REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

R. SNEYERS

Sur l'emploi de distributions normales tronquées en climatologie

Revue de statistique appliquée, tome 12, nº 2 (1964), p. 85-94

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1964__12_2_85_0>

SUR L'EMPLOI DE DISTRIBUTIONS NORMALES TRONQUÉES EN CLIMATOLOGIE

R. SNEYERS
Institut Royal Météorologique de Belgique, Uccle

I - INTRODUCTION

Il est d'usage en climatologie de considérer pour certains phénomènes la date du premier jour et celle du dernier jour auxquels ils se produisent comme, par exemple, les dates de la première et de la dernière gelée (min < 0°) ou celle de la première et de la dernière forte chaleur (Max ⩾ 30°). et ce en raison du fait que la période qui s'étend entre ces deux dates représente la partie de l'année pendant laquelle le phénomène peut se produire.

Au cours de recherches statistiques entreprises sur l'enneigement du sol à Uccle, nous avons considéré, en particulier, la distribution du premier jour et du dernier jour de la période hivernale (novembre à mars) au cours de laquelle des chutes de neige peuvent accumuler sur le sol au moins un centimètre de neige et nous avons tenté de la représenter au moyen d'une loi de probabilité normale à deux variables.

Nous avions pensé, en effet, que par suite de l'éloignement fréquent des époques du début et de la fin de la période, celles-ci, comptées à partir d'une même origine, pourraient pratiquement être considérées comme des variables indépendantes et qu'ainsi la loi à deux variables pourrait directement se déduire de la combinaison des lois de probabilité régissant respectivement les époques du début et de la fin de la période.

Le calcul du coefficient de corrélation entre les deux époques fournit malheureusement une valeur positive, significative pour un niveau inférieur à 0,5 % ce qui rendait la méthode envisagée inapplicable. Ce résultat nous paru cependant assez surprenant, car s'il est vrai que quelques hivers ne comportent qu'une seule séquence de jours consécutifs avec sol enneigé et qu'ainsi une certaine corrélation positive peut s'introduire dans la série des époques de début et de fin de période, le nombre de cas nous a paru cependant trop faible pour qu'une corrélation suffisamment marquée soit observée.

Par contre, l'incompatibilité de la méthode considérée devint évidente dès l'instant où, en désignant par X_1 et X_2 respectivement les époques du début et de la fin de la période, il est apparu que l'on doit avoir :

$$X_2 - X_1 \geqslant 0,$$

ce qui limite strictement le domaine de définition de la loi de probabilité des variables X_1 et X_2.

Le problème de l'ajustement à la série des observations de lois de probabilité tronquées suivant la relation précédente se trouvait ainsi posé et notamment celui de lois normales à deux variables.

On notera, par ailleurs, qu'il existe au moins un autre cas où la loi normale tronquée rendra peut-être des services et nous rappellerons à ce propos que si Bultot [1] a ajusté avec un certain succès une loi normale non tronquée à deux variables à la distribution conjointe de la température de l'air et de la tension de la vapeur d'eau (après une transformation fonctionnelle de chacune de ces variables), il n'en reste pas moins qu'une manière équivalente de traiter le problème posé revient à considérer la distribution conjointe de la température X_2 lue au thermomètre sec et celle X_1 du thermomètre humide, pour lesquelles on a également la relation :

$$X_2 - X_1 \geqslant 0,$$

ce qui, en toute rigueur, impose l'ajustement d'une loi de probabilité respectant cette condition.

Du point de vue théorique, et à notre connaissance, l'étude de distributions normales tronquées à au moins deux variables a été traités principalement par Birnbaum, Meyer et Des Raj En particulier, l'effet de troncatures linéaires sur une distribution normale à deux ou plusieurs variables a été examiné par Birnbaum et Meyer dans le cas de troncatures simples parallèles aux axes coordonnée (cf [2] et [3]), et celui de troncatures linéaires simples ou doubles, dans le cas de distributions normales à deux variables, par Des Raj (cf [4]), les troncatures étant toujours parallèles à l'un des axes coordonnés.

Dans ce qui suit, nous avons considéré l'effet d'une troncature linéaire quelconque sur une population normale à plusieurs variables en calculant tout d'abord la fonction génératrice des moments de la distribution tronquée et en déduisant de cette fonction les moments du premier et du second ordre de la distribution envisagée.

Nous avons donné ensuite les formules nécessaires pour effectuer l'ajustement d'une telle distribution à partir du calcul des moments fournis par la série des observations et nous avons illustré cette méthode au moyen d'un bref exemple.

En ce qui concerne les calculs eux-mêmes, on retiendra que ceux-ci ont été conduits en faisant appel aux propriétés des matrices pour lesquelles nous avons utilisé les notations de Aitken [5] ; de plus, on notera que pour la clarté des formules les vecteurs et les matrices ont été représentés respectivement par des lettres grasses soulignées et par des lettres majuscules droites grasses, tandis que les constantes et les fonctions (scalaires) ont été écrites au moyen des caractères habituels.

II - GENERALITES

Soient $\underline{\mathbf{x}}$ le vecteur colonne dont les composantes sont les variables aléatoires réduites $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $\mathbf{R}$ la matrice carrée définie positive et symétrique des covariances de ces variables.

Soient $\underline{\mathbf{x}}$ le vecteur colonne dont,les composantes sont les variables aléatoires réduites $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $\mathbf{R}$ la matrice carrée définie positive et symétrique des covariances de ces variables.

Comme il s'agit de variables réduites, on sait que les éléments de la matrice R ne sont autres que les coefficients de corrélation des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, prises deux à deux et, qu'en outre, les éléments de la diagonale principale sont tous égaux à l'unité.

Dans ces conditions, si l'on note la transposition des matrices (Interversion des lignes et des colonnes) au moyen d'une apostrophe et, en particulier, par $\underline{\mathbf{x}}'$ le vecteur ligne obtenu par transposition du vecteur colonne $\underline{\mathbf{x}}$, la densité de probabilité $f(\underline{\mathbf{x}})$ de la distribution multidimensionnelle normale des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, peut s'écrire, grâce à la règle du produit des matrices, et à la constante K près :

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = K\,[|\mathbf{R}|^{-1}(2\pi)^{-n}\, e^{-\underline{\mathbf{x}}'\mathbf{R}^{-1}\underline{\mathbf{x}}}]^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

où $|\mathbf{R}|$ désigne la valeur du déterminant représenté par la matrice (cf. par ex. [6] p. 63).

Cela étant, on considère la relation entre les vecteurs $\underline{\mathbf{x}}$ et $\underline{\mathbf{u}}$:

$$\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\,\underline{\mathbf{u}} \qquad \text{ou} \qquad \underline{\mathbf{x}}' = \underline{\mathbf{u}}'\,\mathbf{A}', \tag{2}$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice non singulière ($|\mathbf{A}| \neq 0$), ce qui conduit à :

$$\underline{\mathbf{x}}'\,\mathbf{R}^{-1}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{u}}'\,\mathbf{A}'\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{A}\,\underline{\mathbf{u}}. \tag{3}$$

Il est clair que si l'on pose alors la condition :

$$\mathbf{A}'\,\mathbf{R}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}, \tag{4}$$

où $\mathbf{I}$ désigne la matrice unitaire, (3) devient :

$$\underline{\mathbf{x}}'\,\mathbf{R}^{-1}\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{u}}'\,\underline{\mathbf{u}}. \tag{5}$$

Comme, d'autre part, la condition (4) est équivalente à :

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}' = \mathbf{R}, \tag{6}$$

et que $\mathbf{R}$ est une matrice symétrique, cette condition représente en réalité un système de $\frac{n\,(n+1)}{2}$ relations entre les n^2 éléments de $\mathbf{A}$; il s'ensuit qu'elle peut être vérifiée d'une infinité de manières.

Par ailleurs, si $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, ce qui donne $\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\,\underline{\mathbf{x}}$, et si $\underline{\mathbf{b}}'$ désigne le vecteur ligne formé par la première ligne de $\mathbf{B}$, on aura pour la composante u_1 de $\underline{\mathbf{u}}$, la relation :

$$u_1 = \underline{b}' \; \underline{x},$$

ce qui, avec (2), conduit à :

$$u_1 = \underline{b}' \; A \; \underline{u},$$

donc aussi à :

$$\underline{b}' \; A = \underline{d}', \tag{7}$$

si $\underline{d}'$ désigne le vecteur ligne formé par la première ligne de **I**.

On en tire, avec (6) :

$$\underline{b}' \; R = \underline{b}' \; A \; A' = \underline{d}' \; A = \underline{a}', \tag{8}$$

si $\underline{a}$ est le vecteur colonne formé par la première colonne de **A**, de même que :

$$\underline{b}' \; A \; A' \; \underline{b} = \underline{d}' \; \underline{d} = 1,$$

c'est à dire :

$$\underline{b}' \; A \; \underline{b} = 1. \tag{9}$$

Enfin, avec (8), cette dernière relation peut encore s'écrire :

$$\underline{b}' \; \underline{a} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \underline{a}' \; \underline{b} = 1. \tag{10}$$

III - LA FONCTION GENERATRICE DES MOMENTS

Si D est le domaine de définition du vecteur $\underline{x}$, $d\underline{x}$ l'élément de volume de l'espace du vecteur $\underline{x}$ et $\underline{t}$ un vecteur colonne arbitraire, la fonction génératrice des moments $\Phi(\underline{t})$ peut s'écrire :

$$\Phi(\underline{t}) = \mathbf{E}\,(e^{\underline{t}'\underline{x}}) = \int_D e^{\underline{t}'\underline{x}} f(\underline{x})\, d\underline{x}$$

$$= K\,[|\mathbf{R}|]^{-\frac{1}{2}} \,.\, (2\pi)^n]^{-\frac{1}{2}} \int_D e^{\underline{t}'\underline{x} - \frac{\underline{x}'R^{-1}\underline{x}}{2}}\, d\underline{x},$$

ce qui, avec (2) et (5) devient :

$$\Phi(\underline{t}) = K\,(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_D e^{\underline{t}'A\underline{u} - \frac{\underline{u}'\underline{u}}{2}}\, d\underline{u},$$

puisque, en vertu de (6), le jacobien $\left|\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{u}}\right| = |\mathbf{A}| = |\mathbf{R}|^{\frac{1}{2}}$.

Comme, d'autre part, on a $\underline{t}'\,A\underline{u} = \underline{u}'\,A'\,\underline{t}$, on en déduit sans peine l'égalité :

$$\underline{t}'A\,\underline{u} - \frac{\underline{u}'\,\underline{u}}{2} = \frac{1}{2}\,[\underline{t}'\,R\,\underline{t} - (\underline{u}' - \underline{t}'A)\,(\underline{u} - A'\underline{t})],$$

ou encore :

$$\underline{t}'A\,\underline{u} - \frac{\underline{u}'\,\underline{u}}{2} = \frac{1}{2}\,[\underline{t}'\,R\,\underline{t} - \underline{v}'\,\underline{v}],$$

si l'on pose :

$$\underline{v} = \underline{u} - A' \underline{t}. \tag{11}$$

Il en résulte que l'on a finalement :

$$\Phi(\underline{t}) = K (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{\underline{t}'R\underline{t}}{2}} \int_D e^{-\frac{\underline{v}'\underline{v}}{2}} d\underline{v}. \tag{12}$$

IV - LES MOMENTS DE LA DISTRIBUTION TRONQUEE

Dans le cas de la distribution tronquée, le domaine **D** est défini par les relations :

$$c \leqslant u_1 \leqslant +\infty \ ; \ -\alpha \leqslant u_j \leqslant +\infty, \ j = 2, 3, \ldots, n,$$

où c désigne une constante donné, c'est-à-dire, en tenant compte de (11) et en se souvenant de ce que $\underline{a}$ est le vecteur colonne formé par la première colonne de **A** :

$$c - \underline{a}'\underline{t} \leqslant v_1 \leqslant +\infty \ ; \ -\infty \leqslant v_j \leqslant +\infty, \ j = 2, 3, \ldots, n.$$

Il s'ensuit que l'intégrale (12) devient :

$$\Phi(\underline{t}) = K e^{\frac{\underline{t}'R\underline{t}}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2} + \frac{n-1}{2}} \int_{c-\underline{a}'\underline{t}}^{+\infty} e^{\frac{v_1^2}{2}} dv_1,$$

c'est-à-dire :

$$\Phi(\underline{t}) = K e^{\frac{\underline{t}'R\underline{t}}{2}} \psi(\underline{c} - \underline{a}'\underline{t}), \tag{13}$$

sachant qu'on pose :

$$\psi(z) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_z^{+\infty} e^{-\frac{v_1^2}{2}} d v_1. \tag{14}$$

Les dérivations successives de $\Phi(\mathbf{t})$ conduisent symboliquement à :

$$\frac{\partial \psi(\underline{t})}{\partial \underline{t}} = K e^{\frac{\underline{t}'R\underline{t}}{2}} \left[\psi(c - \underline{a}'\underline{t}).\ \mathbf{R}\,\underline{t} + \frac{\partial \psi(c - \underline{a}'\underline{t})}{\partial \underline{t}} \right] \tag{15}$$

et :

$$\frac{\partial^2 \Phi(\underline{t})}{\partial \underline{t}\ \partial \underline{t}} = K e^{\frac{\underline{t}'R\underline{t}}{2}} \left[\psi(c-\underline{a}'\underline{t}).\mathbf{R}\,\underline{t}\,\underline{t}'\,\mathbf{R} + 2\,\frac{\partial \psi(c-\underline{a}'\underline{t})}{\partial \underline{t}}.\underline{t}'\mathbf{R} + \psi(c-\underline{a}'\underline{t}).\mathbf{R} + \frac{\partial^2 \psi(c-\underline{a}'\underline{t})}{\partial \underline{t}\ \partial \underline{t}} \right] \tag{16}$$

avec :

$$\frac{\partial \psi(c - \underline{a}'\underline{t})}{\partial \underline{t}} = \underline{a}\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\ e^{-\frac{(c-\underline{a}'\underline{t})^2}{2}}$$

et :

$$\frac{\partial^2 \psi(c - \underline{a}'\underline{t})}{\partial \underline{t}\ \partial \underline{t}} = \underline{a}\,\underline{a}'\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\ (c - \underline{a}'\underline{t})\ e^{-\frac{(c-\underline{a}'\underline{t})^2}{2}}$$

En faisant $\underline{\mathbf{t}} = 0$, on tire finalement de (13) :

$$K = [\psi(c)]^{-1}, \qquad (17)$$

tandis que de (15) et de (16), on déduit pour le vecteur $\bar{\underline{\mathbf{x}}}$ des moyennes de la distribution normale tronquée et la matrice $\mathbf{N}$ de ses moments du second ordre par rapport à l'origine, respectivement les relations :

$$\bar{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\mathbf{a}}\ \lambda(c), \qquad (18)$$

et :

$$\mathbf{N} = \mathbf{R} + \underline{\mathbf{a}}\,\underline{\mathbf{a}}'\ c\ \lambda(c), \qquad (19)$$

sachant[*] que l'on a posé :

$$\lambda(c) = K\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{c^2}{2}}. \qquad (20)$$

Il s'ensuit que la matrice $\mathbf{M}$ des covariances de la distribution normale tronquée se trouve définie par la relation :

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} + \underline{\mathbf{a}}\ \underline{\mathbf{a}}'\ \omega(c), \qquad (21)$$

où :

$$\omega(c) = \lambda(c)\,[c - \lambda(c)]. \qquad (22)$$

V - AJUSTEMENT D'UNE DISTRIBUTION NORMALE TRONQUEE A UNE SERIE D'OBSERVATIONS

Soit $\underline{\mathbf{X}}$ le vecteur colonne des variables aléatoires observées régies par une distribution multidimensionnelle normale, l'origine de l'espace de ces variables étant arbitraire, et soient $\mathbf{S}$ la matrice diagonale des écarts-types de ces variables et σ l'écart-type de la variable $U_1 = \underline{\mathbf{B}}'\underline{\mathbf{X}}$ lorsque la distribution normale n'est pas tronquée.

Considérons la troncature définie par la relation :

$$U_1 = \underline{\mathbf{B}}'\ \underline{\mathbf{X}} \geq C, \qquad (23)$$

et soient $\bar{\underline{\mathbf{X}}}$ et $\bar{U}_1$ la moyenne du vecteur $\underline{\mathbf{X}}$ et celle de la variable U_1, $\overline{\mathbf{X}\mathbf{X}'}$ et $\overline{U_1^2}$ la matrice des moments du second ordre de $\underline{\mathbf{X}}$ et le carré moyen de U_1 calculés à partir de l'origine arbitraire, lorsque la distribution est tronquée suivant la relation (23).

Il en résulte qu'on a :

$$\bar{U}_1 - C = [\lambda(c) - c]\ \sigma$$

---

[*] On aura reconnu que λ (c) n'est autre que l'inverse du rapport de Mills.

et :

$$\overline{U_1^2} - (\overline{U}_1)^2 = \{1 + \omega(c)\}\,\sigma^2,$$

d'où il vient :

$$\frac{\overline{U_1^2} - (\overline{U}_1)^2}{(U_1 - C)^2} = \frac{1 + \omega(c)}{[\lambda(c) - c]^2} \tag{II}$$

Par ailleurs, en multipliant (21) par $\underline{b}'$ et en se souvenant de (8) et de (10), on trouve :

$$\underline{b}'\,M = \underline{a}'\,[1 + \omega(c)],$$

ou encore, avec (18) et en multipliant par S :

$$\underline{b}'\,M\,S = \bar{\underline{x}}'\,S\,\frac{1 + \omega(c)}{\lambda(c)}. \tag{24}$$

Comme, d'autre part, $U_1 = \underline{B}'\,\underline{X}$ conduit à :

$$U_1 = \underline{B}'\,S\,\underline{x},$$

et(*) qu'on a aussi :

$$U_1 = \sigma\,u_1 = \sigma\,\underline{b}'\,\underline{x}$$

on en tire :

$$\underline{B}'\,S = \sigma\,\underline{b}',$$

c. à d. :

$$\underline{b}' = \frac{\underline{B}'\,S}{\sigma} \tag{25}$$

De ce fait, (24) donne :

$$\underline{x}'\,S = \frac{\lambda(c)}{\partial\,[1 + \omega(c)]}\,\underline{B}'\,S\,M\,S. \tag{III}$$

Enfin, en multipliant (21) de part et d'autre par S, on trouve :

$$S\,M\,S = S\,R\,S + S\,\underline{a}\,\underline{a}\,S\,\omega(c),$$

c. à d., avec (18) :

$$S\,M\,S = S\,R\,S + S\,\bar{\underline{x}}\,(S\,\bar{\underline{x}})^1\,\frac{\omega(c)}{\lambda^2(c)}$$

dont on déduit en particulier :

$$S\,M_{ii}\,S = S^2 + (S\,\underline{x})^2\,\frac{\omega(c)}{\lambda^2(c)}. \tag{IV}$$

(*) En vertu de (9) on a $\underline{u}_1^2 = 1$.

sachant que $\mathbf{M}_{ii}$ et $(S\,\bar{\underline{x}})^2$ désignent respectivement les matrices diagonales formées par les diagonales principales de $\mathbf{M}$ et de $S\,\underline{x}\,(S\,\underline{x})$.

L'ajustement cherché s'obtiendra donc en déduisant successivement la valeur de c de (II), celle de σ de (I), celle de $\bar{\underline{x}}'S$ de (III), en notant que $S\,\mathbf{M}\,S$ n'est autre que la matrice $(\underline{X}\,\underline{X}' - \underline{X}\,\underline{X}')$ des covariances des variables de la distribution tronquée, et celle de S de (IV).

La résolution de ces équations conduit ensuite à la connaissance de $\bar{\underline{x}}$, de $\underline{a}$, de $\mathbf{M}$ et finalement de $\mathbf{R}$.

VI - EXEMPLE : La distribution du début et de la fin de la période d'enneigement du sol, à Uccle, avec une épaisseur d'au moins un centimètre.

La série considérée est formée des époques X_1 de début et X_2 de fin de période observées au cours de n = 57 périodes hivernales. Les époques ont été exprimées en décades, celles-ci s'étendent dans chaque mois du 1 au 10, du 11 au 20 et du 21 à la fin du mois, et l'origine des décades ($X_1 = X_2 = 0$) étant la deuxième décade d'octobre.

On trouve successivement :

$$\sum X_1 = 404, \quad \sum X_2 = 637, \quad \sum X_1^2 = 3284, \quad \sum X_2^2 = 7677 \quad \text{et} \quad \sum X_1 X_2 = 4683,$$

et le coefficient de corrélation qu'on en déduit est égal à 0,347, valeur qui avec 56 degrés de liberté est significativement positive pour un niveau inférieur à 0,5 %, comme annoncé.

Si on pose $U = X_2 - X_1$, on sait qu'on doit avoir $U \geqslant 0$; on peut donc s'orienter vers l'ajustement d'une distribution normale tronquée suivant cette relation.

Moyennant une petite correction appropriée aux cas où l'on a $X_2 - X_1 = 0$ (pour lesquels on a attribué à U la valeur 0,5 au lieu de 0), on trouve alors :

$$\sum U = 238{,}5 \qquad \text{et} \qquad \sum U = 1597{,}75,$$

valeurs à partir desquelles il conviendrait de déduire la valeur de c au moyen de l'équation (II).

Cette valeur s'obtient toutefois d'une manière simple au moyen de la table IX de Hald (cf. [7] p. 29 et 62) qui permet de déduire z = c à partir de $y = \dfrac{n \sum U^2}{2\,(\sum U)^2}$, ce qui donne ici :

$$y = 0{,}80053 \qquad \text{et } z = c = 0{,}1744.$$

Si l'on note, en outre, qu'en vertu de l'équation (I) on doit avoir pour la fonction g (z) de Hald, la relation :

$$\lambda(z) - z = [g(z)]^{-1},$$

on en déduit, pour le cas présent, successivement :

$g(c) = 1,3557$; $\sigma = 5,673$; $\lambda(c) - c = 0,7376$; $\lambda(c) = 0,9120$; $\omega(c) = -0,6727$;

$$\frac{\lambda(c)}{1+\omega(c)} = 2,786 \qquad \text{et} \qquad \frac{\omega(c)}{\lambda^2(c)} = -0,8088.$$

Sachant, d'autre part, qu'on a aussi :

$$\underline{B}' = [-1, 1] \qquad \text{et} \qquad S\,M\,S = \begin{bmatrix} 7,378 & 2,950 \\ 2,950 & 9,794 \end{bmatrix},$$

de (III), on tire :

$$x_1\sigma_1 = -2,174 \qquad \text{et} \qquad x_2\sigma_2 = 3,361.$$

tandis que de (IV), il vient :

$$\sigma_1 = 3,347 \qquad \text{et} \qquad \sigma_2 = 4,351.$$

Il s'ensuit que l'on a :

$$x_1 = -0,6495 \qquad \text{et} \qquad x_2 = 0,7725,$$

d'où, grâce à (18), on tire :

$$a_1 = -0,7122 \qquad \text{et} \qquad a_2 = 0,8470.$$

Enfin, comme on a :

$$M_{12} = \frac{2,950}{\sigma_1\,\sigma_2} = 0,203,$$

on obtient finalement de (21) :

$$R_{12} = -0,203.$$

On notera, à propos de ce résultat, que l'estimation de la variance de R_{12} au moyen des formules de Des Raj (cf [4], p. 285, Case 1) où l'on fait $\rho = 0$, $Z_2 = 0$ (troncature simple), ainsi que $\sigma_x = \sigma_y = 1$, conduit à un écart-type égal à 0,232, ce qui cette fois ne permet plus de rejeter l'hypothèse d'une corrélation nulle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BULTOT, F. - Distribution conjointe de la température et de l'humidité de l'air au Congo belge, INEAC, Communication n° 14 du Bureau Climatologique, Bruxelles, 1957.

[2] BIRNBAUM, Z.W. - Effect of linear truncation on a multinormal population, Ann. Math. Stat., 21, 2, 1950, 272-279.

[3] BIRNBAUM, Z.W. et MEYER, P.L. - On the effect of truncation in some or all coordinates of a multinormal population, Journ. Ind. Soc. Agric. Stat., 5, 1, 1953, 17-28.

[4] DES RAJ. - On estimating the parameters of bivariate normal populations form doubly and singly linearly truncated sample, Indian Journ. Stat., 12, 3, 1953, 277-290.

[5] AITKEN, A.C. - Determinants and matrices, ninth edition, Oliver and Boyd, Edinburgh and London. 1958.

[6] WILKS, S.S. - Mathematical statistics, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1950.

[7] HALD, A. - Statistical tables and formulas, J. Wiley, New York, 1952.