REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

DANIEL DUGUE

Un mélange d'algèbre et de statistique : le plan d'expériences

Revue de statistique appliquée, tome 12, nº 1 (1964), p. 7-15
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1964__12_1_7_0>

UN MÉLANGE D'ALGEBRE ET DE STATISTIQUE : LE PLAN D'EXPÉRIENCES [1]

Daniel DUGUE
Directeur de l'Institut de Statistique

A la mémoire de mon maître Georges Darmois
Directeur de l'Institut de statistique
Membre de l'Académie des Sciences

Cette histoire commence comme un conte de fées : il était une fois en Ecosse un vieil homme original du nom de MAC MAHON ; il y avait deux traits marquants dans sa personnalité : des dispositions pour l'abstraction et une solide aversion pour le genre humain ? Ayant des loisirs, il avait choisi de se consacrer à des recherches mathématiques et des recherches telles qu'elles ne puissent jamais être appliquées à quoi que ce soit. C'était ce que nous appellerions maintenant un mathématicien "pur". Son sujet ? Les carrés latins. Voici le problème : considérons un carré de 5 cases de côté (soit 25 cases dans le carré) et 5 lettres latines A, B, C, D, E. Ecrivons dans ces 25 cases, 5 fois la lettre A de manière qu'elle ne figure qu'une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne, de même 5 fois B, 5 fois D et 5 fois E. Nous avons réalisé ce que MAC MAHON appelait un carré latin.

Le problème est possible puisque le tableau suivant répond aux conditions posées.

A	B	C	D	E
D	E	A	B	C
B	C	D	E	A
E	A	B	C	D
C	D	E	A	B

On voit très aisément que si 5 est remplacé par un nombre quelconque le problème est encore possible. Il admet même un grand nombre de solutions. MAC MAHON s'est attaché à trouver le nombre de ces solutions et les moyens de passer d'un carré à un autre. Il a laissé une oeuvre importante sur ce sujet. Il espérait, je pense, s'il était logique avec lui-même - et un mathématicien doit l'être - que cette production tomberait dans l'oubli sitôt lui-même disparu.

Le malheureux ne se doutait pas de deux choses : tout d'abord qu'un mathématicien (hélas ! un mathématicien appliqué selon la terminologie moderne) suisse EULER s'était déjà intéressé à un aspect de ce problè-

----

(1) Conférence donnée au Palais de la Découverte le 23 janvier 1960.

me, et qu'un statisticien dont le nom marque toute l'école statistique de notre époque. Sir Ronald FISHER, allait utiliser ce modèle dans ce qu'on appelle d'après lui le plan d'expériences.

EULER avait posé vers 1750 le problème qu'il appelait problème des 36 officiers. Il s'agissait ici d'un carré de 6 cases de côté, donc de 36 cases en tout, sur lesquelles devaient être placés 36 officiers : 6 colonels, 6 lieutenants colonels, 6 commandants, 6 capitaines, 6 lieutenants et 6 sous-lieutenants. Ces 36 officiers étaient de 6 armes différentes : 6 artilleurs, 6 fantassins, 6 cuirassiers, 6 dragons, 6 hussards, 6 sapeurs. De plus, dans chaque grade, chaque arme était représentée une fois et une seule (un colonel d'artillerie, une colonel d'infanterie, un cuirassier, un dragon, un hussard et un colonel de génie etc.). Il fallait placer ces 36 officiers sur les 36 cases du carré de manière que dans chaque ligne et dans chaque colonne figure une fois et une seule chaque arme et chaque grade. *Le problème est impossible.* On peut bien placer 6 lettres A, B, C, D, E, F chacune répétée 6 fois de manière à constituer un carré latin puisque nous avons dit qu'il existe des carrés latins d'un nombre quelconque de cases. De même, les 6 lettres grecques, α, β, γ, δ, ε, ζ étant répétées chacune 6 fois on peut aussi réaliser avec elles un carré latin. Mais quand on superpose ces deux carrés on n'aura pas une fois et une seule chacun des 36 couples formés en choisissant une lettre latine et une lettre grecque. Certains couples manqueront, d'autres seront répétés plusieurs fois. Il n'y aura pas, comme on dit, orthogonalité des deux carrés. Les lettres latines symbolisant les grades, les lettres grecques les armes, cela signifie que l'on pourra bien ranger les 36 officiers de manière que, dans chaque ligne et chaque colonne, il y ait un officier et un seul de chaque grade et un officier et un seul de chaque arme, mais que l'on serait obligé par exemple de ne pas avoir de colonel fantassin et que l'on aurait deux colonels artilleurs.

Considérons les deux carrés latins suivants :

A	B	C	D	E	F	α	β	γ	δ	ε	ζ
C	D	E	F	A	B	β	γ	δ	ε	ζ	α
E	F	A	B	C	D	γ	δ	ε	ζ	α	β
B	C	D	E	F	A	δ	ε	ζ	α	β	γ
D	E	F	A	B	C	ε	ζ	α	β	γ	δ
F	A	B	C	D	E	ζ	α	β	γ	δ	ε

Si l'on superpose les deux carrés on voit que A est associé une fois avec toutes les lettres sauf α et δ, qu'il est associé 2 fois avec α et 0 fois avec δ. De même pour toutes les autres lettres latines un couple manque et un autre est répété 2 fois.

Cette impossibilité du problème des 36 officiers, EULER l'avait prévue dès le milieu du XVIIIe siècle. C'est seulement en 1900 que TARRY a réussi à l'établir. J'ajoute que sa démonstration ne présente aucune explication du phénomène. Elle se contente d'énumérer, en les résumant en plusieurs catégories, les cas possibles de carrés latins de 36 cases et de constater sur ces différentes catégories l'impossibilité de l'orthogonalité. Il semble d'ailleurs que le mystère de la raison profonde de cette impossibilité s'épaississe encore depuis des résultats acquis en avril 1959 par BOSE et que l'on soit là en face d'une propriété particulière du nombre 6. L'intuition géniale qu'a eue EULER à ce sujet n'en est que plus admirable. Il s'agit là d'une véritable prémonition de la vérité dont il y a plusieurs exemples en mathématiques (je pense à Henri POINCARE ayant la révélation que les groupes fuchsiens étaient des groupes de déplacements d'une géométrie non-euclidienne, à Paul LEVY énonçant trois ans avant sa démonstration le théorème de LEVY-CRAMER, à DENJOY donnant en 1906 la limite supérieure du nombre des valeurs asymptotiques d'une fonction entière, théorème qui devait attendre la démonstration d'AHLFORS jusqu'en 1928).

Quoi qu'il en soit et pour des raisons que je vous exposerai tout à l'heure. Sir Ronald FISHER s'est demandé si, en dehors du cas de 6 pour lequel la cause est entendue, il existe des carrés latins de n cases de côté pour lesquels il existe deux couples orthogonaux et même plus généralement N couples orthogonaux deux à deux. Cette question est restée en suspens jusqu'en 1938. Sir Ronald FISHER l'avait posée environ dix ans auparavant.

Cette année-là, à quelques jours d'intervalle, W.L. STEVENS en Angleterre et R.C. BOSE en Inde eurent l'idée qu'une des Algèbres (pour employer un mot à la mode) les plus simples et les plus anciennement connues, les corps finis ou corps de GALOIS, fournissait une partie de la solution. Tout d'abord si l'on considère des carrés latins de n cases de côtés on dénombre très aisément qu'on ne peut en avoir plus de n-1 orthogonaux deux à deux (par exemple, il est impossible d'avoir plus de 4 carrés latins orthogonaux deux à deux, chacun ayant 5 cases de côté). Si l'on peut avoir un ensemble de n-1 carrés latins de n cases de côté, on dira que l'on a construit un ensemble *complet* orthogonal de carrés latins. La méthode de STEVENS-BOSE permet de construire des ensembles complets orthogonaux pour tous les nombres n (nombre de cases d'un côté) égaux à une puissance d'un nombre premier soit p^k, c'est-à-dire 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 23 etc.

Prenons par exemple n = 5 et considérons la table d'addition modulo 5.

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

Au croisement de la ligne commençant par 3 et de la colonne commençant par 3 nous avons écrit 1 qui est le reste de la division de 3 + 3 par 5. Autrement dit, dans cette algèbre qui est un corps de GALOIS tous les nombres ordinaires sont remplacés par le reste de leur division par 5. Nous pouvons de même écrire une table de multiplication dans le même système.

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

(3 × 2 = 6 dont le reste de la division par 5 est 1)

Et maintenant écrivons 4 tables d'addition dans chacune desquelles la première colonne sera écrite dans un ordre différent déterminé par la règle suivante. Pour le premier carré, cette première colonne sera la suite des nombres 0, 1, 2, 3, 4, chacun étant multiplié (au sens de la multiplication que nous avons définie) par 1. Cela donnera naturellement 0, 1, 2, 3, 4.

Pour le second carré nous prendrons toujours 0, 1, 2, 3, 4, multipliés chacun par 2, ce qui d'après la table de multiplication que nous avons écrite donnera : 0, 2, 4, 1, 3.

Pour le troisième carré nous aurons 0, 3, 1, 4, 2 et pour le quatrième 0, 4, 3, 2, 1. Nous en déduisons les tables d'addition suivantes :

0	1	2	3	4		0	1	2	3	4	
1	2	3	4	0		2	3	4	0	1	
2	3	4	0	1	pour 1	4	0	1	2	3	pour 2
3	4	0	1	2		1	2	3	4	0	
4	0	1	2	3		3	4	0	1	2	

0	1	2	3	4		0	1	2	3	4	
3	4	0	1	2		4	0	1	2	3	
1	2	3	4	0	pour 3	3	4	0	1	2	pour 4
4	0	1	2	3		2	3	4	0	1	
2	3	4	0	1		1	2	3	4	0	

Naturellement chacune des tables forme un carré latin avec les 5 éléments 0, 1, 2, 3, 4 et il est facile de voir que ces 4 carrés latins sont orthogonaux deux à deux. Je vous ai dit qu'on ne pouvait faire mieux. Pour tout nombre premier p, on peut construire un corps de GALOIS de p éléments qui sont les restes de la division d'un nombre par p. Ainsi les restes de la division par 11 (soit 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) forment un corps de GALOIS dont on peut construire, de la même façon que pour 5, une table d'addition et une table de multiplication. Et les 10 tables d'addition obtenues comme ci-dessus constituent un ensemble complet orthogonal de carrés latins de 11 cases de côté. Pour les nombres p^k qui sont des puissances de nombres premiers (4, 8, 9...) il existe encore des corps de GALOIS ayant p^k éléments mais ils sont un peu plus compliqués à construire. Ces corps conduisent également à des ensembles complets orthogonaux. Par exemple pour 4 éléments A, B, C, D on a la table d'addition.

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

Ce qui signifie que dans l'algèbre ainsi définie B + C = D et C + C = A

et la table de multiplication :

B	C	D
C	D	B
D	B	C

Ce qui signifie que dans cette algèbre C × D = B

Selon les mêmes règles que pour 5 nous aurons les 3 tables d'addition suivantes :

A	B	C	D		A	B	C	D		A	B	C	D
B	A	D	C		C	D	A	B		D	C	B	A
C	D	A	B		D	C	B	A		B	A	D	C
D	C	B	A		B	A	D	C		C	D	A	B

qui forment 3 carrés latins orthogonaux deux à deux. Par conséquent tout corps de GALOIS conduit à un ensemble complet orthogonal de carrés latins. On démontre que les corps de GALOIS ont obligatoirement p^k éléments. On voit donc que l'on a une forme de la solution pour les carrés ayant p^k cases de côté.

Ici, deux questions se posent :

1/ pour les nombres de p^k cases de côté, a-t-on toutes les solutions au moyen des corps de GALOIS ?

2/ pour les nombres qui ne sont pas de la forme p^k, existe-t-il ou n'existe-t-il pas d'ensembles complets orthogonaux ?

Autrement dit : y a t-il réciprocité dans la propriété énoncée tout à l'heure ? L'existence d'un ensemble complet orthogonal implique-t-elle un corps de GALOIS ?

La question pour le moment n'est pas tranchée. On a là un exemple de problèmes extrêmement simple d'algèbre finie et dont la solution dépasse de beaucoup les possibilités actuelles.

On peut se montrer moins exigeant. Sans rechercher un ensemble complet orthogonal on peut se demander si, pour des carrés latins de n cases de côté, il existe au moins 2 carrés orthogonaux. (Nous avons vu que pour 6 cette exigence réduite ne pouvait être satisfaite). On a pu établir, en utilisant toujours le corps de GALOIS, qui joue évidemment dans cette théorie un rôle fondamental mais que l'on n'a pu encore tirer au clair, que pour les nombres n qui ne sont pas de la forme $2\ (2k + 1)$ il existe au moins 2 carrés latins orthogonaux. Par conséquent on sait qu'il existe, et on peut les construire, 2 carrés latins orthogonaux de 12 cases de côté, 2 carrés latins orthogonaux de 15 cases de côté ; on sait même qu'il existe 3 carrés latins orthogonaux deux à deux de 20 cases de côté.

Il ne subsistait, il y a encore peu de temps, de doute que pour les nombres de la progression arithmétique $2\ (2k + 1)$ soit 6, 10, 14, 18... Nous avons vu que pour 6 la vieille hypothèse d'EULER de l'impossibilité de l'orthogonalité s'était trouvée vérifiée en 1900. On pensait qu'il en était de même pour les autres nombres de la progression et que, par conséquent, on ne pouvait pas non plus avoir 2 carrés latins orthogonaux de 10, 14, 18 cases de côté. J'ai même tenté d'utiliser les machines électroniques actuelles pour résoudre le problème au moins pour 10. Hélas ! il aurait fallu les faire tourner pendant un temps dépassant largement les possibilités humaines (on m'a parlé d'un milliard d'années). J'ai d'ailleurs été heureux de constater que, malgré tout, dans certains domaines, l'esprit est supérieur à la machine puisqu'en avril 1959 un de mes élèves m'informait que la presse américaine publiait un compte-rendu d'une réunion de la Société Mathématique Américaine où R.C. BOSE avait établi l'existence d'un couple de carrés latins orthogonaux de 10 cases de côté, ainsi que d'un couple de 22 cases de côté. Il pourrait donc se faire que 6 soit dans la progression $2\ (2k + 1)$ le seul nombre pour lequel l'impossibilité d'un couple orthogonal existe et que ce fait soit une propriété, qui pour le moment est mystérieuse, de 6. Nous avons jusqu'à présent beaucoup parlé d'algèbre. Parlons maintenant de statistique. Prenons par exemple 2 carrés latins orthogonaux de 4 cases de côté.

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

Imaginons que le grand carré représente un champ disons de 400 mètres de côté, chaque petit carré représentant une parcelle de 100 mètres de côté. Ce champ va servir de terrain d'expérience pour étudier l'influence de 2 sortes d'engrais (un engrais potassique et un engrais azoté) sur la culture du blé. Les lettres latines vont représenter un niveau d'engrais potassique dans l'ordre suivant :

A niveau inférieur, puis B, puis C, enfin D niveau supérieur. Les lettres grecques représenteront de la même façon les différents niveaux d'engrais azoté : depuis α niveau inférieur jusqu'à δ niveau supérieur. Le champ sera ensuite ensemencé, la même quantité de blé étant semée dans chacune des 16 parcelles, chacune d'elles ayant reçu au préalable un engrais correspondant au couple de lettres qui y figure. Dans la parcelle Aγ (par exemple celle du coin inférieur droit) on aura mis la plus faible quantité d'engrais potassique et une quantité d'engrais azoté qui sera celle immédiatement inférieure à celle du niveau supérieur. Ensuite la récolte fournira 16 chiffres : le poids de blé recueilli dans chacune des parcelles. Le problème est de comparer l'influence des 2 sortes d'engrais sur la récolte. Appelons x_{ij} la quantité de blé recueillie dans la parcelle située sur la i^e ligne et la j^e colonne : cette parcelle aura reçu un engrais déterminé par le "plan d'expériences" établi. Par exemple la parcelle donnant x_{32} aura reçu l'engrais potassique au niveau D et l'engrais azoté au niveau γ.

x_{ij} sera la somme des 5 quantités :

1/ une quantité due à la variation de la fertilité du sol suivant une composante horizontale (parallèle à la base du grand carré) ;

2/ une quantité due à la variation de la fertilité du sol suivant une composante verticale (parallèle à la hauteur du grand carré) ;

3/ une composante due à l'influence éventuelle de l'engrais potassique ;

4/ une composante due à l'influence éventuelle de l'engrais azoté ;

5/ une dernière composante due aux influences n'entrant pas dans les 4 causes précédentes et que nous appellerons (la chose peut se discuter) composante aléatoire.

A cause de la disposition orthogonale des carrés latins utilisés, le plan d'expériences ainsi construit permet d'éliminer les 2 premières influences ainsi que la dernière pour ne conserver en les séparant que la troisième et la quatrième. La fertilité du sol constitue ici le facteur certain à éliminer. L'influence des deux engrais constitue les facteurs certains à contrôler.

Voici le procédé que l'on utilisera :

Nous avons défini x_{ij} Introduisons maintenant les quantités suivantes :

$x_{i.}$ avec i prenant les valeurs 1, 2, 3, 4. Ce sont les moyennes des quantités x_{ij} situées dans la i^e ligne.

$x_{.j}$ de même avec j variant de 1 à 4 ce sont les moyennes des quantités x_{ij} situées dans la j^e colonne.

x_t avec t prenant les différentes valeurs A, B, C, D vont être les moyennes des x_{ij} dans les 4 cases contenant le même traitement potassique A, B, C, ou D. x_A par exemple sera la somme divisée par 4 des résultats de la récolte dans les cases situées sur la première diagonale.

et x_τ avec π prenant les différentes valeurs α, β, γ, δ sont des moyennes des x_{ij} dans les 4 cases contenant le même traitement azoté soit α, β, γ, δ.

$x_{..}$ sera la moyenne générale, soit la somme des résultats divisés par 16. Ces différentes notations vont nous permettre de définir :

$$S^2 = \frac{1}{3} \sum (x_{ij} - x_{i.} - x_{ij} - x_t - x_\tau + 3\ x_{..})^2$$

$$S_t^2 = \frac{1}{3} \sum_t 4\ (x_t - x_{..})^2 \qquad S_\tau^2 = \frac{1}{3} \sum_\tau 4\ (x_\tau - x_{..})^2$$

Dans S^2 qui est la somme de 16 termes, l'un d'entre eux, celui relatif à x_{32} par exemple, sera :

$$(x_{32} - x_{3} - x_{.2} - x_D - x_\gamma + 3\ x_{..})^2$$

Les 2 valeurs de t et π, soient D et γ, sont données par le plan d'expériences. Les résultats expérimentaux vont donc conduire à 3 valeurs numériques que l'on peut calculer. La théorie de l'analyse de la variance a permis sous certaines hypothèses (indépendance aux sens du calcul des probabilités, des quantités x_{ij}, normalité des x_{ij} c'est-à-dire que leur loi de probabilité est de LAPLACE GAUSS, identité de l'écart type de chacune d'elles) de calculer la loi de répartition des deux quantités $\frac{s_t^2}{S^2}$ et $\frac{s_\pi^2}{S^2}$ dans le cas où l'engrais potassique et l'engrais azoté sont sans influence. C'est ce que l'on appelle la loi de SNEDECOR (SNEDECOR ayant, en hommage à Sir Ronald FISHER, appelle F le quotient $\frac{s_t^2}{S^2}$ ou $\frac{s_\pi^2}{S^2}$).

Dans ce cas $\frac{s_t^2}{S^2}$ comme $\frac{s_\tau^2}{S^2}$ ont une valeur probable voisine de l'unité et l'écart à l'unité à une probabilité donnée par la table de SNEDECOR. Ici intervient ce qu'en statistique on appelle le seuil de signification. Dans le cas en question où il y a 4 lignes, 4 colonnes, 4 niveaux du premier engrais et 4 niveaux du second engrais, il y a une probabilité de $\frac{1}{20}$ pour que le quotient F soit supérieur à 9,28 ou inférieur à $\frac{1}{9,28}$ et une probabilité de $\frac{1}{100}$ pour que F soit supérieur à 29,46 ou inférieur à $\frac{1}{29,46}$. $\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{100}$ sont en général les seuils de signification adoptés. Supposons que l'on soit arrivé par le calcul à trouver $\frac{s_t^2}{S^2}$ égal à 12,45. Si l'on travaille avec le seuil de signification de $\frac{1}{20}$ cela entraîne que l'on accepte l'hypothèse de l'influence du traitement représenté par les lettres latines, c'est-à-dire ici de l'engrais potassique. Si ce traitement était sans influence il y aurait une probabilité égale à $1 - \frac{1}{20}$ pour que $\frac{9,28}{1} < \frac{s_t^2}{S^2} < 9,28$. L'évènement en question aurait donc une probabilité inférieure à $\frac{1}{20}$ ce qui amène le rejet de l'hypothèse de non-influence étant donné nos conventions.

Si l'on était plus exigeant en adoptant le seuil de $\frac{1}{100}$ pour accepter l'hypothèse de l'influence du traitement potassique il faudrait que l'on ait :

$$\frac{s_t^2}{S^2} < \frac{1}{29,46} \text{ ou } \frac{s_t^3}{S^2} > 29,46$$

Dans le cas actuel, avec un quotient de 12,45 et un seuil de signification de $\frac{1}{100}$ on ne peut donc accepter l'hypothèse de l'influence de l'engrais potassique : le quotient $\frac{s_t^2}{S^2}$ s'écarte trop peu *significativement* de l'unité pour qu'on puisse accepter l'hypothèse.

L'idée fondamentale dans ces méthodes d'analyses de variance est donc de rejeter une hypothèse, si dans cette hypothèse l'évènement observé a une probabilité trop faible de se produire (trop faible voulant dire inférieure au seuil de signification adopté à l'avance).

La méthode décrite est naturellement susceptible d'extensions à des ensembles de carrés latins orthogonaux deux à deux. On pourrait donc, encore dans le cas des carrés de 4 cases de côté, ajouter un troisième carré latin orthogonal aux 2 précédents, c'est-à-dire "tester", pour employer ce néologisme, l'influence d'un troisième engrais, par exemple de phosphates.

Je vous ai décrit ici un modèle de plan d'expériences agricole (c'est dans ce domaine qu'à la station expérimentale de Rothamstead Sir Ronald FISHER l'a tout d'abord expérimenté). Mais il va de soi que cette décomposition de la variance par l'emploi de carrés latins orthogonaux rend les mêmes services dans d'autres domaines ; la psychologie, la sidérurgie par exemple, où on les a souvent utilisés ?

Je crois donc pouvoir dire que le lien entre l'algèbre et la statistique est établi par le plan d'expériences.

DISCUSSION

(Président ; M. DELAPORTE)

M. le Président remercie M. DUGUE de son brillant exposé sur les plans d'expériences que, par son introduction, il nous a rendus beaucoup plus vivants que par l'aspect purement mathématique habituel.

M. LARRAS demande si, dans l'application agronomique, la fertilité est supposée varier linéairement avec la distance verticale, ou avec la distance horizontale.

M. DUGUE répond qu'il y a dans cet exemple, entre x et y, une indépendance qui est fondamentale. C'est une sorte de quasi-linéarité mais pas par rapport à chacune des variables.

M. DERVIL demande si la méthode d'analyse des résultats, qui découle du plan d'expérience proposé, suppose une indépendance complète d'action entre les deux carrés latins considérés - chacun des facteurs tels que A, B, C, D, devant agir indépendamment de chacun des facteurs , , , .

M. DUGUE ayant répondu par l'affirmative, M. DERVIL estime que cette supposition est loin d'être en accord avec les influences des facteurs de productivité agricoles.

M. DUGUE remarque que la statistique est fondée sur des suppositions de ce genre.

M. GUILLOT demande quel est l'intérêt de mélanger les deux engrais : que gagne-t-on par rapport au processus qui consisterait à faire deux expériences séparées, chacune avec un seul engrais ?

M. DUGUE répond que l'intérêt du mélange qui aboutit à ce plan d'expériences est dans l'économie des résultats : le gradient de fertilité horizontale et le gradient de fertilité verticale ont, chacun, quatre niveaux, puisqu'ils sont représentés par quatre champs, ce qui donne en tout 16 résultats. Si l'on employait un plan factoriel ordinaire, il faudrait 4 x 4 x 4 x 4 = 256 résultats.

M. le Président remercie encore M. DUGUE.

Il remercie aussi tous les conférenciers, les personnes qui sont intervenues dans les discussions et plus particulièrement la Société Hydrotechnique de France d'avoir bien voulu introduire, dans la séance qu'il a présidée, des questions de statistique, auxquelles il est particulièrement attaché.