Revue de statistique appliquée

J. R. Barra

Contrôle statistique d'une suite de digits aléatoires

Revue de statistique appliquée, tome 15, n° 3 (1967), p. 31-42
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1967__15_3_31_0>

CONTROLE STATISTIQUE D'UNE SUITE DE DIGITS ALÉATOIRES

J. R. BARRA

Faculté des Sciences de Grenoble

1 - INTRODUCTION

La reconnaissance de l'aspect "aléatoire" d'une suite de digits binaires est un problème très classique en statistique et susceptible d'applications variées ; ainsi de nombreux tests ont été proposés et étudiés, et si l'objet de cette note est d'en ajouter un à cette longue liste, c'est que ce test possède des propriétés remarquables de "non-additivité" rendant sa simulation très difficile comme on le constatera immédiatement. D'ailleurs l'efficacité de ce test s'est révélée au cours de plusieurs expériences pratiques.

Soit donc une suite $\{X_n\}$ de variables aléatoires de Bernoulli, on se propose de tester l'hypothèse $\mathcal{H}$: "*les variables aléatoires* $\{X_i\}$ *sont indépendantes et de même loi, définie par :*

$$P\{X_i = 1\} = p \qquad P\{X_i = 0\} = q \qquad (p + q = 1) \text{ "}.$$

Dans les problèmes pratiques la famille des contre-hypothèses n'est pas toujours clairement définie et c'est à titre d'illustration de la puissance des tests étudiés que nous considérerons des *alternatives markoviennes stationnaires*.

Soit S_0 (resp S_1), la longueur de la plus longue séquence ininterrompue de 0 (resp 1) dans $\{X_i\}$, on appelera *Test de la plus longue suite* tout test défini par l'intermédiaire de S_0 et de S_1 ; nous nous proposons dans la suite de donner quelques exemples de tels tests, en les accompagnant des tables numériques nécessaires à leur utilisation. On constatera que du point de vue mathématique il ne s'agit que d'une utilisation des résultats de Feller [2] ; néanmoins pour le calcul numérique effectif, on a dû surmonter des difficultés que l'on n'expose pas ici. Quant aux propositions 3 et 4, on peut les démontrer de bien des façons différentes, moyennant des calculs plus ou moins longs, nous avons donné la démonstration qui nous paraît la plus courte.

2 -

Soit $Z(n\ ;\ \alpha,\ s)$ la fonction de l'entier n, définie pour les para-

----

* Communication au Congrès Européen des Statisticiens (Londres 1966).

mètres α, réel, et s, entier, de façon équivalente, par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} Z_{(n+1)} = \alpha Z_n - (\alpha - 1) Z_{n-s} & n = s, \ldots \\ Z_n = \alpha^n \quad n = 0, \ldots, s & ; \quad Z_s = \alpha^s - 1 \end{cases} \tag{R}$$

ou la fonction génératrice :

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z(n \; ; \; \alpha, \; s) t^n = \frac{1 - t^s}{1 - \alpha t + (\alpha - 1) t^{s+1}} \tag{1}$$

Proposition 1 - "*Si l'hypothèse $\mathcal{H}$ est vérifiée, quel que soient les entiers positifs* n *et* s *on a* :

$$\text{Prob}\{S_1 < s\} = p^n \, Z\left(n \; ; \; \frac{1}{p}, \; s\right) \text{''}.$$

Proposition 2 - "*Si l'hypothèse $\mathcal{H}$ est vérifiée et si de plus* $p = q = \frac{1}{2}$, *en désignant par* S *la variable aléatoire* :

$$S = \sup(S_o, S_1)$$

on a quelque soient les entiers positifs n *et* s :

$$\text{Prob}\{S < s\} = 2^{1-n} Z(n - 1 \; ; \; 2, \; s - 1) \text{''}.$$

Ces propositions, que nous retrouverons comme cas particuliers de théorèmes démontrés au § suivant, montrent que le calcul de la fonction $Z(n \; ; \; \alpha, \; s)$ permet la construction de tests de l'hypothèse $\mathcal{H}$, du type :

$$a < S_o < b \quad ; \quad \text{(II)} \; a' < S_1 < b' \quad ; \quad \text{(III)} \; a'' < S < b'' \tag{1}$$

On trouvera ci-après les tables de la fonction $Z(n \; ; \; 2, \; s)$ considérée comme fonction de s, pour les valeurs suivantes de n :

Table 1 - Cette table a été calculée directement à l'aide de (R), et donne l'entier le plus proche de

$$\frac{10^5}{2^n} Z(n \; ; \; 2 \; ; \; s) \quad \text{pour} \quad n = 1, \ldots, 100 \quad \text{en fonction de s}.$$

Table 2 - Cette table a été calculée à l'aide de (1) suivant la méthode donnée dans [2] et donne la fonction de répartition de S_1 pour $\alpha = 2$ et quelques valeurs de n. Le calcul ayant été fait par calculateur ces valeurs ne sont données qu'à titre d'illustration et on dispose en fait de Z *pour tout* n, par activation de l'une ou de l'autre des deux procédures existantes.

On remarquera, et ceci est important pour les applications, la très faible dispersion des lois de probabilités de S_1, S_o ou S : par exemple le test défini pour $n = 10^5$ et $p = q = \frac{1}{2}$ par

$$13 \leqslant S_1 \leqslant 20$$

a pour niveau de signification $25,8 \; 10^{-3}$.

L'étude de la fonction puissance des tests (I), (II) ou (III) n'est pas possible de façon très générale, ainsi nous établirons seulement les résultats suivants ; soit $\mathcal{H}_M$ l'hypothèse définie par : "*les variables aléatoires* $\{X_i\}$ *évoluent en chaîne de Markov stationnaire définie par*

$$\begin{cases} \text{Prob}\{X_{i+1} = 0 \mid X_i = 0\} = q' = 1 - \omega + \varepsilon\omega \\ \text{Prob}\{X_{i+1} = 0 \mid X_i = 1\} = q = (1 - \varepsilon)(1 - \omega) \\ \text{Prob}\{X_{i+1} = 1 \mid X_i = 0\} = p' = \omega(1 - \varepsilon) \qquad\qquad i = 1 \ldots n - 1 \\ \text{Prob}\{X_{i+1} = 1 \mid X_i = 1\} = p = \omega + \varepsilon(1 - \omega) \\ \text{Prob}\{X_i = 1\} = \omega \quad \text{Prob}\{X_i = 0\} = 1 - \omega \end{cases}$$

où les deux paramètres ω et ε représentant respectivement, la loi stationnaire et la dépendance des $\{X_i\}$ sont liés par la condition

$$0 \leqslant \omega \leqslant 1 \quad ; \quad 0 \leqslant 1 - \varepsilon \leqslant \inf\left(\frac{1}{\omega}, \frac{1}{1 - \omega}\right)$$

Soit alors $Z^\varepsilon(n\ ;\ \alpha,\ s)$ la fonction définie, comme au § 2, soit par la relation de récurrence

$$\begin{cases} Z^\varepsilon_{n+1} = \alpha(1 + \varepsilon)\, Z^\varepsilon_n - \varepsilon\alpha^2 Z^\varepsilon_{n-1} - (\alpha - 1)(1 - \varepsilon\alpha)\, Z^\varepsilon_{n-s} \quad n \geqslant s \\ Z^\varepsilon_o = 1 - \dfrac{\varepsilon}{(\alpha - 1)(1 - \varepsilon)}\ ;\ Z^\varepsilon_n = \alpha^n\ n = 1, \ldots, s - 1\ ;\ Z^\varepsilon_s = \alpha^s - \dfrac{1 - \varepsilon\alpha}{1 - \varepsilon} \end{cases} \tag{R_ε}$$

ou la fonction génératrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z^\varepsilon(n\ ;\ \alpha,\ s)\, t^n = \frac{1 - \varepsilon\alpha t - \dfrac{1 - \varepsilon\alpha}{1 - \varepsilon}(1 - \varepsilon t)t^s}{(1 - \alpha t)(1 - \varepsilon\alpha t) + (\alpha - 1)(1 - \varepsilon\alpha)t^{s+1}} - \frac{\varepsilon}{(\alpha - 1)(1 - \varepsilon)} \tag{2}$$

On a alors

<u>Proposition 3</u> - "*Si l'hypothèse* $\mathcal{H}_M$ *est vérifiée, quels que soient les entiers positifs* n *et* s *on a* :

$$\text{Prob}\{S_1 < s\} = p^n Z_n\left(n\ ;\ \frac{1}{p},\ s\right) ".$$

En effet associons à la suite $\{X_n\}$ la suite des variables $\{Y_n\}$ définie par :

$$\begin{cases} Y_n = 1 \Longleftrightarrow X_n = X_{n-1} = \ldots X_{n-s+1} = 1 \qquad \text{et} \qquad n \geqslant s \\ Y_n = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

il vient immédiatement :

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n\ \text{Prob}\{Y_n = 1\} = \frac{t^s}{1 - t}\, \omega\, p^{s-1}$$

Soient alors $\{T_j\}$ la suite ordonnée des solutions de $Y_T = 1$; on désigne par G la fonction génératrice de T_1, par G_o (resp G_1) la fonction génératrice de T_1 conditionnelle à $\{X_1 = 0\}$ (resp$\{X_1 = 1\}$). Il vient alors :

$$\begin{cases} G = \omega G_1 + (1 - \omega) G_0 \\ G_0 = tq'G_0 + tp'G_1 \end{cases} \tag{3}$$

de plus les variables aléatoires T_1, $T_2 - T_1$, ..., $T_{m+1} - T_m$, ... sont indépendantes et pour $m \geq 1$, la fonction génératrice de $T_{m+1} - T_m$ est égale à :

$$pt + qG_0$$

et on peut appliquer "l'équation du renouvellement" qui s'écrit ici :

$$\frac{\omega t^s p^{s-1}}{1 - t} = \frac{G}{1 - pt - qG_0} \tag{4}$$

Cette équation jointe à (3) détermine G :

$$G = \frac{\omega p^{s-1} t^s (1 - \varepsilon t)(1 - pt)}{(1 - t)(1 - \varepsilon t) + \omega q p^{s-1} (1 - \varepsilon) t^{s+1}}$$

on a :

$$\mathrm{Prob}\{S_1 < s\} = \mathrm{Prob}\{T_1 > n\}$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \,\mathrm{Prob}\{S_1 < s\} = \frac{1 - G}{1 - t} = \frac{(1 - \varepsilon t) - \omega p^{s-1} t^s (1 - \varepsilon pt)}{(1 - t)(1 - \varepsilon t) + \omega q p^{s-1}(1 - \varepsilon) t^{s+1}} \tag{5}$$

Soit en changeant $t \longrightarrow \frac{t}{p}$ et en posant $\alpha = \frac{1}{p}$ il vient pour (5)

$$\frac{1 - \varepsilon\alpha t - \omega\alpha(1 - \varepsilon t) t^s}{(1 - \alpha t)(1 - \varepsilon\alpha t) + \omega\alpha(\alpha - 1)(1 - \varepsilon) t^{s+1}}$$

Ce qui donne bien (2) puisque $\omega\varepsilon(1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon\alpha$; la présence du terme constant $-\frac{\varepsilon}{(\alpha - 1)(1 - \varepsilon)}$ correspond à ce que $\mathrm{Prob}\{T_1 > 0\} = 1$, alors que Z_0^ε est déterminé formellement par (R_ε), puisque n'a pas de sens pour S_1.

Proposition 4 - "*Si l'hypothèse $\mathcal{H}_M$ est vérifiée et si de plus $\omega = \frac{1}{2}$, quels que soient les entiers positifs* n *et* s *on a* :

$$\mathrm{Prob}\{S < s\} = \left(\frac{1 + \varepsilon}{2}\right)^{n-1} Z\left(n - 1\,,\ \frac{2}{1 + \varepsilon}\,,\ s - 1\right) ".$$

En effet associons ici à la suite $\{X_n\}$ la suite des variables $\{U_n\}$ définies par :

$$\begin{cases} U_n = 1 \Leftrightarrow X_n = X_{n-1} = \dots = X_{n-s+1} \quad \text{et} \quad n \geq s \\ U_n = 0 \quad \text{Sinon} \end{cases}$$

il vient immédiatement :

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \text{ Prob } \{U_n = 1\} = \frac{t^s\, 2^{-s+1}}{1-t} (1 + \varepsilon)^{s-1}$$

Soit alors V_j la suite des solutions de $U_v = 1$, et H la fonction génératrice de V_1. Les variables aléatoires V_1, $V_2 - V_1$, ..., $V_{m+1} - V_m$ sont indépendantes $\left(\text{symétrie de l'hypothèse } \mathcal{H}_M \text{ quand } \omega = \frac{1}{2}\right)$ et la fonction génératrice de $V_{m+1} - V_m$ pour $m > 1$ est égale à :

$$\frac{1 - \varepsilon}{2} t + \frac{1 - \varepsilon}{2} H .$$

L'équation du renouvellement donne enfin :

$$\frac{t^s\, 2^{-s+1}}{1-t} (1 + s)^{s-1} = \frac{H}{1 - \frac{1+\varepsilon}{2} t - \frac{1 - \varepsilon}{2} H}$$

soit

$$H^* = \frac{1 - H}{1 - t} = \frac{1 - \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^s t^s}{1 - t + \frac{(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon)^{s-1}}{2^s} t^s}$$

et en posant $\alpha = \frac{2}{1 + \varepsilon}$, il vient

$$H^* = 1 + \alpha t \frac{1 - t^{s-1}}{1 - \alpha t - (\alpha - 1) t^s}$$

Les propositions (3) et (4) impliquent les propositions (1) et (2) et permettent de calculer la puissance des tests (I), (II) ou (III) sous l'hypothèse $\mathcal{H}_M$. Ainsi le test (I) ou (II), considéré comme test de fréquence, et le test (III) considéré comme test d'indépendance, ont une fonction puissance de la forme

$$\beta(\alpha) = \frac{Z(n\ ;\ \alpha,\ a) - Z(n\ ;\ \alpha,\ b)}{\alpha^n}$$

On trouvera ainsi dans la table III la fonction $10^3\ \beta$ calculée pour

$$n = 99 \quad a = 12 \quad b = 4$$

De même grâce à la proposition (3) on peut investir complètement la fonction puissance d'un test (I) ou (II) sous l'hypothèse $\mathcal{H}_M$: ainsi a-t-on pu montrer numériquement que le test défini pour

$$n = 10^5 \text{ par}$$

$$13 \leqslant S_1 \leqslant 20$$

et qui d'ailleurs est de niveau de signification $25,8\ 10^{-3}$ est uniformément moins puissant que le test classique de même niveau de signification défini à l'aide des deux premières fréquences.

Remarque - Les calculs précédents se généralisent au cas de variables discrètes finies sans d'autres difficultés qu'un alourdissement des calculs.

4 - CONCLUSION

S'il est probable que les tests de fréquences sont plus puissants que les tests de plus longue suite sous l'hypothèse $\mathcal{H}_M$ on ne doit pas cependant en conclure que ces tests sont moins intéressants car :

a) le champ des contre-hypothèses considéré est très restreint et très favorable au test de fréquences.

b) les tests de plus longue suite sont d'emploi très simple et surtout sont *très difficiles à simuler*.

A titre de remarque nous noterons l'expérience suivante faite sur les nombres π et e, écrits en représentation binaire et partagés en suites consécutives de $n = 10^4$ bits, on a observé pour valeurs successives de S_1 ; pour π :

$$11, 11, 10, 12, 11$$

et pour e ·

$$11, 10, 10, 18, 13, 13, 14, 11, 10, 12.$$

Ces valeurs semblent systématiquement faibles, en effet, la table II pour N = 10 000 montre que 13 est approximativement une médiane de la loi de S_1, et donc le test de la plus longue suite ne semble pas satisfait par e et π alors que les tests usuels le sont [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] CRAMER - "Sur quelques points du calcul des probabilités", Proc. London Math. Soc. 23 (1925) p. LVIII.

[2] FELLER - "An introduction to Probability theory and its applications" John Wiley 1964, pp. 302.

[3] ESMENJAUD BONNARDEL - "Etude statistique des décimales de π" R.F.T.I. Chiffres Vol. 8, n° 4, 1965.

Table I

S \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	75000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000
3	62500	87500	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000
4	50000	81250	93750	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000
5	40625	75000	90625	96875	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000
6	32812	68750	87500	95312	98437	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000
7	26562	63281	84375	93750	97656	99218	100000	100000	100000	100000	100000	100000
8	21484	58203	81250	92187	96875	98828	99609	100000	100000	100000	100000	100000
9	17382	53515	78320	90625	96093	98437	99414	99804	100000	100000	100000	100000
10	14062	49218	75488	89062	95312	98046	99218	99707	99902	100000	100000	100000
11	11376	45263	72753	87548	94531	97656	99023	99609	99853	99951	100000	100000
12	9204	41625	70117	86059	93750	97265	98828	99511	99804	99926	99975	100000
13	7446	38281	67578	84594	92980	96875	98632	99414	99755	99902	99963	99987
14	6024	35205	65130	83154	92218	96484	98437	99316	99707	99877	99951	99981
15	4873	32376	62771	81738	91461	96096	98242	99218	99658	99853	99938	99975
16	3942	29774	60498	80346	90710	95710	98046	99121	99609	99829	99926	99969
17	3189	27381	58306	78978	89965	95326	97852	99023	99560	99804	99914	99963
18	2580	25181	56195	77634	89227	94943	97658	98925	99511	99780	99902	99957
19	2087	23158	54159	76312	88494	94561	97464	98828	99462	99755	99890	99951
20	1689	21297	52198	75012	87768	94181	97270	98730	99414	99731	99877	99945
21	1366	19585	50307	73735	87048	93803	97077	98633	99365	99707	99865	99938
22	1105	18011	48485	72480	86333	93426	96885	98536	99316	99682	99853	99932
23	894	16564	46729	71246	85624	93051	96693	98439	99267	99658	99841	99926
24	723	15233	45036	70033	84921	92677	96501	98342	99219	99633	99829	99920
25	585	14009	43405	68840	84224	92304	96309	98245	99170	99609	99816	99914
26	473	12883	41833	67668	83533	91934	96118	98148	99121	99585	99804	99908
27	383	11848	40318	66516	82847	91564	95927	98052	99073	99560	99792	99902
28	309	10896	38858	65384	82167	91196	95737	97955	99024	99536	99780	99896
29	250	10020	37450	64271	81493	90830	95547	97858	98975	99511	99768	99890

Table I (suite)

S / n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
30	202	9215	36094	63176	80824	90465	95357	97762	98927	99487	99755	99884
31	164	8474	34786	62101	80160	90101	95168	97666	98878	99463	99743	99877
32	132	7793	33527	61043	79502	89739	94979	97569	98830	99438	99731	99871
33	107	7167	32312	60004	78850	89379	94791	97473	98781	99414	99719	99865
34	86	6591	31142	58982	78202	89020	94603	97377	98733	99390	99707	99859
35	70	6061	30014	57978	77561	88662	94415	97281	98684	99365	99694	99853
36	56	5574	28927	56991	76924	88306	94228	97185	98636	99341	99682	99847
37	46	5126	27879	56021	76292	87951	94041	97090	98588	99317	99670	99841
38	37	4714	26869	55067	75666	87598	93854	96994	98539	99292	99658	99835
39	30	4336	25896	54129	75045	87246	93668	96898	98491	99268	99646	99829
40	24	3987	24958	53208	74429	86895	93482	96803	98442	99244	99634	99823
41	19	3667	24054	52302	73818	86546	93296	96708	98394	99219	99621	99816
42	15	3372	23183	51411	73212	86198	93111	96612	98346	99195	99609	99810
43	12	3101	22343	50536	72611	85852	92926	96517	98298	99171	99597	99804
44	10	2852	21534	49675	72015	85507	92742	96422	98249	99147	99585	99798
45	8	2623	20754	48830	71424	85163	92558	96327	98201	99122	99573	99792
46	6	2412	20002	47998	70838	84821	92374	96232	98153	99098	99560	99786
47	5	2218	19278	47181	70256	84480	92191	96137	98105	99074	99548	99780
48	4	2040	18580	46378	69680	84141	92008	96043	98057	99050	99536	99774
49	3	1876	17907	45588	69108	83803	91826	95948	98009	99025	99524	99768
50	2	1725	17258	44812	68540	83466	91643	95853	97961	99001	99512	99762
51	2	1586	16633	44049	67978	83131	91461	95759	97912	98977	99500	99755
52	1	1459	16031	43299	67420	82797	91280	95665	97864	98953	99487	99749
53	1	1342	15450	42562	66866	82464	91099	95570	97816	98928	99475	99743
54	1	1234	14890	41837	66317	82133	90918	95476	97768	98904	99463	99737
55	1	1135	14351	41125	65773	81803	90738	95382	97720	98880	99451	99731
56	0	1043	13831	40425	65233	81474	90558	95288	97672	98856	99439	99725
57	0	959	13330	39736	64698	81147	90378	95194	97625	98832	99427	99719
58	0	882	12847	39060	64166	80821	90198	95101	97577	98807	99414	99713

Table I (suite)

S / n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
59	0	811	12382	38395	63640	80496	90019	95007	97529	98783	99402	99707
60	0	746	11934	37741	63117	80173	89841	94912	97481	98759	99390	99701
61	0	686	11501	37098	62599	79850	89663	94820	97433	98735	99378	99695
62	0	631	11085	36467	62085	79530	89485	94726	97385	98711	99366	99688
63	0	580	10683	35846	61576	79210	89307	94633	97337	98687	99354	99682
64	0	534	10296	35236	61070	78892	89130	94540	97290	98662	99342	99676
65	0	491	9923	34636	60569	78575	88953	94447	97242	98638	99329	99670
66	0	451	9564	34046	60072	78259	88776	94354	97194	98614	99317	99664
67	0	415	9218	33466	59579	77945	88600	94261	97147	98590	99305	99658
68	0	381	8884	32897	59090	77631	88424	94168	97099	98566	99293	99652
69	0	351	8562	32336	58605	77320	88249	94075	97051	98542	99281	99646
70	0	323	8252	31786	58124	77009	88074	93982	97004	98518	99269	99640
71	0	297	7953	31245	57646	76699	87899	93890	96956	98493	99257	99634
72	0	273	7665	30713	57173	76391	87725	93797	96908	98469	99244	99628
73	0	251	7387	30190	56704	76084	87551	93705	96861	98445	99232	99622
74	0	231	7120	29676	56238	75779	87377	93612	96813	98421	99220	99615
75	0	212	6862	29170	55777	75474	87203	93520	96766	98397	99208	99609
76	0	195	6613	28674	55319	75171	87030	93428	96718	98373	99196	99603
77	0	179	6374	28186	54865	74869	86858	93336	96671	98349	99184	99597
78	0	165	6143	27706	54415	74568	86685	93244	96623	98325	99172	99591
79	0	152	5920	27234	53968	74268	86513	93152	96576	98301	99160	99585
80	0	139	5706	26770	53525	73970	86342	93060	96529	98277	99147	99579
81	0	128	5499	26315	53085	73673	86170	92969	96481	98253	99135	99573
82	0	118	5300	25866	52650	73377	85999	92877	96434	98229	99123	99567
83	0	108	5108	25426	52218	73082	85829	92786	96387	98204	99111	99561
84	0	99	4923	24993	51789	72788	85658	92694	96339	98180	99099	99555
85	0	91	4745	24568	51364	72496	85488	92603	96292	98156	99087	99549
86	0	84	4573	24149	50942	72205	85319	92512	96245	98132	99075	99542
87	0	77	4407	23738	50524	71915	85149	92420	96198	98108	99063	99536

Table I (suite)

S / n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
88	0	71	4247	23334	50109	71626	84980	92329	96150	98084	99051	99530
89	0	65	4094	22937	49698	71338	84812	92238	96103	98060	99038	99524
90	0	60	3945	22546	49290	71051	84643	92147	96056	98036	99026	99518
91	0	55	3802	22162	48885	70766	84475	92057	96009	98012	99014	99512
92	0	51	3665	21785	48484	70481	84308	91966	95962	97988	99002	99506
93	0	47	3532	21414	48086	70198	84141	91875	95915	97964	98990	99500
94	0	43	3404	21049	47691	69916	83974	91785	95868	97940	98978	99494
95	0	39	3281	20691	47300	69635	83807	91694	95821	97916	98966	99488
96	0	36	3162	20339	46912	69355	83641	91604	95774	97892	98954	99482
97	0	33	3047	19992	46527	69077	83475	91514	95727	97868	98942	99476
98	0	30	2937	19652	46145	68799	83309	91424	95680	97844	98930	99469
99	0	28	2831	19317	45766	68523	83144	91334	95633	97821	98917	99463
100	0	26	2728	18989	45390	68247	82979	91244	95586	97797	98905	99457

Table II

N = 10000		N = 20000		N = 30000		N = 40000	
10	0.00741081	11	0.00748595	12	0.02556354	12	0.00752719
11	0.08662756	12	0.08681780	13	0.16011101	13	0.08692048
12	0.29484697	13	0.29493092	14	0.40029652	14	0.29497482
13	0.54327460	14	0.54322367	15	0.63276146	15	0.54319499
14	0.73718340	15	0.73709638	16	0.79548994	16	0.73704899
15	0.85863491	16	0.85856471	17	0.89191206	17	0.85852684
16	0.92664070	17	0.92659552	18	0.94441452	18	0.92657129
17	0.96262769	18	0.96260134	19	0.97181133	19	0.96258729
18	0.98113840	19	0.98112375	20	0.98580551	20	0.98111597
19	0.99052541	20	0.99051747	21	0.99287767	21	0.99051326
20	0.99525195	21	0.99524771	22	0.99643259	22	0.99524546
21	0.99762340	22	0.99762116	23	0.99821477	23	0.99761996
22	0.99881112	23	0.99880993	24	0.99910701	24	0.99880930

N = 50000		N = 60000		N = 70000		N = 80000	
12	0.00221638	13	0.02561674	13	0.01390672	13	0.00754963
13	0.04718707	14	0.16017370	14	0.11803053	14	0.08697561
14	0.21736423	15	0.40030151	15	0.34363941	15	0.29499775
15	0.46630653	16	0.63273183	16	0.58624797	16	0.54317904
16	0.68290143	17	0.79545856	17	0.76568371	17	0.73702336
17	0.82639127	18	0.89188985	18	0.87503901	18	0.85850653
18	0.90906520	19	0.94440103	19	0.93543717	19	0.92655838
19	0.95345080	20	0.97180370	20	0.96718076	20	0.96257982
20	0.97644874	21	0.98580134	21	0.98345380	21	0.98111185
21	0.98815450	22	0.99287543	22	0.99169254	22	0.99051104
22	0.99405974	23	0.99643142	23	0.99583767	23	0.99524429
23	0.99702551	24	0.99821415	24	0.99791669	24	0.99761934
24	0.99851168	25	0.99910668	25	0.99895782	25	0.99880897

N = 90000		N = 100000		N = 110000		N = 120000	
13	0.00409852	13	0.00222499	13	0.00120789	14	0.02564543
14	0.06409153	14	0.04722846	14	0.03480221	15	0.16020706
15	0.25324125	15	0.21739531	15	0.18662332	16	0.40030375
16	0.50327420	16	0.46630099	16	0.43204401	17	0.63271572
17	0.70943578	17	0.68288086	17	0.65731990	18	0.79544171
18	0.84228642	18	0.82637274	18	0.81075974	19	0.89187799
19	0.91776386	19	0.90905282	19	0.90042447	20	0.94439387
20	0.95800075	20	0.95344349	20	0.94890789	21	0.97179965
21	0.97877547	21	0.97644465	21	0.97411939	22	0.98579916
22	0.98933096	22	0.98815230	22	0.98697502	23	0.99287425
23	0.99465125	23	0.99405856	23	0.99346623	24	0.99643079
24	0.99732208	24	0.99702489	24	0.99672780	25	0.99821382
25	0.99866015	25	0.99851135	25	0.99836258	26	0.99910650

Table II (suite)

N = 130000		N = 140000		N = 150000		N = 160000	
14	0.01889788	14	0.01392568	14	0.01026170	14	0.00756175
15	0.13752999	15	0.11806281	15	0.10135120	15	0.08700508
16	0.37089530	16	0.34364734	16	0.31840116	16	0.29500971
17	0.60903250	17	0.58623576	17	0.56429234	17	0.54317027
18	0.78041311	18	0.76566844	18	0.75120235	18	0.73700956
19	0.88341265	19	0.87502767	19	0.86672226	19	0.85849568
20	0.93990132	20	0.93543015	20	0.93098025	20	0.92655151
21	0.96948546	21	0.96717677	21	0.96487357	21	0.96257587
22	0.98462468	22	0.98345162	22	0.98227994	22	0.98110967
23	0.99228263	23	0.99169137	23	0.99110045	23	0.99050988
24	0.99613387	24	0.99583706	24	0.99554031	24	0.99524366
25	0.99806508	25	0.99791636	25	0.99776768	25	0.99761901
26	0.99903207	26	0.99895764	26	0.99888321	26	0.99880879

Table III

α	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,
,00		39	438	751	883	940	966
,05		47	460	761	888	942	967
,15		69	502	779	895	945	969
,25	786	100	540	796	902	948	970
,35	505	138	577	811	909	951	972
,45	287	181	610	825	914	954	973
,55	156	227	641	838	920	957	975
,65	85	275	669	850	925	959	976
,75	49	323	695	860	930	961	977
,85	34	370	719	870	934	963	978
,95	34	416	741	879	938	965	979