REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

P. THIONET

L. STAVRIDIS

Quelques variantes de la méthode des moindres carrés

Revue de statistique appliquée, tome 12, n° 4 (1964), p. 81-95

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1964__12_4_81_0>

QUELQUES VARIANTES DE LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRES

P. THIONET

Faculté des Sciences de Poitiers et

L. STAVRIDIS

Service des Etudes Economiques et Financières, PARIS

1ère PARTIE

INTRODUCTION

Le problème suivant s'est posé récemment au Service des Etudes Economiques et Financières (division des Opérations Financières) :

Comment extrapoler (à quelques années de distance) une série (assez longue) représentant les variations annuelles des disponibilités monétaires. Contrairement à ce qui arrive souvent, ces données annuelles sont très imprécises alors que leur total sur plusieurs années est assez bien connu. Sans doute est-il en général conseillé d'ajouter des valeurs réelles et non pas nominales quand on mesure un flux économique sur une période de plusieurs années ; mais il se trouve qu'ici l'addition des disponibilités en valeur nominale conserve un sens.

Dès lors on s'est trouvé conduit à ajuster sur la série statistique passée une série régulièrement croissante telle que les totaux des deux séries soient identiques sur la période passée. Après quoi la formule d'ajustement fut utilisée pour une projection à court et moyen terme.

Sans chercher le moins du monde à justifier cette technique d'extrapolation, la présente note étudie le problème d'ajustement par les moindres carrés avec conservation du total, problème qui ne semble pas classique et paraît susceptible de solutions variées comme on va le voir.

Enoncé du problème :

Etant donné une série statistique chronologique de termes positifs :

$$x_0 \; x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n$$

lui substituer une certaine fonction du temps t :

$$y(0), \; y(1), \; y(2), \; \ldots, \; y(n)$$

qui en diffère le moins possible (au sens des moindres carrés) et qui vérifie en outre la condition :

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = y(0) + y(1) + \ldots + y(n)$$

6

c'est-à-dire *conserve le total* de la série sur la période (o, n) tout en redistribuant ce total de façon régulière sur les n + 1 courtes périodes consécutives envisagées.

On notera que si la fonction y(t) est *linéaire*, la méthode classique des moindres carrés possède justement la propriété de conserver le total : Quand on rend minimum :

$$\sum (x_t - a - bt)^2,$$

la condition :

$$\sum x_t = \sum (a + bt)$$

n'est autre que :

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum (x_t - a - bt)^2 = 0$$

Mais quand on a affaire à des statistiques économiques, il est bien connu que l'hypothèse de croissance linéaire est rarement justifiée. Beaucoup plus souvent est formulée une hypothèse de tendance à croissance exponentielle.

Premier problème :

Dans ce cadre, un *premier* problème consistait à chercher les 2 paramètres (a, b) d'une progression géométrique :

$$a \quad ab \quad ab^2 \quad \ldots \quad a\,b^n \qquad \text{(a, b positifs)}$$

ajustant au mieux la série, tout en vérifiant la condition :

$$\begin{aligned} \sum_o^n x &= \sum_o^n a\,b^t \\ &= a \sum_o^n b \\ &= a\,\frac{b^m - 1}{b - 1} \quad (\text{avec } m = n + 1) \end{aligned}$$

La somme d'écarts carrés à rendre minimum est :

$$z = \sum_o^n (ab^t - x_t)^2$$

Deuxième problème :

Un problème assez différent s'est posé quand, substituant aux x_t leurs logarithmes(*) X_t, on s'est proposé de trouver les paramètres A et B tels que :

$$A, \; A + B, \; A + 2B, \; \ldots \; A + nB$$

ajustent au mieux la série des X_t. La fonction à rendre minimum est alors :

(*) Nous pourrons prendre les logarithmes et exponentielles *de base 10* pour simplifier.

$$Z = \sum_{o}^{n} (A + tB - \log x_t)^2$$

et la condition supplémentaire (liant ce minimum) est :

$$\sum_{o}^{n} x_t = \exp A \frac{\exp m B - 1}{\exp B - 1}, \text{ avec } m = n + 1$$

Troisième problème :

Le second problème une fois mis en équations, on s'est aperçu qu'il était beaucoup plus simple (et peut-être aussi satisfaisant au fond) de scinder les difficultés comme suit :

1/ En ajustant sur les X_t la droite $Y_1 = A_o + t B_o$ des moindres carrés (classiques).

2/ En lui cherchant ensuite une parallèle $Y_2 = A_o + t B_o + \delta$, telle que .

$$\sum_{o}^{n} x_t = \sum_{o}^{n} y_t$$

ou

$$\sum_{o}^{n} x_t = \exp A_o \left(\sum_{o}^{n} \exp B_o t\right) \exp \delta$$

$$= \exp A_o \frac{\exp m B_o - 1}{\exp B_o - 1} \exp \delta$$

d'où :

$$\delta = \log \left(\sum_t x_t\right) - \log(\exp m B_o - 1) + \log (\exp B_o - 1) - A_o$$

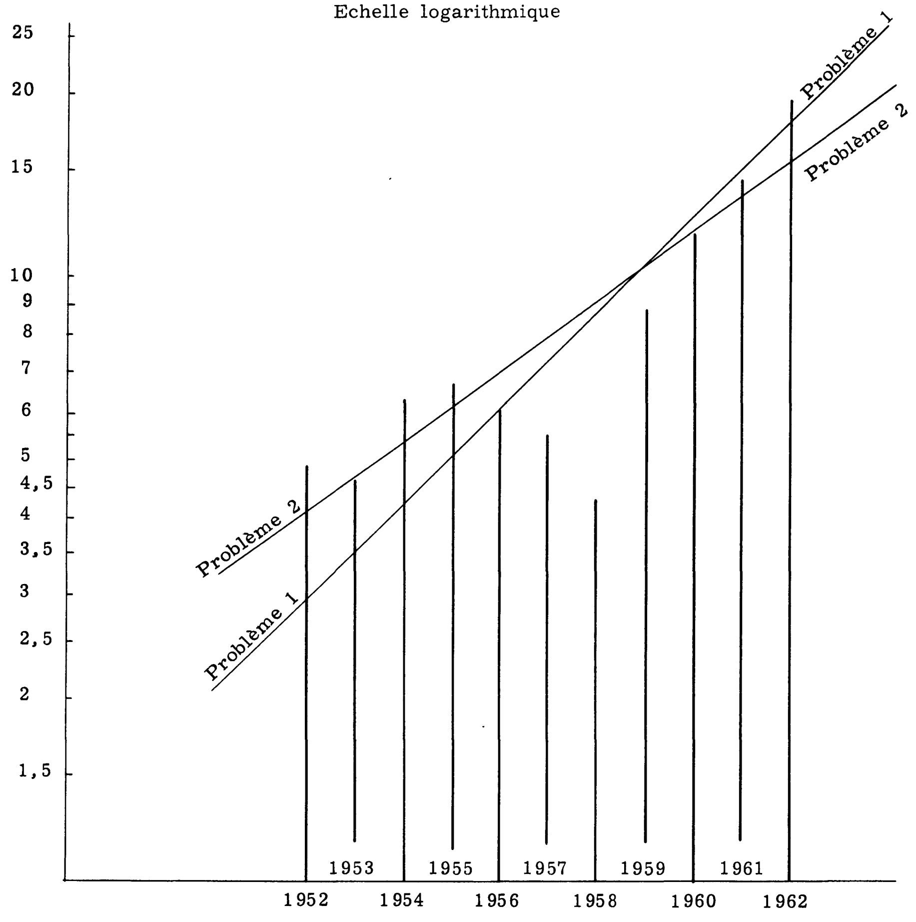
Les résultats des 2ème et 3ème problèmes (A, B) $(A_o + \delta, B_o)$ peuvent être assez voisins. Mais le 3ème problème ne présente aucune difficulté et il n'en sera plus question ici.

Les résultats du 1er et du 2ème problèmes, c'est-à-dire (a, b) et $(\exp A, \exp B)$ peuvent être assez différents. On accordera *plus de portée pratique* aux seconds qu'aux premiers dans le cas d'une série x_t notablement croissante, plus particulièrement s'il s'agit d'une grandeur financière exprimée en monnaie courante, pour un pays dont la monnaie se déprécie un peu vite.

En effet, la méthode des moindres carrés trouve une justification particulière quand on juge possible d'expliquer les données x_t comme la somme de la composante y_t et d'une erreur aléatoire $(x_t - y_t)$ nulle en moyenne et dont l'erreur-type ne dépend pas de t ; cette hypothèse paraît peu réaliste si les x_t augmentent vite avec t. Dans le second problème, c'est à $X_t - Y_t = \log (x_t/y_t)$ que l'hypothèse s'applique et rien ne s'oppose à ce que x_t et y_t augmentent ensemble rapidement, tandis que leur rapport conserve le même écart-type.

Les problèmes numérotés 1 et 2 présentent quelques difficultés d'ordre mathématique qui nous accuperont jusqu'à la fin de cette note. Mais, pour mieux faire comprendre la portée pratique de leur étude nous donnerons tout de suite les résultats numériques concernant le problème financier à l'origine de ces calculs, à savoir variation des disponibilités monétaires en France de 1952 à 1962.

Variation des disponibilités monétaires
Milliards de Francs
Echelle logarithmique



France (source : Conseil National du Crédit)

On constate que (sur ce cas précis d'ajustement et sans préjuger que ces observations aient une portée générale), la solution du problème 1 fournit l'ajustement le meilleur, tant du point de vue des écarts absolus que des écarts carrés (voir les deux dernières lignes du tableau) ; la solution du problème 3 n'est pas sensiblement pire que celle du problème 2 (alors qu'elle n'exige qu'un minimum de calculs) ; les résultats des différentes méthodes divergent notablement parce que la série des données ne présente pas une croissance régulière.

Bien que 66,45 soit supérieur à 60,72, on aurait bien entendu une somme $\sum(\log y_t - \log x_t)^2$ inférieure avec les moindres carrés classiques sur $\log x_t$ à celle qu'on obtiendrait au problème 3 (moindres carrés liés).

VARIATIONS ANNUELLES DES DISPONIBILITES MONETAIRES x_t ET AJUSTEMENTS CORRESPONDANTS y_t (par diverses méthodes)

Année	x_t	t	Moindres carrés classiques sur x_t	Moindres carrés classiques sur log x_t	Moindres carrés à total conservé Probl. 1	Moindres carrés à total conservé Probl. 2	Moindres carrés à total conservé Probl. 3
1952	4,88	0	2,38	4,01	2,94	4,08	4,22
1953	4,65	1	3,62	4,55	3,52	4,65	4,78
1954	6,33	2	4,85	5,16	4,23	5,30	5,42
1955	6,64	3	6,08	5,84	5,07	6,04	6,15
1956	6,10	4	7,31	6,63	6,08	6,89	6,97
1957	5,46	5	8,54	7,52	7,28	7,85	7,91
1958	4,32	6	9,78	8,52	8,73	8,95	8,96
1959	8,96	7	11,01	9,66	10,47	10,21	10,16
1960	11,87	8	12,24	10,96	12,56	11,64	11,52
1961	14,84	9	13,47	12,42	15,06	13,26	13,07
1962	19,94	10	14,71	14,08	18,05	15,12	14,82
$\sum x_t$ ou $\sum y_t$	93,99		93,99	89,35	93,99	93,99	93,99
$\sum \lvert y_t - x_t \rvert$			24,34	19,62	17,30	18,12	18,59
$\sum (y_t - x_t)^2$			84,15	66,45	41,05	59,57	60,72

(Source : Conseil National du Crédit ; données corrigées pour éliminer l'influence de la Sarre) - données provisoires pour 1962 - (toutes données en milliards de francs 1964).

2ème PARTIE

I - SOLUTION GENERALE

Dans tous les cas, l'expression à rendre minimum est de la forme :

$$Z = \sum_{0}^{n} [Y(t) - X_t]^2 \tag{1}$$

où Y(t) dépend de paramètres A, B, C...

La condition imposée est :

$$U = \sum_{0}^{n} y(t) - \sum_{0}^{n} x_t = 0 \tag{2}$$

avec : $y = \varphi(\gamma), \; x = \varphi(X)$

φ étant une certaine transformation.

Le minimum lié s'exprime par la proportionnalité des dérivées partielles de Z et U en A, B, C...

$$\frac{\sum_{0}^{n} Y'_A(t)\,[Y(t) - X_t]}{\sum_{0}^{n} Y'_A(t)\ \varphi'[Y(t)]} = \frac{\sum_{0}^{n} Y'_B(t)\,[Y(t) - X_t]}{\sum_{0}^{n} Y'_B(t)\ \varphi'[Y(t)]} = \ldots \qquad (3)$$

Il convient enfin de calculer A B C... satisfaisant aux conditions (2) et (3). Il y a autant d'équations que d'inconnues ; mais ceci ne permet d'affirmer ni l'existence ni l'unicité de la solution. Les difficultés pratiques de calcul sont en outre assez grandes.

Nous étudierons spécialement le premier Problème, nous bornant pour le second à quelques indications sommaires.

II - APPLICATION AU PROBLEME 1

On a :

$$x = \varphi(X) = X$$

$$y = \varphi(Y) = Y$$

d'où :

$$Z(a, b) = \sum_{0}^{n} (a\, b^t - x_t)^2 \qquad (1)$$

$$a \sum_{0}^{n} b^t = \sum_{0}^{n} x_t \qquad (2)$$

$$\frac{\sum_{0}^{n} b^t (a\, b^t - x_t)}{\sum_{0}^{n} b^t} = \frac{\sum_{0}^{n} t\ b^t (a\, b^t - x_t)}{\sum_{0}^{n} t\ b^t} \qquad (3)$$

avec :

$$\sum_{0}^{n} b^t = (b^{n+1} - 1)/(b-1)$$

$$\sum_{0}^{n} t\ b^{t-1} = [n\ b^{n+1} - (n+1)\ b^n + 1]/(b-1)^t$$

En tirant a de (2) pour le porter dans (3), on obtient une équation en b, d'aspect assez difficile.

Posons :

$$\sum_{0}^{n} x_t = c, \qquad \sum_{0}^{n} b^t = S(b) \qquad \sum_{0}^{n} (b^2)^t = S(b^2)$$

$$\sum_{0}^{n} t\ b^t = T(b) \qquad \sum_{0}^{n} t\ b^{2t} = T(b^2)$$

avec :

$$\sum_{0}^{n} t\ b^{t-1} = d\ S(b)/db \qquad \sum_{0}^{n} (2tb^{2t-1}) = d\ S(b^2)/db$$

l'équation (2) s'écrit :

$$S(b) = \frac{c}{a}$$

et l'équation (3) :

$$a \left[\frac{T(b^2)}{T(b)} - \frac{S(b^2)}{S(b)}\right] = \frac{\sum t\ b^t\ x_t}{T(b)} - \frac{\sum b^t\ x_t}{S(b)}$$

En éliminant a, il vient :

$$c\left[\frac{T(b^2)}{T(b)} - \frac{S(b^2)}{S(b)}\right] = \frac{S(b)}{T(b)}\sum t\ b^t\ x_t - \sum b^t\ x_t \qquad (4)$$

Pour introduire dans les deux membres de (4) différentes valeurs de b, on peut faire usage des Tables numériques établies pour les besoins des actuaires, en vue des calculs d'amortissement ; ces tables donnent S(b) et aussi $S'(b) = T(b)/b$ pour un ensemble de valeurs de b. Entre 2 valeurs consécutives on devra interpoler, ce qui réduit un peu la précision des calculs.

Remarque : En l'absence de la contrainte : $\sum x_t = a \sum b^t$, on obtiendrait le minimum de $\sum(a\ b^t - x_t)^2 = Z(a, b)$ en annulant les deux membres de (3). Le paramètre s'élimine et il reste une équation en b :

$$\frac{S(b^2)}{T(b^2)}\sum t\ b^t\ x_t - \sum b^t\ x_t = 0 \qquad (5)$$

Cette méthode ne conservant pas le total et exigeant la résolution d'une équation (5) par itération, n'a pas fait l'objet d'une application numérique.

III - PREMIERE TENTATIVE DE RESOLUTION PAR ITERATION

Le système (2) (3) est certainement d'un maniement plus aisé que sa résolvante (4). Tant pour obtenir des solutions numériques de ces équations que pour rechercher leur existence (et leur éventuelle unicité), il paraît très naturel de procéder comme suit :

Partant d'une valeur initiale a_0 de a, l'équation (2) est facilement résolue en b, donnant une valeur b_0, qu'en porte dans (3). L'équation (3) donne assez facilement la valeur a_1 de a. En substituant a_1 dans (2) on peut en tirer b_1 (au lieu de b_0) et, de proche en proche, espérer que :

$$\left.\begin{array}{l}\text{la suite } a_0,\ a_1,\ a_2\ \ldots \text{ convergera vers } a \\ \text{et la suite } b_0,\ b_1,\ b_2\ \ldots \text{ convergera vers } b\end{array}\right\}\ \text{solution du système (2) (3)}$$

Un calculateur expérimenté peut, *par tâtonnements* trouver une valeur a_0 telle que a_1 ainsi calculé ne diffère pratiquement pas de a_0. Mais, en revanche on va établir que les itérations ne peuvent aboutir, c'est-à-dire que ni la suite des a_i ni la suite des b_i ne convergent.

Etude détaillée du cas n = 2 :

On a : $S(b) = 1 + b + b^2$, $\qquad T(b) = b + 2\ b^2$

$S(b^2) = 1 + t^2 + t^4$, $\qquad T(b^2) = b^2 + 2\ b^4$

Premier membre de (4) :

Posons :

$$\frac{T(b^2)}{T(b)} - \frac{S(b^2)}{S(b)} = \varphi(b)$$

Il vient :

$$\varphi(b) = \frac{(1 + 2\, b^2)\, b^2}{(1 + 2\, b)\, b} - \frac{(1 + b^2 + b^4)}{1 + b + b^2}$$

$$= \frac{(b^4 + b^3 - b - 1)}{S(b)\; S'(b)}$$

Second membre de (4) :

On a :

$$S(b) \sum t\, b^t\, x_t - T(b) \sum b^t\, x_t$$

$$= b(1 + b + b^2)\,(x_1 + 2b\, x_2) - b(1 + 2b)\,(x_o + bx_1 + b^2 x_2)$$

$$= b\,[x_1 - x_o + 2b(x_2 - x_o) + b^2 (x_2 - x_1)]$$

Alors, l'équation (4) s'écrit :

$$(x_o + x_1 + x_2)\,(b^4 + b^3 - b - 1) = (1 + b + b^2)\,[(x_1 - x_o) + 2b(x_2 - x_o) + b^2(x_2 - x_1)]$$

Hypothèse sur la distribution x_t :

Supposons $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2$ c'est-à-dire les x_t croissants (ce qui est une hypothèse naturelle quand n est petit mais peu réaliste quand n est de l'ordre de 10 ans et plus). Alors, on constate aisément que le 2ème membre est fonction croissante de b.

D'autre part, on peut se limiter au cas de $b \geq 1$ (en changeant le sens du temps si l'on a affaire à une série décroissante). Alors le 1er membre est aussi *croissant* avec b.

Les 2 membres sont des polynômes du 4ème degré dont chacun croît comme son premier terme quand b est assez grand ; or, on a :

$$(x_o + x_1 + x_2)\, b^4 > (x_2 - x_1)\, b^4$$

de sorte que le 1er membre croîtra plus vite que le second.

Pour $b = 1$, le 1er membre est nul, et le second égal à $3(x_2 - x_o) > 0$.

Donc, si b croît à partir de 1, le premier membre finira par dépasser le 2ème et *l'existence* d'une racine $\hat{b} > 1$ ne fait aucun doute (son unicité est moins évidente).

En revanche :

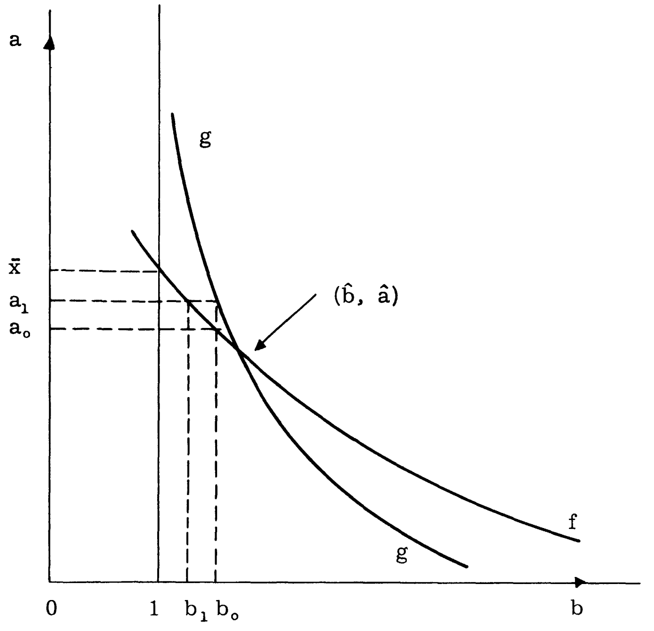
(2) s'écrit : $a = c/(1 + b + b^2) = f(t)$

et (3) s'écrit :

$$a = \frac{(x_1 - x_o) + 2b(x_2 - x_o) + b^2 (x_2 - x_1)}{b^4 + b^3 - b - 1} = g(t)$$

Quand t croît à partir de 1, les fonctions f(t) et g(t) sont l'une et l'autre décroissantes.

On a $f(1) = \frac{c}{3} = \bar{x}$; mais g(1) est infiniment grand.



Les courbes représentatives (ci-dessus) des fonctions f et g sont telles que les suites a_o, a_1, a_2 ... et b_o b_1 b_2 ... envisagées ci-dessus *divergent*. Désignons par $\hat{a}$, $\hat{b}$ la solution de (2, 3).

Si on est parti de $a_o < \hat{a}$, on voit que :

$$a_i \longrightarrow +\infty, \quad b_i \longrightarrow 1$$

Si on est parti de $a_o > \hat{a}$, alors $a_i \longrightarrow 0$, $b_i \longrightarrow +\infty$

IV - AMENAGEMENT DU PROCEDE EN VUE D'OBTENIR LA CONVERGENCE

Pour que les itérations convergent, il faudrait procéder en sens inverse :

que l'équation (2) donne a_i en fonction de b_i,

et que l'équation (3) définisse b_{i+1} en fonction de a_i, pour i = 1, 2, 3, ..

Mais il est tout à fait mal commode de résoudre numériquement l'équation (3) si a est donné et b inconnu.

On devra donc modifier la marche du calcul comme suit :

Ecrivons (4) sous la forme :

$$F(b) = G(b) = \lambda$$

où F(b) croît (à la longue) *plus vite* que G(b), toutes deux croissant avec b ; avec :

$$F(1) = 0 \; ; \; G(1) = K > 0$$

$$K = \lambda_o \xrightarrow{F^{-1}} b_o \; ; \; b_o \xrightarrow{G} \lambda_1 = G(b_o) \; ; \; \lambda_1 \xrightarrow{F^{-1}} b_1 \quad \text{etc....}$$

La méthode sera *convergente,* mais encore convient-il que l'équation :

$$F(b) = \lambda$$

soit résolvable aisément : $b = F^{-1}(\lambda)$.

C'est ce qui se passe quand on écrit (4) sous la forme :

$$b^4 + b^3 - b - 1 = \frac{(1 + b + b)^2 [(x_1 - x_o) + 2(x_2 - x_o)b + (x_2 - x_1)b^2]}{x_1 + x_2 + x_3}$$

si l'on possède une table de la fonction $F(b) = b^4 + b^3 - b - 1$.

Etablir d'abord cette table apparaît comme une opération rentable. Il est d'ailleurs plus commode, en vue d'une généralisation ultérieure, d'avoir :

$$F(b) = \frac{b^4 + b^3 - b - 1}{b^2 + b + 1}, \qquad G(b) = \frac{(x_1 - x_o) + 2(x_2 - x_o)b + (x_2 - x_1)\, b^2}{x_1 + x_2 + x_3}$$

avec :

$$F(b) = \frac{(b + 1)\,(b^3 - 1)}{(b - 1)^{-1}\,(b^3 - 1)} = b^2 - 1$$

V - CAS GENERAL

Venons-en au cas (réaliste) où t prend un nombre de valeurs (disons) de l'ordre de la dizaine.

On a intérêt à utiliser les formules suivantes :

$$m = n + 1$$

$$S(b) = (b^m - 1)/(b - 1)\,, \qquad S(b^2) = (b^{2m} - 1)/(b^2 - 1)$$

$$T(b) = b(nb^m - mb^n + 1)/(b - 1)^2$$

$$T(b^2) = b^2(n\, b^{2m} - mb^{2n} + 1)/(b^2 - 1)^2$$

$$[S(b)\; T(b^2) - S(b^2)\; T(b)]/b$$

$$= \frac{(b^m - 1)}{(b - 1)}\,\frac{b(n\, b^{2m} - mb^{2n} + 1)}{(b^2 - 1)^2} - \frac{(b^{2m} - 1)}{(b^2 - 1)}\,\frac{(nb^m - mb^n + 1)}{(b - 1)^2}$$

$$= \frac{b^m - 1}{(b^2 - 1)^2\,(b - 1)}\left[b(n\, b^{2m} - m\, b^{2m} + 1) - (b^{2m} - 1)\,(nb^m - mb^n + 1)\,(b + 1)\right]$$

$$= \frac{b^m - 1}{(b^2 - 1)^2\,(b - 1)}\,(b^{2m} - m\, b^{m+1} + m\, b^n - 1)$$

d'où :

$$F(b) = \frac{b^{2m} - m\, b^{m+1} + m\, b^{m-1} - 1}{(b^2 - 1)^2}$$

qu'on mettra en Tables pour les valeurs de $m = n + 1$ convenables.

Remarque : L'expression de F(b) ci-dessus est commode pour le calcul numérique (si m grandit), mais ce n'est pas une expression "simplifiée" (au sens de l'algèbre). On voit en effet aisément que :

$m = 3 : F(b) \equiv b^2 - 1$	$m = 4 : F(b) = \frac{b-1}{b+1}(b^4 + 2b^3 + 4b^2 + 2b + 1)$
$m = 5 : F(b) \equiv (b - 1)(b^4 + 3b^2 + 1)$	
m impair : F est un polynome	m pair : $F(b) = \frac{\text{Polynome en } b}{b + 1}$

On associera à F(b) le polynome G(b) suivant :

$$G(b) = \frac{S(b) \sum t\, b^t x_t - T(b) \sum b^t x_t}{b(\sum x_t)}$$

$$= \sum_t \frac{[S(b)\, t - T(b)]\, b^{t-1} x_t}{\sum_t x_t}$$

de la forme :

$$G(b) = \sum_{j=0}^{n-1} C_j\, b^j / \sum_t x_t$$

avec :

$$C_o = x_1 - x_o$$

$$C_1 = 2(x_1 - x_o)$$

$$C_2 = 3x_3 + x_2 - x_1 - 3x_o$$

$$C_3 = 4x_4 + 2x_3 - 2x_1 - 4x_o \quad \text{etc.}$$

Adoptons la notation matricielle. Posons :

$$X' = (x_o, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$C' = (c_o, c_1, c_2, \dots, c_{n-2})$$

Par exemple pour $n = 10$, soit :

$$2n - 2 = 18$$

On a alors :

$C = \Gamma X$, avec pour Γ la matrice suivante :

$$\Gamma = \begin{bmatrix}
-1 & 1 & & & & & & & & & \\
-2 & 0 & 2 & & & & & & & & \\
-3 & -1 & 1 & 3 & & & & & & & \\
-4 & -2 & 0 & 2 & 4 & & & & & & \\
-5 & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 & & & & & \\
-6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 & & & & \\
-7 & -5 & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 & 7 & & & \\
-8 & -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & & \\
-9 & -7 & -5 & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \\
-10 & -8 & -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\
 & -9 & -7 & -5 & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\
 & & -8 & -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\
 & & & -7 & -5 & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 & 7 \\
 & & & & -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\
 & & & & & -5 & -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\
 & & & & & & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\
 & & & & & & & -3 & -1 & 1 & 3 \\
 & & & & & & & & -2 & 0 & 2 \\
 & & & & & & & & & -1 & 1
\end{bmatrix}$$

Remarque : Si la série initiale s'allonge, les premiers coefficients C_j calculés sont conservés ; on n'a pas besoin de recommencer tous les calculs.

Hypothèses suffisantes pour assurer la convergence

Il n'est plus nécessaire alors de supposer la suite x_t strictement croissante. Il nous suffit d'être assuré que tous les coefficients C_o, C_1, C_2 ... de G(b) sont positifs, c'est-à-dire :

$$x_o \leq x_1$$

$$x_o \leq x_2$$

$$x_o + \frac{1}{3}(x_1 - x_2) \leq x_3 \text{ etc.}$$

Alors G(b) est à coup sûr croissant avec b > 1. Ajoutons d'ailleurs que ces conditions *suffisantes* ne sont pas vraiment nécessaires à la croissance et à la convergence. C'est ainsi que, dans notre application numérique, on avait affaire aux coefficients suivants :

C_o = - 0,23	C_1 = 2,90	C_2 = 6,96	C_3 = 8,86	C_4 = 7,56
C_5 = - 0,58	C_6 = 23,76	C_7 = 71,38	C_8 = 145,73	C_9 = 271,08
C_{10} = 230,77	C_{11} = 188,16	C_{12} = 160,67	C_{13} = 135,66	C_{14} = 106,87
C_{15} = 74,24	C_{16} = 35,91	C_{17} = 16,14	C_{18} = 5,10	

Tout se passait en pratique comme si les coefficients C_o et C_5 avaient été nuls. La croissance de G(b) avec b > 1 ne dépend pas de C_o et guère de C_5.

On peut de même justifier la croissance de F(b) : c'est le produit d'un polynome à coefficients tous positifs par une fonction croissante pour b > 1 ; à savoir alternativement $b^2 - 1$ et $(b - 1)(b + 1)^{-1} = 1 - 2(b + 1)^{-1}$.

L'expression de F(b) à l'aide des fonctions S et T permet également une étude directe (voir annexe 1).

Lors de l'application numérique, on avait m = 11. Au lieu de calculer les valeurs b^{22}, b^{12} et b^{10}, on les prenait dans les *Tables de Violeine* (Nouvelles Tables pour les calculs d'intérêts composés), en interpolant au besoin.

Dernières étapes du calcul :

b =	1,1664	1,1881	1,1953	1,1990
F =	77,52	106,05	117,43	123,52
G =	(90)	111,25	119,67	124,11

On s'arrête lorsque F et G sont devenus suffisamment voisins.

VI - INDICATIONS SUR LE 2ème PROBLEME

Nous n'étudierons pas ici en détail le 2ème problème.

On a :

$$y_t = a\,b^t$$
$$X_t = \log x_t$$
$$Y_t = \log y_t = A + Bt$$
$$A = \log a, \quad B = \log b$$

d'où :

$$Z(A, B) = \sum_o^n (A + Bt - X_t)^2 \tag{1}$$

$$a\sum_o^n b^t = \sum_o^n x_t \tag{2}$$

$$\frac{\sum_o^n (A + Bt - X_t)}{\sum_o^n b^t} = \frac{\sum_o^n t(A + Bt - X_t)}{\sum_o^n t\,b^t} \tag{3}$$

cette équation (3) s'écrit aussi :

$$A\left[\frac{n+1}{S(b)} - \frac{n(n+1)}{2T(b)}\right] = \frac{\sum x_t}{S(b)} - \frac{\sum t\,X_t}{T(b)} + B\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\,T(b)} - \frac{n(n+1)}{2S(b)}\right] \tag{3'}$$

avec :

$$\sum t = n(n+1)/2, \qquad \sum t^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

Un processus d'itération peut être envisagé comme suit :

$$\begin{aligned}
(b,\ B) &\xrightarrow{(3)} A \\
A &\longrightarrow a = \exp A \\
a &\xrightarrow{(2)} b \\
b &\longrightarrow B = \log b
\end{aligned}$$

Mais on peut craindre qu'il ne soit pas convergent, puisqu'à nouveau le coefficient de A dans (3') s'annule pour b = 1 (d'où A infini).

Il faudrait alors éliminer A entre (2) et (3) et chercher un processus d'itération qui converge, pour résoudre la nouvelle équation (4).

Toutefois, au cours de l'essai pratique de cette méthode sur les données présentées plus haut, rien n'a permis de conclure à la non-convergence des calculs. On a obtenu, en effet :

$A_0 = 0,61820$	$A_1 = 0,60784$
$A_2 = 0,61227$	$A_3 = 0,60948$
$A_4 = 0,60997$	$A_5 = 0,60962$
$A_6 = 0,60992$	et on a supposé que $A_\infty \# 0,60977$

d'où $10^A = 4,0717$, $10^B = 1,1400$. (arrondi). On choisit alors a = 4,08 (Cf. Annexe 2).

Remarque finale :

La liaison supplémentaire imposée à la condition des moindres carrés conduit donc à des complications (théoriques et pratiques) assez grandes. Or, la précision des données étudiées sera rarement telle qu'on ait des raisons sérieuses de ne pas adopter la solution boiteuse désignée au début sous le nom de Problème 3.

ANNEXE 1

On peut étudier F(b) et d'abord établir que F(b) est positif en utilisant les fonctions S(b), T(b), $S(b^2)$ et $T(b^2)$.

Détail du raisonnement

Pour b > 1, montrons qu'on a :

$$\frac{T(b^2)}{S(b^2)} > \frac{T(b)}{S(b)} > 1$$

Pour cela, soit u = log b ; v = Log S(b), on a :

$$\frac{du}{db} = \frac{1}{b}, \quad \frac{dv}{db} = \frac{S'(b)}{S(b)} = \frac{T(b)}{bS(b)}$$

Mais S(b) croît plus vite que b, donc v croît plus vite que u, d'où :

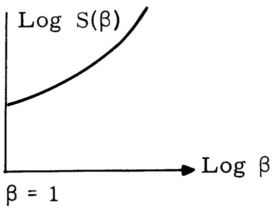
$$\frac{dv}{db} > \frac{du}{db} \text{ (pour } b > 1)$$

c'est-à-dire $\frac{T(b)}{b\ S(b)} > \frac{1}{b}$

$$\boxed{\frac{T(b)}{S(b)} > 1}$$

Mais $\frac{dv}{du}$ est l'élasticité de S(b) en b, et c'est $T(b)/S(b^2)$

De même, $\frac{T(b^2)}{S(b^2)}$ est l'élasticité de $S(b^2)$ en b^2



Or b et b^2 sont 2 valeurs de β, et :

$$b > 1 \longrightarrow b^2 > b$$

L'inégalité :

$$\frac{T(b^2)}{S(b^2)} > \frac{T(b)}{S(b)}$$

est la simple conséquence du fait que :

$$\frac{T(b)}{S(b)} = \frac{n\,b^n + \ldots + 2b^2 + b}{b^n + \ldots + b^2 + b + 1}$$

croît avec b, pour $b > 1$.

ANNEXE 2

On peut se demander pourquoi le calculateur a adopté dans le dernier calcul :

$$a = 4,08 \quad \text{et non pas } 4,07.$$

En fait il aurait du associer à a = 4,0717 un taux de croissance légèrement supérieur à 14 %, c'est-à-dire b un peu supérieur à 1,1500. Mais les Tables de Violeine n'existent que pour des taux assez espacés et obligeacent à arrondir à 1,1400 ; alors en conservant a = 4,07 on aurait obtenu $\sum y_t$ notablement trop petit ; en montant à a = 4,08 une compensation s'est établie entre les deux erreurs sur $\sum y_t$, sans trop s'éloigner (pour autant) de l'optimum.