Si dans (II) on fait le changement de variable

$$\frac{d_2}{2} = d \quad 2n_2 = n$$

la courbe C_2 devient

$$d = \frac{1}{\sqrt{n}} \Phi(n - 2)$$

pratiquement identique à la courbe C_1 pour n non trop petit (par exemple $n > 10$), compte tenu des faibles variations relatives des fractiles de la variable t lorsque le nombre des degrés de liberté varie d'une unité.

Le changement de variable :

$$\frac{d_2}{2} = d \quad 2n_2 - 1 = n$$

qui conduit à

$$d = \frac{\Phi(n - 1)}{\sqrt{n + 1}}$$

et qui est équivalent au précédent pour n grand donnera à partir de la courbe C_1 et dans tous les cas une bonne approximation par excès de n_2 .

Le même graphique, pour α et β fixés, pourra donc être utilisé aussi bien pour le test d'une moyenne que pour celui de la comparaison de deux moyennes, moyennant l'emploi de deux systèmes d'échelles, l'un pour le test de l'hypothèse $m = m_0$, l'autre pour le test de l'hypothèse $m_1 = m_2$ (figure 3).

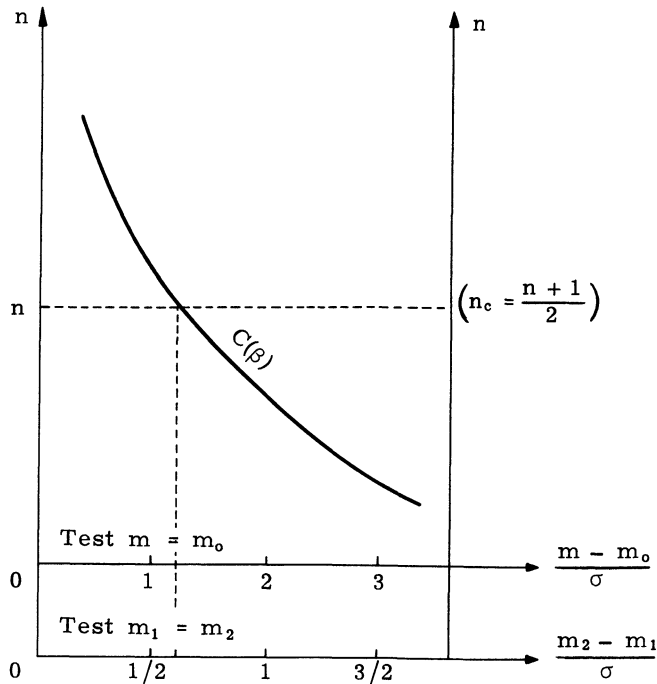


Fig. 3

D'autre part, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, la courbe relative à un test unilatéral au risque α pourra être pratiquement confondue avec la courbe relative à un test bilatéral au risque 2α .

Remarque - Si l'on dispose préalablement d'une estimation s_0^2 de la variance commune, obtenue avec v_0 degrés de liberté, le même changement d'unités, appliqué aux échelles des graphiques 8a et 8b, permettra de les utiliser pour déterminer l'effectif commun n correspondant à des risques donnés $\alpha = 0,05$ (test unilatéral) ou $0,10$ (test bilatéral) pour $\beta = 0,05$ et $\beta = 0,20$.

Cas particulier - Si la variance est connue a priori l'intervalle d'acceptation étant défini pour $\bar{x}_2 > \bar{x}_1$ par

$$\frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} < u_{1-\alpha}$$

on aura (graphique 4a), pour la puissance du test :

$$1 - \beta = \Pi(D) = F(u_\alpha + |\delta|) \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{m_2 - m_1}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

et pour l'effectif commun correspondant aux risques α, β :

$$n = \frac{2}{d^2} (u_{1-\alpha} + u_{1-\beta}) \quad \text{avec} \quad d = \frac{m_2 - m_1}{\sigma}$$

(voir graphiques n° 9 à 12).

B. 2 - Test bilatéral au risque $\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$ de rejeter l'hypothèse $m_2 - m_1 = 0$ lorsqu'elle est vraie.

1/ Intervalle d'acceptation

$$\left| \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{s} \right| \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(v)} \quad , \quad v = n_1 + n_2 - 2$$

2/ Puissance du test

Si l'on pose encore $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = W$, $m_2 - m_1 = D$, la puissance du test est :

$$\begin{aligned} (D) = & \Pr \left[\frac{|W|}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(v)} \mid D, \sigma^2 \right] \\ = & \begin{cases} \Pr \left[\frac{W - D}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} + \frac{D}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} < t_{\alpha/2} \right] \\ + \Pr \left[\frac{W - D}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} + \frac{D}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} > t_{1-\alpha/2} \right] \end{cases}, \quad v = n_1 + n_2 - 2 \end{aligned}$$

Les deux termes peuvent être calculés à l'aide de la table de t non centré de paramètre

$$\delta = \frac{m_2 - m_1}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

mais quel que soit $D \neq 0$, l'un des deux termes, nécessairement inférieur à $\frac{\alpha}{2}$, est pratiquement négligeable si δ n'est pas très petit et on pourra pratiquement, pour $|\delta| > 1$, utiliser la puissance correspondant au test unilatéral pour le risque $\alpha/2$.

3/ Effectif commun n dans un test bilatéral à $1 - \alpha$ pour un risque de seconde espèce égal à une valeur donnée β .

Il est pratiquement défini soit en fonction de $\frac{m_2 - m_1}{\sigma}$, soit en fonction de $\frac{m_2 - m_1}{s_0}$, par les mêmes graphiques que le test unilatéral (le test unilatéral à $1 - \frac{\alpha}{2}$ donnant pour β fixé la même valeur de n que le test bilatéral à $1 - \alpha$).

Cas particulier - Si la variance est connue à priori, l'intervalle d'acceptation étant défini par

$$\frac{|x_2 - x_1|}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} < u_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

la puissance du test, pour $m_2 - m_1 = D$ est

$$\Pi(D) = F(u_{\alpha/2} - \delta) + F(u_{\alpha/2} + \delta)$$

avec

$$\delta = \frac{m_2 - m_1}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

Pour $|\delta| > 0,6$ et pour les valeurs usuelles de α , on a pratiquement (graphique 4a)

$$\Pi(D) \sim F(u_{\alpha/2} + |\delta|),$$

et l'effectif commun n correspondant à des risques α et β fixés est

$$n \sim \frac{2}{d^2} (u_{1-\alpha/2} + u_{1-\beta})^2, \quad d = \frac{m_2 - m_1}{\sigma}$$

(voir graphiques n° 9 à 12).

En résumé

a) Quel que soit le test envisagé (estimation d'une moyenne, ou comparaison de deux moyennes, test unilatéral ou test bilatéral) le graphique donnant la puissance du test pour un test unilatéral au risque α avec

$$\delta = \frac{|m - m_0|}{\sigma} \sqrt{n} \quad \text{test de l'hypothèse } H_0(m = m_0)$$

ou

$$\delta = \frac{|m_2 - m_1|}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2}} \quad \text{test de l'hypothèse } H_0(m_1 = m_2),$$

pour

$$n_1 = n_2 = n,$$

pourra être utilisé comme approximation, dans les deux cas, pour un test bilatéral au risque 2α , lorsque $|\delta| > 1$.

b) De même, moyennant le changement d'échelles défini ci-dessus le graphique donnant pour une valeur fixée de β l'effectif n ou l'effectif commun, pour un test unilatéral au risque α pourra dans les deux cas (estimation ou comparaison) être utilisé pour l'approximation de l'effectif ou de l'effectif commun, pour un test bilatéral au risque 2α .

Noter, cependant, que les graphiques n° 5, 6, 7 et 8 ont été calculés pour le cas du test unilatéral d'une moyenne et que leur emploi pour le test bilatéral d'une moyenne ou pour les tests relatifs à la comparaison de deux moyennes, comporte une certaine approximation, mais pratiquement négligeable.

Ainsi par exemple, pour le test bilatéral $H_0(m_1 = m_2)$ avec $\alpha = 0,01$, $\beta = 0,05$, $\frac{m_2 - m_1}{\sigma} = 0,5$, la solution correcte est $n = 40$, le graphique n° 5 donne $n = 38$.

Exemples

- Test unilatéral, $\alpha = 0,05$ de $H_0(m = m_0)$ pour $\delta = \frac{|m - m_0|}{\sigma} \sqrt{n} = 2$ et $n = 13$ ($\nu = 12$)

Le graphique (4) donne $1 - \beta = 0,60$

- Test bilatéral $\alpha = 0,10$, avec les mêmes conditions, ($\delta > 1$).
On a de même $1 - \beta \sim 0,60$

- Test unilatéral $\alpha = 0,05$ de $H_0(m_1 = m_2)$ pour

$$\delta = \frac{|m_2 - m_1|}{\sigma} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} = 2,$$

et $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 12$.

Le graphique (4) donne $1 - \beta = 0,60$.

- Test bilatéral $\alpha = 0,10$ avec les mêmes conditions.
On a encore $1 - \beta \sim 0,60$.

- Test unilatéral $\alpha = 0,05$ de $H_0(m = m_0)$ pour $\frac{|m - m_0|}{\sigma} = 1$. Effectif n pour $\beta = 0,10$.

Le graphique (8) donne $n = 11$.

- Test bilatéral $\alpha = 0,05$ avec les mêmes conditions.
Le graphique (7) donne $n \sim 13$.

- Test unilatéral $\alpha = 0,05$ de $H_0(m_1 = m_2)$ pour $\frac{|m_2 - m_1|}{\sigma} = 2$. Effectif commun pour $\beta = 0,10$.

Le graphique (8) donne $2n - 1 = 11$, d'où $n = 6$.

- Test bilatéral $\alpha = 0,05$ de $H_0(m_1 = m_2)$ pour $\frac{|m_2 - m_1|}{\sigma} = 2$. Effectif commun pour $\beta = 0,10$.

Le graphique (7) donne $2n - 1 = 13$ d'où $n \sim 7$.

4/ Déterminer l'effectif commun n , permettant d'estimer pour la différence de deux moyennes un intervalle de confiance symétrique bilatéral à $1 - \alpha$, avec une probabilité donnée $1 - \gamma$ pour que cet intervalle ait

une longueur inférieure à une longueur fixée 2λ , lorsque l'on dispose préalablement d'une estimation s_0^2 de la variance commune basée sur ν_0 degrés de liberté.

Le même raisonnement que dans le cas de l'estimation par intervalle d'une moyenne conduit à l'équation :

$$\frac{\lambda^2}{2s_0^2} = \frac{t_{1-\alpha/2}^2 (2n-2)}{n} F_{1-\gamma} (2n-2, \nu_0)$$

qui pourra être résolue en n par approximation.

Pour un intervalle de confiance unilatéral à $1-\alpha$, on aurait de même, pour un intervalle de longueur λ :

$$\frac{\lambda^2}{2s_0^2} = \frac{t_{1-\alpha}^2 (2n-2)}{n} F_{1-\gamma} (2n-2, \nu_0)$$

C - TEST D'UNE VARIANCE

C.1.1 - Test unilatéral au risque α de rejeter l'hypothèse $H_0(\sigma^2 = \sigma_0^2)$ contre $H_1(\sigma^2 > \sigma_0^2)$ par exemple).

1/ Intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0

Soit $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x - \bar{x})^2$, l'estimation de la variance, la région d'acceptation est définie par

$$s^2 < \frac{\sigma_0^2}{\nu} \chi_{1-\alpha}^2, \quad \nu = n-1$$

2/ Puissance du test

Si la variance est $\sigma^2 > \sigma_0^2$, la puissance du test est

$$\begin{aligned} \Pi(\sigma^2) &= 1 - \beta = \Pr \left[s^2 > \frac{\sigma_0^2}{\nu} \chi_{1-\alpha}^2 \right] \\ &= \Pr \left[\chi^2 > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \chi_{1-\alpha}^2 \right], \quad \nu = n-1 \end{aligned}$$

3/ Déterminer n pour que le risque de ne pas détecter une variance $\sigma^2 > \sigma_0^2$ soit égal à une valeur donnée β .

On devra avoir :

$$1 - \beta = \Pr \left[\chi^2 > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \chi_{1-\alpha}^2 \right]$$

soit

$$\frac{\chi_{1-\alpha}^2}{\chi_{\beta}^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = k \quad (\nu = n-1)$$

(Des tables [1] donnant les valeurs de $\Phi(\alpha, \beta, \nu) = \frac{\chi_{1-\alpha}^2}{\chi_{\beta}^2}$ ont été calculées pour $\alpha = 0,01 - 0,05$ et pour une gamme étendue de valeurs de β et de ν).

Pour tout couple α, β , la relation précédente permet, à partir d'une table de χ^2 , de construire les courbes donnant v (ou n) en fonction de k .

Les graphiques ci-après (n° 13, 14, 15, 16 et 17) correspondent aux valeurs $\alpha = 0,005 - 0,01 - 0,025 - 0,05$ et $0,10$, pour $\beta = \gamma = 0,005 - 0,01 - 0,05 - 0,10 - 0,20 - 0,50$.

C.1.2 - Test unilatéral de l'hypothèse $H_0(\sigma^2 = \sigma_0^2)$ contre $H_1(\sigma^2 < \sigma_0^2)$.

1/ La région d'acceptation sera alors définie par

$$s^2 > \frac{\sigma_0^2}{v} \chi_\alpha^2$$

2/ Pour $\sigma^2 < \sigma_0^2$, la puissance du test est

$$\begin{aligned} \Pi(\sigma^2) &= 1 - \beta = \Pr \left[s^2 < \frac{\sigma_0^2}{v} \chi_\alpha^2 \right] \\ &= \Pr \left[\chi^2 < \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \chi_\alpha^2 \right] \quad , \quad v = n - 1 \end{aligned}$$

3/ Pour un risque β fixé, on devra avoir

$$\frac{\chi_{1-\beta}^2}{\chi_\alpha^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} = k > 1 \quad , \quad (v = n - 1)$$

Cette condition qui définit n pour $\sigma^2 < \sigma_0^2$ est de la même forme que la précédente qui définissait n pour $\sigma^2 > \sigma_0^2$, à condition de permuter les rôles de α et β .

Les graphiques n° 13 à 17 correspondent alors respectivement aux valeurs $\beta = 0,005 - 0,01 - 0,025 - 0,05$ et $0,10$ pour $\alpha = \gamma = 0,005 - 0,01 - 0,05 - 0,10 - 0,20$ et $0,50$.

On pourra donc en tenant compte de cette permutation utiliser des graphiques ne tenant compte que des valeurs de k supérieures à l'unité, $k > 1$ représentant soit le rapport

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \frac{\chi_{1-\beta}^2}{\chi_\alpha^2} ,$$

soit le rapport

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} = \frac{\chi_{1-\beta}^2}{\chi_\alpha^2} .$$

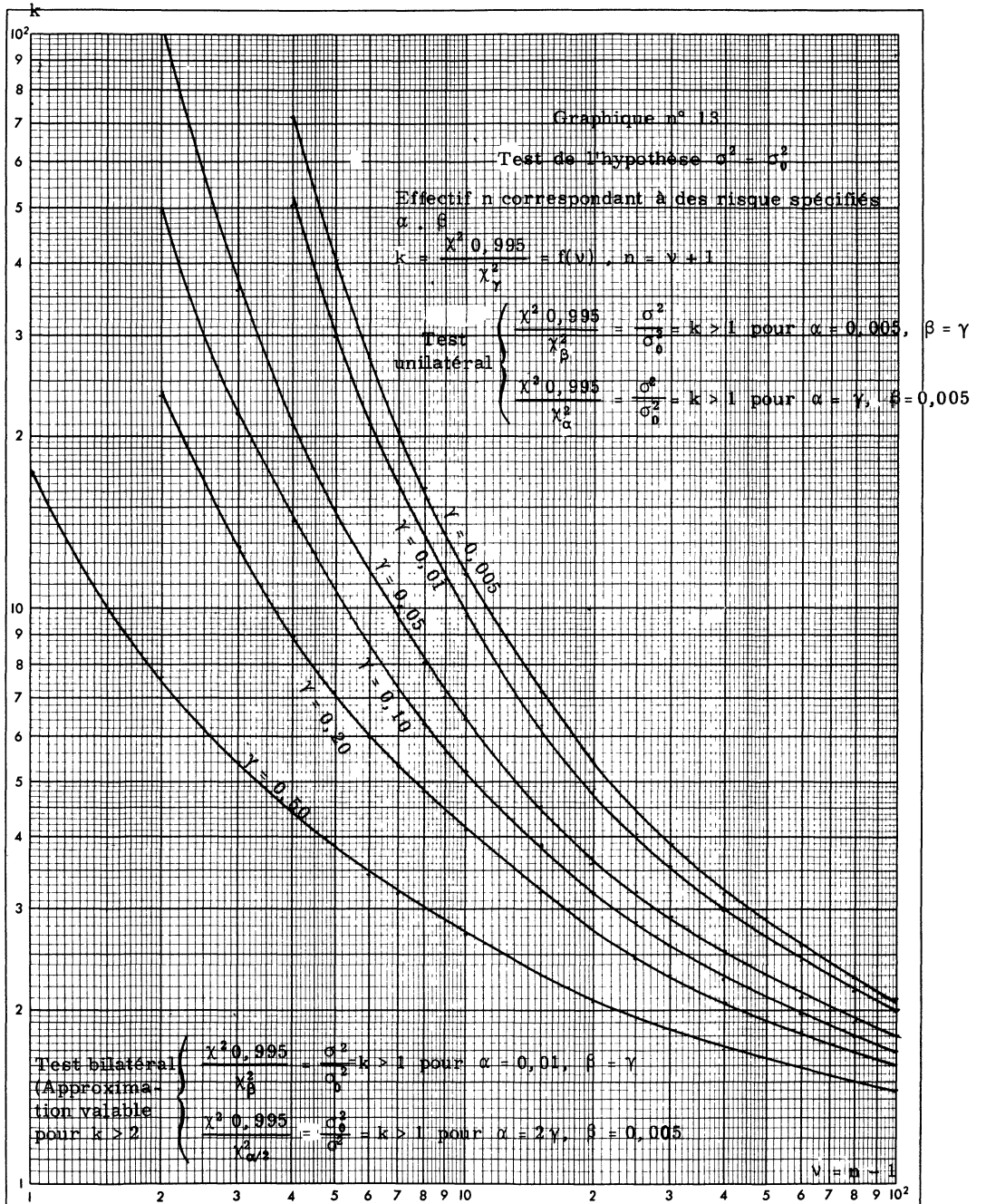
Exemples

1/ Dans un test unilatéral au risque $\alpha = 0,05$, déterminer n pour que le risque de ne pas déceler une augmentation de variance dans le rapport $\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = 4$ soit $\beta = 0,01$.

Pour $k = 4$, le graphique n° 16 correspondant à $\alpha = 0,05$, pour $\beta = \gamma = 0,01$, $v = 18$, donne $n = 19$ (valeur entière par excès).

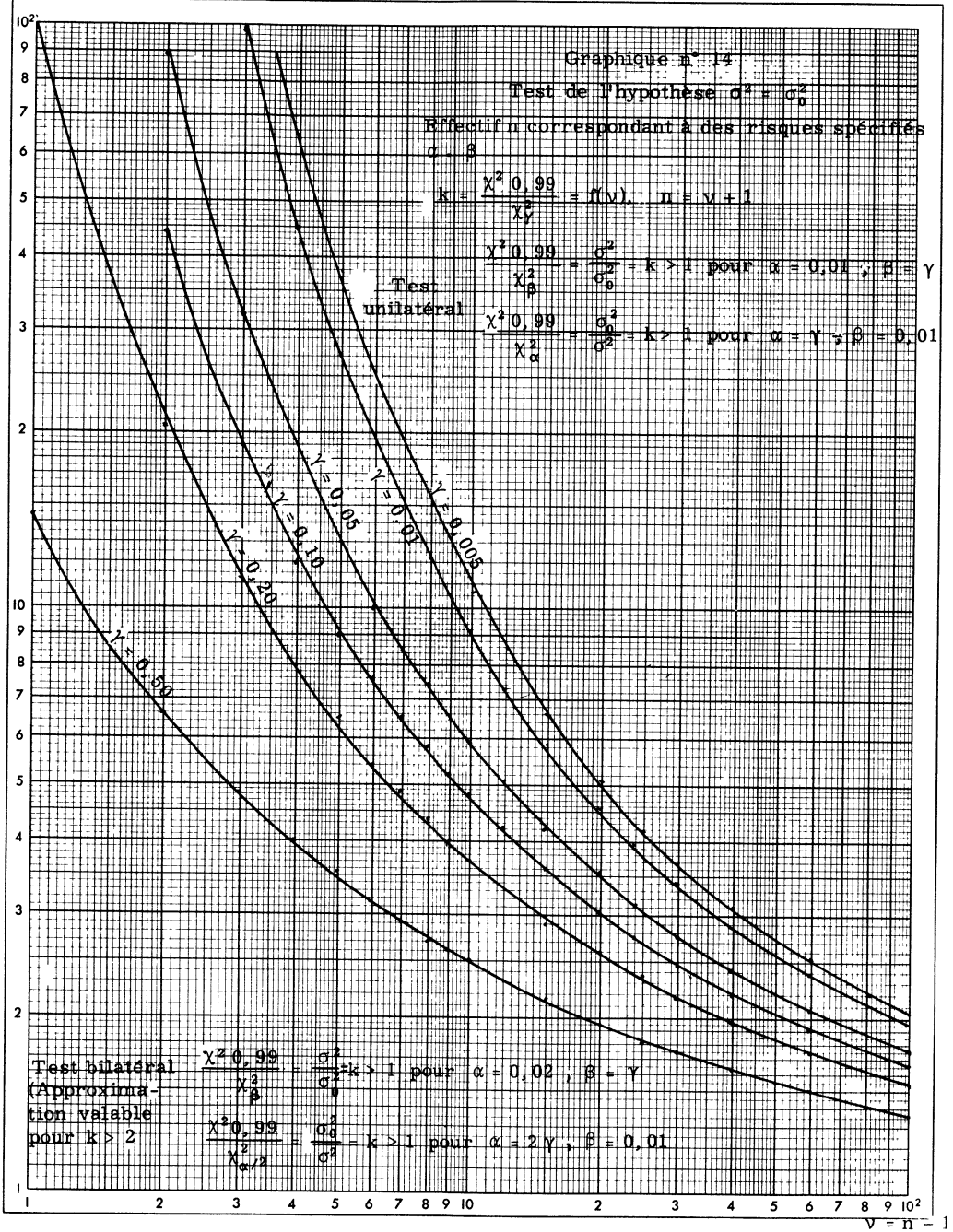
2/ Dans un test unilatéral au risque $\alpha = 0,05$ déterminer n pour que le risque de ne pas déceler une diminution de variance dans le rapport $\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{2}$, soit $\beta = 0,01$.

Graphique 13

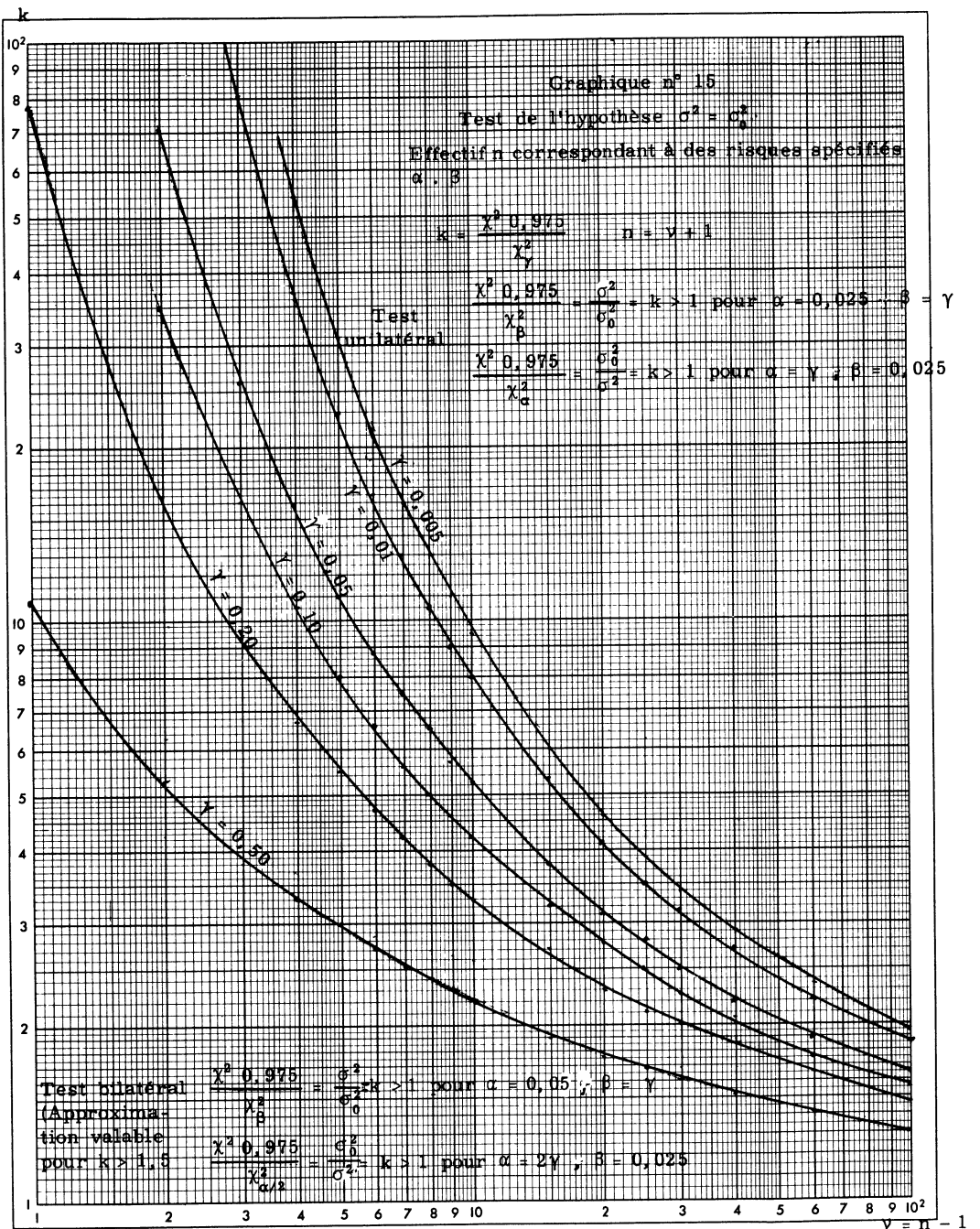


Graphique 14

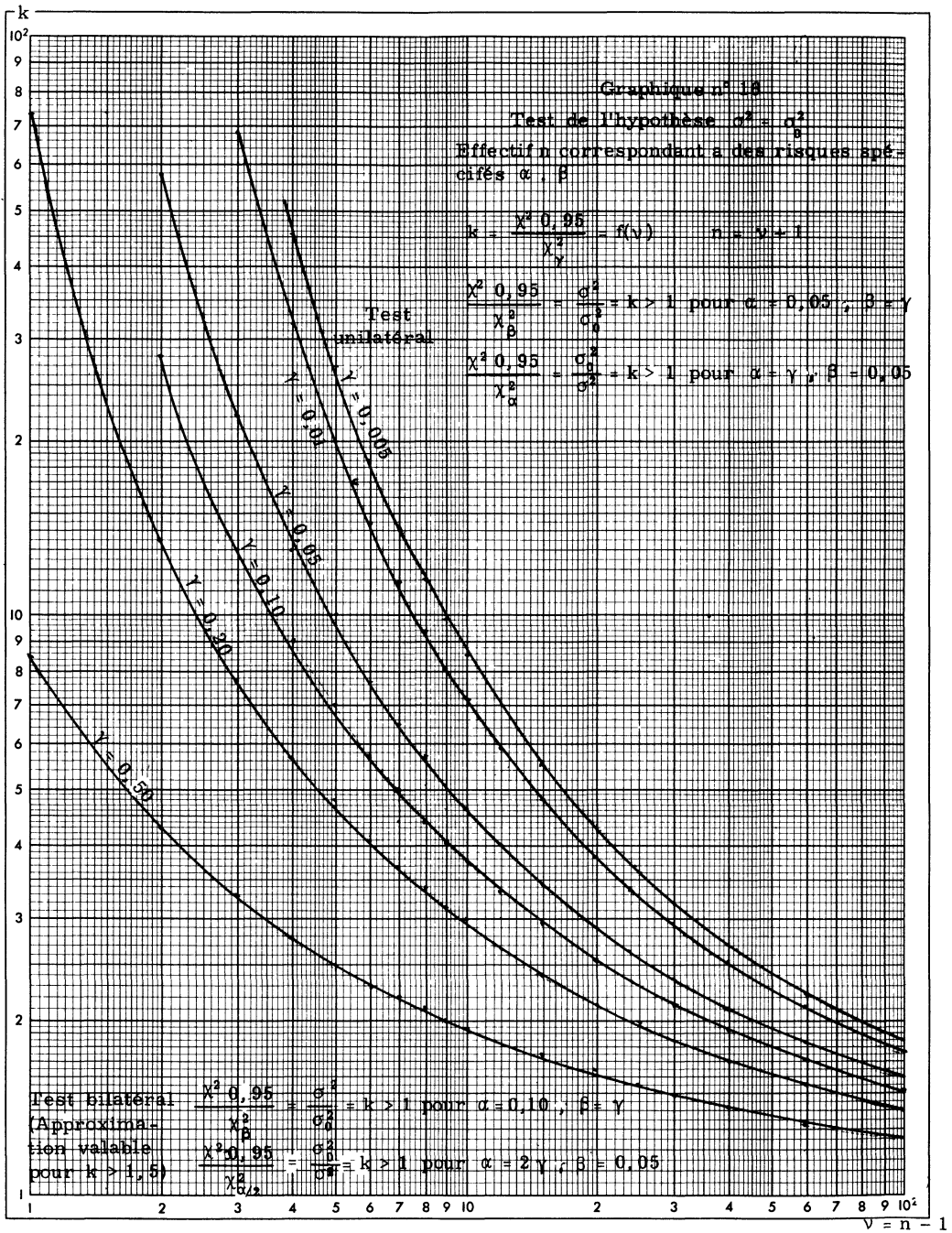
k



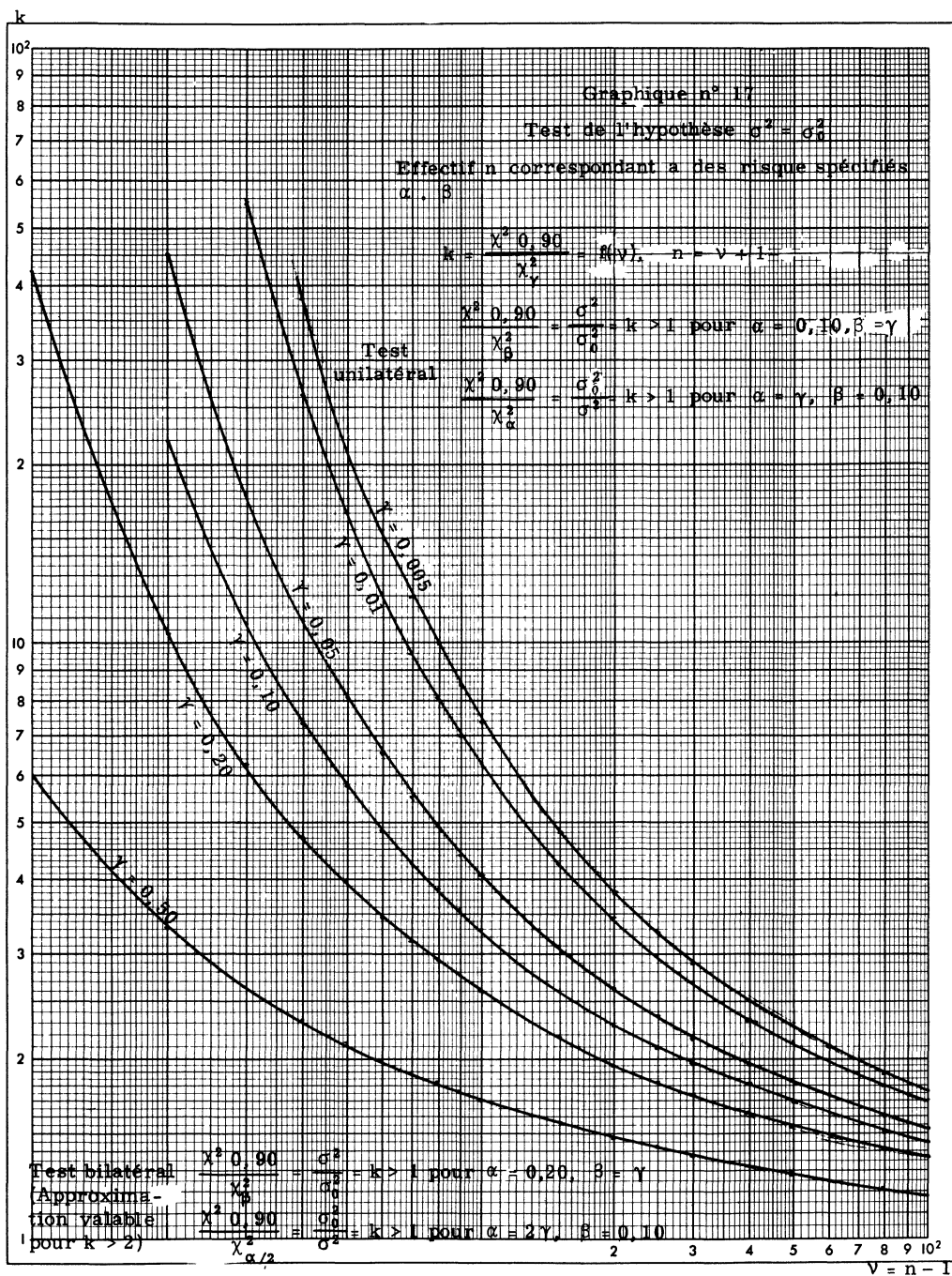
Graphique 15



Graphique 16



Graphique 17



Pour $k = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} = 2 > 1$, le graphique n° 14, pour $\beta = 0,01$ et

$$\alpha = \gamma = 0,05, \quad \text{donne} \quad v = 66, \quad n = 67.$$

Approximations - Pour les petites valeurs de k (soit $k < 3$) et pour les valeurs usuelles de α et β , on peut aussi utiliser l'approximation définie de manière générale par :

$$k = \frac{\chi_{1-\gamma}^2}{\chi_{\gamma}^2} \sim \left[\frac{\sqrt{2v-1} + u_{1-\gamma}}{\sqrt{2v-1} + u_{\gamma}} \right]$$

soit

$$\sqrt{2v-1} = \frac{u_{1-\gamma} - u_{\gamma} \sqrt{k}}{\sqrt{k} - 1}$$

Dans le cas précédent, pour $\frac{\chi_{0,99}^2}{\chi_{0,05}^2} = 2$, on obtient

$$\sqrt{2v-1} = \frac{u_{0,99} - 0,05 \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

d'où $v \sim 65$

Remarque - Les courbes des graphiques 13, 14, 15, 16 et 17 sont analogues à celles qui figurent dans l'abaque Cavé [14] utilisé pour déterminer un plan simple d'échantillonnage par attributs défini par les risques $(\alpha, p_1 - \beta, p_2)$.

On sait, en effet, que pour p_1, p_2 petits ($< 0,10$) le plan est défini par les conditions

$$\sum_0^c e^{-np_1} \frac{(np_1)^x}{x!} = 1 - \alpha \quad (1)$$

$$\sum_0^c e^{-np_2} \frac{(np_2)^x}{x!} = \beta$$

d'où

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha}^2 &= 2 np_1 \\ \chi_{1-\beta} &= 2 np_2 \end{aligned} \quad \text{avec} \quad v = 2(c+1) \quad (2)$$

soit

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\chi_{1-\beta}^2}{\chi_{\alpha}^2}, \quad v = (2c+1)$$

Le critère d'acceptation c est donc, à partir de $v = 2(c+1)$ donné par les graphiques en fonction du rapport $k = \frac{p_2}{p_1}$.

Le graphique Cavé donne en plus la détermination graphique de n , effectif de l'échantillon, à partir des conditions (2).

En ce qui concerne la seule détermination de c, les graphiques 13, 14, 15, 16 et 17 complètent le graphique Cavé pour les combinaisons indiquées dans le tableau ci-après.

$\alpha \backslash \beta$	0,005	0,01	0,05	0,10	0,20
0,005	x	x	x	x	x
0,01	x		x	x	x
0,025	x	x	x	x	x
0,05	x	x		x	x
0,10	x	x			x

les valeurs correspondantes de n étant calculées à l'aide d'une table de χ^2 , par les conditions (2), compte tenu des approximations dues au fait que c et n doivent être des nombres entiers.

C.2 - Test bilatéral symétrique au risque α de rejeter l'hypothèse $H_0 (\sigma^2 = \sigma_0^2)$ contre l'hypothèse $H_1 (\sigma^2 \neq \sigma_0^2)$.

1/ Intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0

Il est défini par

$$\frac{\sigma_0^2}{v} \chi_{\alpha/2}^2 < s^2 < \frac{\sigma_0^2}{v} \chi_{1-\alpha/2}^2 \quad v = n - 1$$

2/ Puissance du test

Si la variance est en réalité σ^2 , la puissance du test est :

$$\begin{aligned} \Pi(\sigma^2) &= 1 - \beta = 1 - \Pr \left[\frac{\sigma_0^2}{v} \chi_{\alpha/2}^2 < s^2 < \frac{\sigma_0^2}{v} \chi_{1-\alpha/2}^2 \mid \sigma^2 \right] \\ &= \Pr \left[\chi^2 < \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \chi_{\alpha/2}^2 \right] + \Pr \left[\chi^2 > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \chi_{1-\alpha/2}^2 \right] \end{aligned}$$

que l'on peut calculer à l'aide d'une table de χ^2 .

3/ Déterminer l'effectif n pour que le risque de ne pas déceler une variance $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ soit égal à une valeur donnée β .

a) $\sigma^2 > \sigma_0^2$

Si on envisage le cas $\sigma^2 > \sigma_0^2$, on a :

$$\chi_{\alpha/2}^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2$$

d'où

$$\Pr \left[\chi^2 < \chi_{\alpha/2}^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right] < \Pr \left[\chi^2 < \chi_{\alpha/2}^2 \right] = \frac{\alpha}{2}$$

Pour les valeurs usuelles de α ($\alpha < 0,10$), ce terme, d'autant plus petit que α est petit, est inférieur à 0,001 dès que $\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} > 2$.

Si on néglige ce terme on devra avoir

$$1 - \beta \sim \Pr \left[\chi^2 > \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \chi_{1-\alpha/2}^2 \right] \quad v = n - 1$$

soit

$$\chi_\beta^2 \sim \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \chi_{1-\alpha/2}^2$$

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \frac{\chi_{1-\alpha/2}^2}{\chi_\beta^2}$$

On retrouve le résultat précédemment trouvé pour un test unilatéral au risque $\alpha/2$ (au lieu de α) dans le cas $\sigma^2/\sigma_0^2 > 1$.

Pour cette valeur de n , on aura en réalité un risque β' légèrement inférieur à β :

$$\beta' = \beta - \Pr \left[\chi^2 < \chi_{\alpha/2}^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right]$$

$$\text{b) } \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} < 1$$

Dans le cas de $\sigma^2 < \sigma_0^2$, la même approximation conduirait à :

$$1 - \beta \sim \Pr \left[\chi^2 < \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \chi_{\alpha/2}^2 \right]$$

soit

$$\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} = \frac{\chi_{1-\beta}^2}{\chi_{\alpha/2}^2} \quad , \quad (v = n - 1)$$

C'est encore le résultat trouvé pour le test unilatéral au risque $\frac{\alpha}{2}$ dans le cas où $\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} > 1$.

Exemple

1/ Test de l'hypothèse $\sigma_0^2 = 5$ contre $\sigma^2 \neq 5$, un échantillon de 10 observations ayant donné $s^2 = 9$ (test bilatéral, $\alpha = 0,02$).

L'intervalle d'acceptation est défini par

$$\frac{5}{9} \chi_{0,01}^2 < s^2 < \frac{5}{9} \chi_{0,99}^2 \quad v = 9$$

soit

$$\frac{5}{9} \times 2,29 < s^2 < \frac{5}{9} \times 21,7$$

2/ Puissance du test pour $\sigma^2 = 12$

On a

$$\Pi(12) = \Pr \left[\chi^2 < \frac{5}{12} \times 2,09 \right] + \Pr \left[\chi^2 > \frac{5}{12} \times 21,7 \right]$$

Le premier terme est négligeable (inférieur à 0,001) d'où

$$\begin{aligned} \Pi(12) &\sim \Pr(\chi^2 > 9,04) \quad \nu = 9 \\ &\sim 0,45 \end{aligned}$$

3/ Déterminer n pour avoir une probabilité 0,90 de déceler une variance $\sigma^2 = 12$.

n doit être tel que

$$\frac{\chi_{0,99}^2}{\chi_{0,10}^2} = \frac{12}{5} = 2,4 \quad \nu = n - 1$$

Le graphique n° 14 donne $\nu = 32$, $n = 33$. On vérifiera que pour $n = 33$, le terme négligé

$$\Pr \left[\chi^2 < \frac{5}{12} \chi_{0,01}^2 \mid \nu = 32 \right] = \Pr \left[\chi^2 < \frac{5 \times 16,4}{12} \right] = \Pr \chi^2 < 6,83$$

est inférieur à 0,0005.

D - COMPARAISON DE DEUX VARIANCES

Test Unilatéral au risque α de rejeter l'hypothèse $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ lorsqu'elle est vraie (populations normales).

1/ Intervalle d'acceptation de l'hypothèse $H_0(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ contre l'hypothèse $H_1(\sigma_1^2 > \sigma_2^2)$ par exemple.

Soit

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x}_1)^2$$

la plus grande des deux estimations de variance, la région d'acceptation est définie par :

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2) \quad , \quad \nu_1 = n_1 - 1 \quad , \quad \nu_2 = n_2 - 1 \quad .$$

2/ Puissance du test

Si σ_1^2 et σ_2^2 sont effectivement les variances avec $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = k > 1$, la puissance du test est

$$\begin{aligned}
\Pi(\sigma_1^2, \sigma_2^2) &= 1 - \beta = \Pr \left[\frac{s_1^2}{s_2^2} > F_{1-\alpha}(v_1, v_2) \mid \sigma_1^2, \sigma_2^2 \right] \\
&= \Pr \left[\frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} F_{1-\alpha}(v_1, v_2) \right] \\
&= \Pr \left[F > \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} F_{1-\alpha} \right] \quad , \quad (v_1, v_2)
\end{aligned}$$

qui peut être calculée à l'aide de la table F.

3/ Détermination de n_1, n_2 pour que le risque de ne pas déceler un rapport $k = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$ soit égal à une valeur donnée β .

On devra avoir

$$\Pi(k) = \Pi(\sigma_1^2, \sigma_2^2) = 1 - \beta = \Pr \left[F > \frac{1}{k} F_{1-\alpha} \right] \quad (v_1, v_2)$$

n_1 et n_2 devront être liés par la relation

$$F_\beta = \frac{1}{k} F_{1-\alpha} \quad (v_1, v_2)$$

soit

$$k = F_{1-\alpha}(v_1, v_2) \times F_{1-\beta}(v_2, v_1)$$

Des tables donnant les valeurs de

$$\Phi(\alpha, \beta, v_1, v_2) = F_{1-\alpha}(v_1, v_2) \times F_{1-\beta}(v_2, v_1)$$

ont été publiées [1] pour $\alpha = 0,01 - 0,05$ et une gamme étendue de valeurs de β et de v_1, v_2 . Elles permettent de déterminer des couples de valeurs n_1, n_2 satisfaisant à la condition $\Pi(k) = 1 - \beta$.

Si on se fixe la condition $n_1 = n_2 = n$, soit $v_1 = v_2 = n - 1$, cette condition s'écrit :

$$k = F_{1-\alpha}(v, v) \times F_{1-\beta}(v, v)$$

A partir d'une table de F, pour tout couple de valeurs de α, β ces résultats peuvent être aisément tabulés et présentés sous forme de graphiques donnant n (ou $v = n - 1$) en fonction de k .

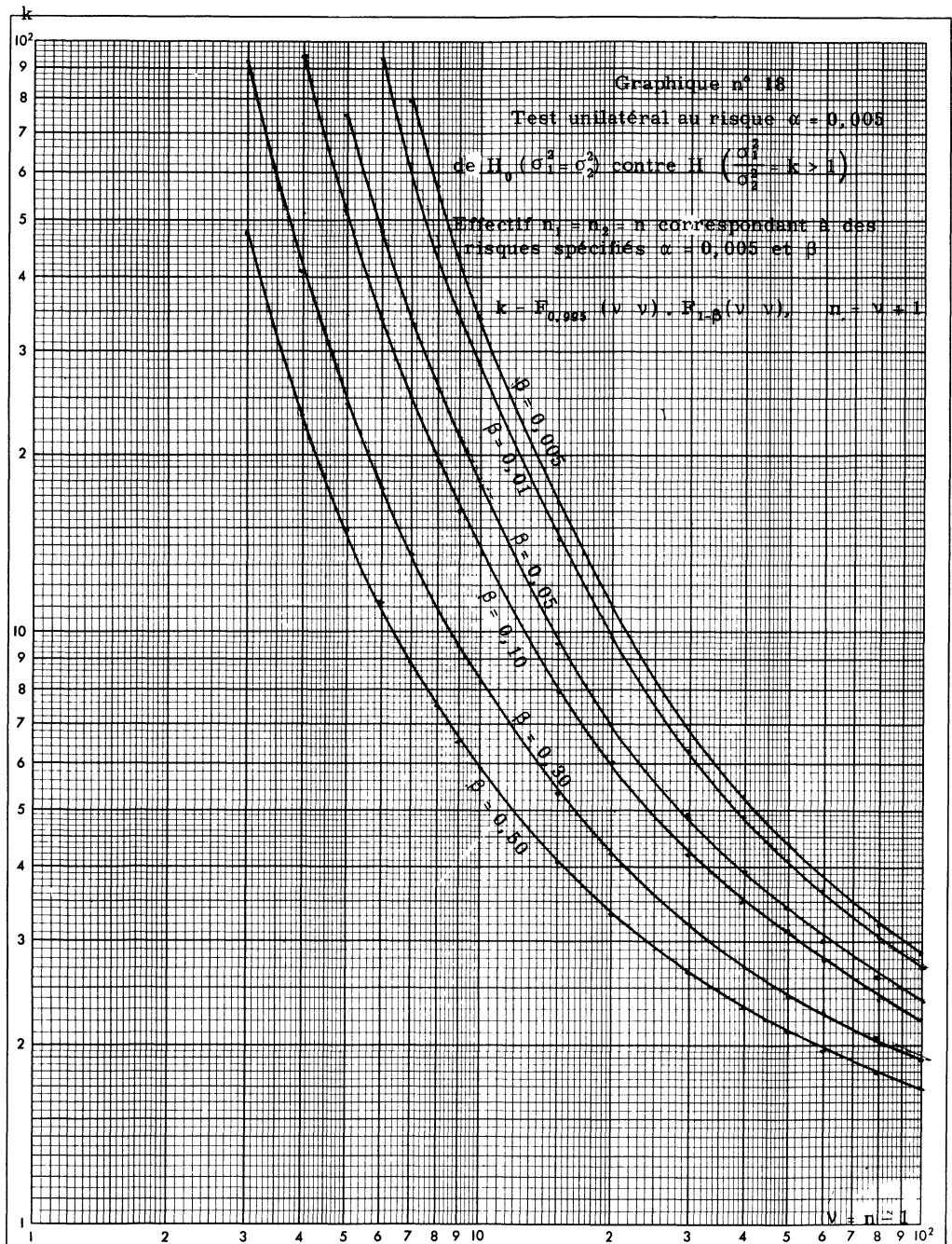
Les graphiques ci-après n° 18, 19, 20, 21 et 22 donnent directement les solutions pour α : 0,005 - 0,01 - 0,025 - 0,05 et 0,10 et $\beta = 0,01 - 0,05 - 0,10 - 0,30 - 0,50$.

Exemple - Déterminer l'effectif commun n pour que dans un test unilatéral $\alpha = 0,05$, le risque de ne pas déceler un rapport $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 3$, soit $\beta = 0,01$.

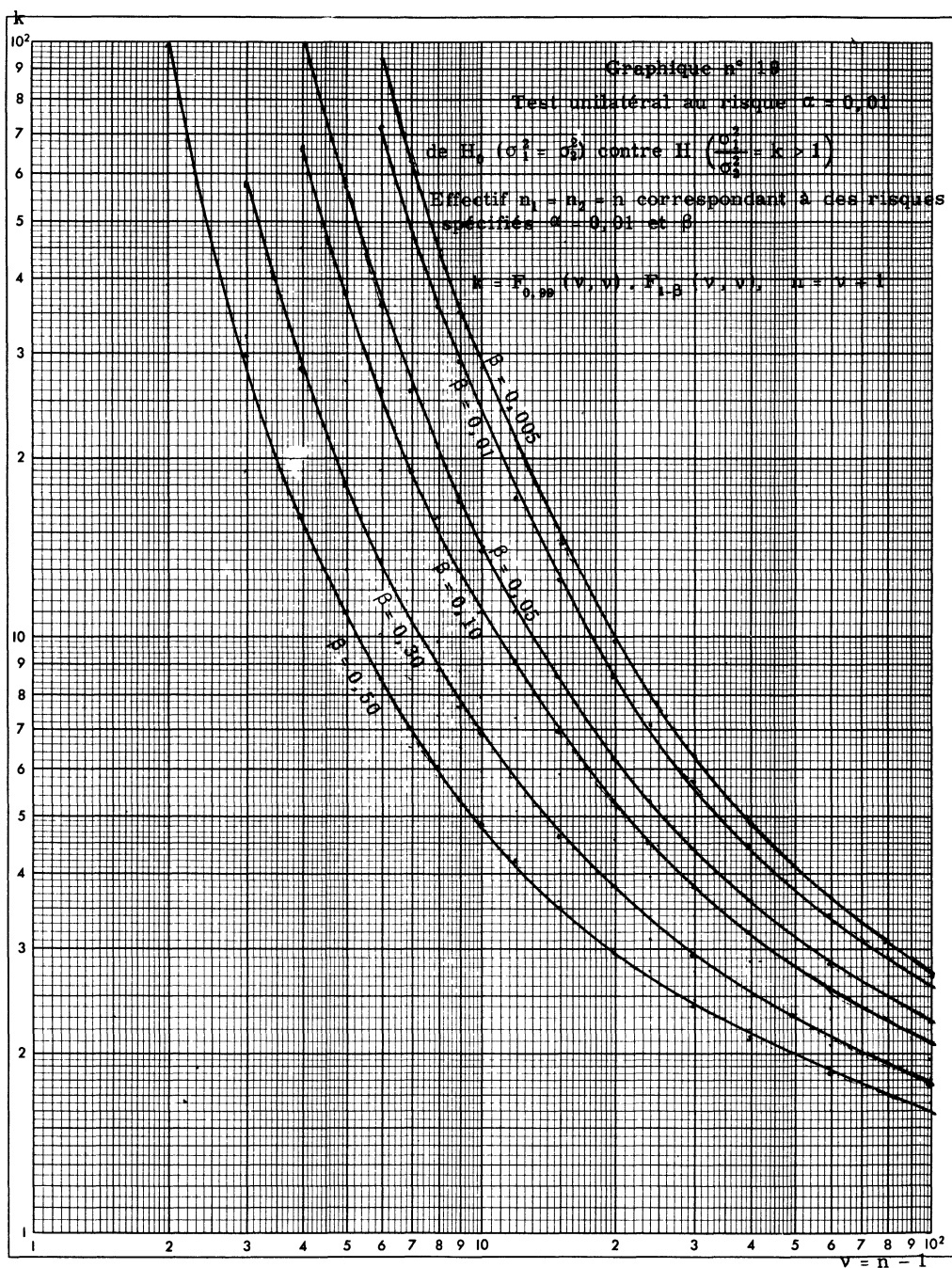
Le graphique n° 21 donne $v = 54$, $n = 55$.

Approximations - Pour $k < 3$ et $\alpha, \beta < 0,10$ on pourra utiliser les approximations suivantes

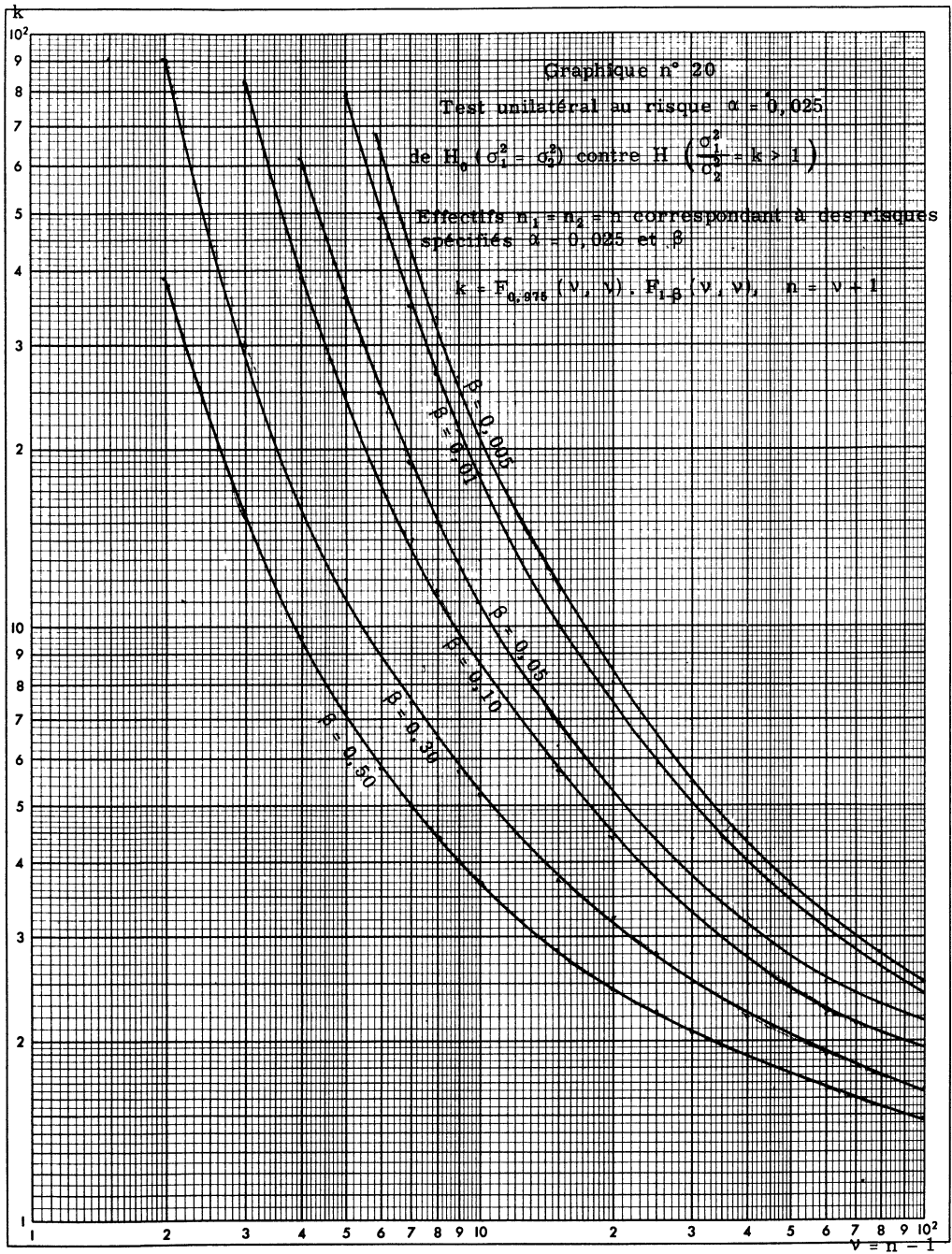
Graphique 18



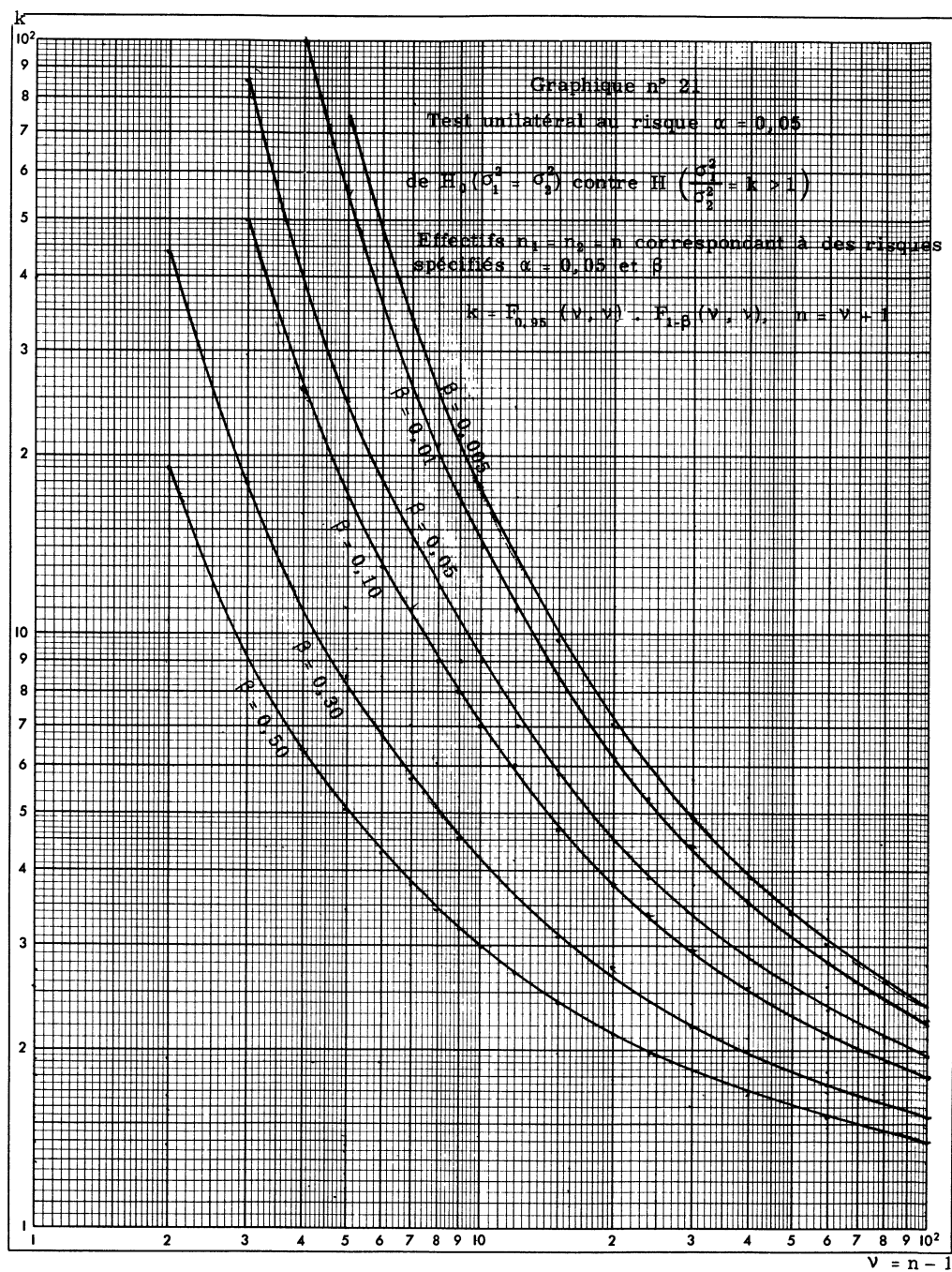
Graphique 19



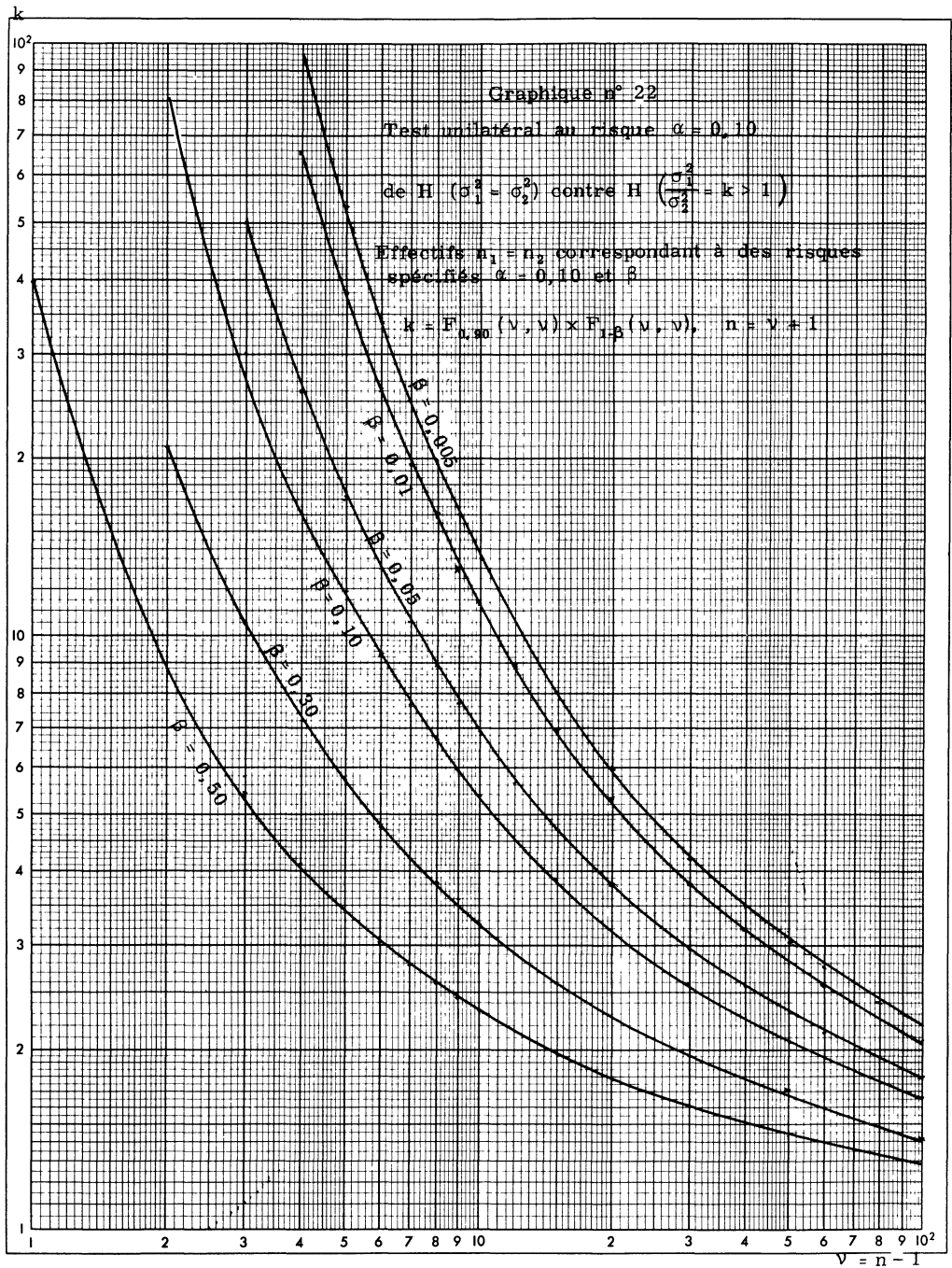
Graphique 20



Graphique 21



Graphique 22



$$\log_{10} F_{1-\gamma} \sim \frac{a_\gamma}{\sqrt{\nu-1}} \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_\gamma = 1,113 & \text{pour } \gamma = 0,10 \\ 1,429 & 0,05 \\ 1,702 & 0,025 \\ 2,021 & 0,01 \end{array} \right.$$

($\gamma = \alpha$ ou β)

d'où

$$\nu \sim \left[\frac{a_\alpha + a_\beta}{\log_{10} k} \right]^2 + 1$$

Pour l'exemple précédent

$$\nu \sim \left[\frac{2,021 + 1,429}{0,47712} \right]^2 + 1 \sim 53$$

Pour $(\nu, \nu) = (53, 53)$, la table F donne

$$k = F_{0,95} \times F_{0,99} = 1,58 \times 1,90 \sim 3$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. R. G. - "Technics of Statistical Analysis". Planning and interpreting experiments for comparing two standard deviations. p. 269-318. Statistical Research Group of Columbia University Mc Graw-Hill 1947.
- [2] DAVIES - Design and Analysis of industrial experiments Hafner 1956.
- [3] FERRIS, GRUBBS et WEAVER - Operating characteristics for the common statistical tests of significance. Annals of Mathematical Statistics, Juin 1946.
- [4] OWEN - Handbook of Statistical tables. Addison-Wasley 1962.
- [5] RESNIKOF et LIEBERMAN - Sampling plans for inspection by variables. Journal of the American Statistical Association 1955, 50. pp. 457-516.
- [6] RESNIKOF et LIEBERMAN - Tables of the non-central t-distribution Oxford University Press 1957.
- [7] HARRIS, HORVITZ et MOOD - On the determination of sample sizes in designing experiments. Journal of the American Statistical Association, 1948, 43 pp. 391-402.
- [8] COCHRAN and COX - Experimental Designs (Ch. 2). John Wiley, 1950.
- [9] VAN EEDEN - Some approximations of the percentage points of non-central t-distribution. Math. Centrum Report n° 8542 - Amsterdam 1959.

- [10] MERRINGTON and E. S. PEARSON - An approximation to the distribution of non-central t. Biometrika, 45 - 1958 pp. 484-591.
- [11] JOHNSON and WELCH - Applications of the non central t-distribution Biometrika, 31 - 1940, pp. 362-389.
- [12] DIXON and MASSEY - Introduction to statistical analysis (p. 424) Mac Graw-Hill, 1957.
- [13] INDJOU DJIAN - Cours de statistique mathématique. Institut de Statistique de l'Université de Paris (ronéo 1957).
- [14] CAVE - Le contrôle statistique des fabrications. Eyrolles, 1961 (voir aussi Revue de Statistique Appliquée 1954 N° 3 et 1966 N° 1).