Revue de statistique appliquée

R. Loutfoullah

Méthodes d'extrapolation à court terme des chroniques passées (étude n° 215)

Revue de statistique appliquée, tome 11, nº 2 (1963), p. 21-38

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1963__11_2_21_0>

MÉTHODES D'EXTRAPOLATION A COURT TERME DES CHRONIQUES PASSÉES

(ÉTUDE N° 215)

par R. LOUTFOULLAH

Société des Pétroles SHELL-BERRE

1 - ENONCE ET POSITION DU PROBLEME -

A une époque où les modifications des conditions du marché, tant dans sa structure que dans son aspect technique, sont rapides et ne laissent qu'une marge réduite d'adaptation à posteriori, la prévision économique revêt une importance fondamentale sur laquelle il est inutile d'insister.

Les méthodes de prévisions doivent donc être aussi affinées que possible.

Il existe deux grandes classes de méthodes de prévisions à court et moyen terme (jusqu'à 4 ou 5 ans). La première ligne de pensée consiste à supposer l'existence d'une bonne stabilité de comportement des agents économiques et donc des relations économiques élémentaires. On cherche alors, par l'analyse du proche passé, à bâtir un modèle <u>économétrique</u> explicitant les relations entre le phénomène particulier à étudier et les facteurs - endogènes et exogènes - qui le gouvernent.

Cette voie est la meilleure parce qu'elle permet d'expliquer l'origine des niveaux de prévisions.

Elle est aussi plus précise et plus souple, mais elle s'avère en général difficile et coûteuse.

Dans la deuxième classe de méthode, on postule l'existence d'une certaine inertie des phénomènes globaux. On s'autorise donc l'extrapolation des chroniques du passé, ajustées au préalable par une fonction analytique.

Une telle attitude est acceptable dans la mesure où, d'une part, on a reconnu une certaine régularité dans l'évolution passée du processus et où, d'autre part, il existe des raisons suffisantes de croire à une modification relativement lente dans l'évolution des paramètres causals du phénomène.

De nombreuses méthodes d'ajustement ont été proposées mais il est évident que ces méthodes, que l'on peut qualifier de descriptives, n'ont qu'une validité relative et l'expérience montre que les extrapolations doivent être faites avec prudence. Les prévisions ne pourront donc être considérées comme valables que pour le court terme.

2 - DESCRIPTION GENERALE DES METHODES D'EXTRAPOLATION -

La fonction représentant l'évolution temporelle du phénomène à étudier est considérée comme étant la somme de trois fonctions.

a) Une fonction de tendance, ou trend, traduisant l'évolution moyenne du phénomène sur la période de référence (qui peut ne pas être composée d'années consécutives).

b) Une fonction de modulation saisonnière, périodique et, en général, de période 1 an.

(Au point de vue terminologie : une suite de 12 mois commençant au 1er janvier sera dite année légale ; toute autre suite de 12 mois sera dite année fictive).

c) Une composante aléatoire supposée distribuée normalement.

Le trend sera, en général, ajusté par une courbe simple - droite, parabole ou exponentielle - à l'aide de la méthode des moindres carrés.

Le choix de la nature de la courbe sera facilité par l'examen graphique du phénomène étudié.

La modulation saisonnière sera déterminée, en général, par ajustement d'une fonction convenable aux écarts entre réalisation et trend.

3 - EVALUATION DE LA VALIDITE D'UNE METHODE D'EXTRAPOLATION -

Pour tester la validité d'une méthode, on comparera les résultats entre les prévisions d'une année test et les valeurs réelles de cette même année.

Deux valeurs type ont été utilisées.

1/ Le biais relatif =

$$\frac{\text{moyenne des écarts mensuels entre prévisions et réalisations}}{\text{réalisation moyenne mensuelle}}$$

Soit y_j et v_j la prévision et la valeur observée pour le mois j d'une certaine année.

Le résidu mensuel est : $r_j = v_j - y_j$.

On désigne par $\bar{y}$, $\bar{v}$ et $\bar{r}$ les moyennes arithmétiques sur 12 mois des quantités précédentes.

Par définition, le biais relatif s'écrit :

$$b = \frac{\bar{r}}{\bar{v}} = \frac{\sum_{j=1}^{12} r_j}{\sum_{j=1}^{12} v_j} \tag{1}$$

2/ La dispersion relative $= \dfrac{\text{écart type des écarts mensuels}}{\text{réalisation réelle mensuelle}}$

Le moment réduit d'ordre deux des résidus s'écrit :

$$m_2 = \frac{\overline{(r_j^2)}}{(\bar{v})^2} = \frac{12 \sum_{j=1}^{12} r_j^2}{\left(\sum_{j=1}^{12} v_j\right)^2} \qquad (2)$$

La dispersion relative s'écrit :

$$\sigma^2 = \frac{\overline{(r_j - \bar{r})^2}}{(\bar{v})^2} = m_2 - b^2 \qquad (3)$$

D'où :

$$\sigma = \sqrt{m_2 - b^2} \qquad (4)$$

Une méthode de faible biais relatif sera dite juste.
Une méthode de faible dispersion relative sera dite précise.

Différents seuils pour ces paramètres ont été choisis de manière à accorder le résultat des tests avec le sentiment de ce que l'on peut attendre d'une méthode d'extrapolation.

Jugement de la méthode	Satisfaisante	Moyenne	Mauvaise	A rejeter
Biais relatif......	moins de 2 %	de 2 à 5 %	de 5 à 8 %	supérieur à 8 %
Dispersion relative	moins de 5 %	de 5 à 8 %	de 8 à 12 %	supérieur à 12 %

Deux méthodes ont été testées pour plusieurs produits à grande diffusion et pour plusieurs périodes de référence.

4 - METHODES D'EXTRAPOLATION UTILISEES -

4. 1 - Méthode du trend moyenné.

4. 1. 1 - Généralités.

Cette méthode consiste en un schéma additif dans lequel on dégage un trend global pour l'ensemble de toute la chronique mensuelle et un terme résiduel incluant à la fois les variations saisonnières et les fluctuations aléatoires.

L'ajustement du trend global aura lieu pour des valeurs caractéristiques choisies dans chaque année. Dans le schéma détaillé, on précise ces valeurs. L'extrapolation se fera séparément sur le trend et les résidus.

4. 1. 2 - Schéma mathématique.

1/ *Pondérations des chroniques.*

L'extrapolation s'effectue sur des réalisations ramenées à des mois de 30 jours.

Ainsi, les réalisations des mois de 31 jours sont multipliées par $\frac{30}{31}$, celles du mois de février par $\frac{30}{28}$ ou $\frac{30}{29}$ suivant que l'année n'est pas ou est bissextile, inchangées pour les mois de 30 jours.

On appelle y(t) la réalisation du mois légal à l'époque t, u(t) celle du mois pondéré, $\lambda(t)$ le coefficient de pondération.

On a :

$$u(t) = \lambda(t)\, y(t) \qquad (1)$$

Cette correction paraît utile car elle affecte de 3 % au moins les données brutes mensuelles, ce qui est de l'ordre de grandeur du biais dans les cas assez bons.

2/ *Courbe extrapolée.*

On admet que u(t) est la somme d'un trend T(t) s'étendant sur plusieurs années, d'une composante saisonnière s(t) et de fluctuations aléatoires $\varepsilon(t)$, soit :

$$u(t) = T(t) + s(t) + \varepsilon(t) \qquad (2)$$

La périodicité des fluctuations saisonnières et le caractère aléatoire de $\varepsilon(t)$ conduit à poser :

$$\sum_{j=1}^{12N} [s(j) + \varepsilon(j)] \# 0 \qquad (3)$$

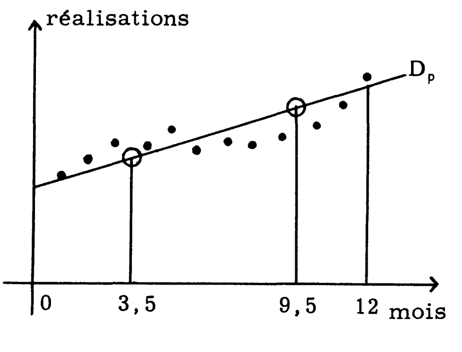
(N est le nombre d'années sur lequel on opère, j le numéro du mois).

Donc, on peut penser à un ajustement séparé du trend T(t) par la méthode des moindres carrés.

Toutefois, cet ajustement se fera non sur les valeurs u(j) mais sur des valeurs caractéristiques déterminées pour chaque année prise isolément.

3/ *Ajustement d'un trend annuel sur les réalisations pondérées - Détermination des valeurs caractéristiques.*

Dans un marché stable, le trend général T(t) considéré sur 12 mois ne présente pas de courbure notable.



On ajustera donc une droite d'équation :

$$D_p(j) = a_p j + b_p \qquad (4)$$

pour le mois j de l'année p.

La méthode des moindres carrés donne :

$$a_p = \frac{\sum_{j=1}^{12} (u_j - \bar{u})(j - \bar{j})}{\sum_{j=1}^{12} (j - \bar{j})^2} = \frac{\mathrm{Cov}(u_j, j)}{\mathrm{Var}(j)} \tag{5}$$

$$b_p = \bar{u}_j - a_p \bar{j} \tag{6}$$

Les valeurs choisies pour l'ajustement du trend T(t) seront celles des valeurs caractéristiques de la séquence 1,2, ..., 12, soit :

$$D_p(3,5) \quad \text{et} \quad D_p(9,5)$$

Ces 2 points déterminent complètement D_p, et, pour des années p, p+1, p+2, etc. en séquences, les intervalles entre ces points sont égaux : 3,5 - 9,5 - 15,5 - 21,5 etc.

Pour N années de données, on dispose ainsi de 2 N valeurs caractéristiques. Soit D_I leur abscisse respective I = 1, 2, ..., 2 N.

4/ *Ajustement du trend T(t)*

On ajustera une courbe d'une certaine nature sur les valeurs correspondant aux D_I.

On dispose 4 modèles :

a) Ajustement linéaire par les moindres carrés.

b) Ajustement parabolique par les moindres carrés.

c) Ajustement mixte. C'est la moyenne arithmétique des 2 ajustements précédents.

d) Ajustement exponentiel.

Pour ce dernier, on détermine les coefficients A et k de $A e^{kt}$ en faisant un ajustement linéaire sur les quantités Log D_I ce qui donne la formule :

$$T(I) = e^{(\alpha I + \beta)} = e^{\beta} e^{\alpha I} \tag{7}$$

Le résultat n'est pas le même que celui obtenu en minimisant directement :

$$[D_I - A e^{kI}]^2$$

En pratique, on aboutit néanmoins à des valeurs numériques voisines au 4ème chiffre près.

5/ *Calcul de la composante saisonnière*

Elle est définie par l'égalité :

$$r_{p,j} = v_{p,j} - T_{p,j} \tag{8}$$

On prend les composantes des mois correspondants j pour les années p données.

Diverses méthodes d'extrapolations ont été proposées :

a) Schéma multiplicatif.

Se fondant sur certaines constatations telles que l'atténuation exponentielle des fluctuations saisonnières, on a essayé de dégager une progression géométrique moyenne des $r_{p,j}$ pour déterminer celle de l'année de prévision.

Les résultats ont été mauvais.

b) Une méthode d'extrapolation par régression linéaire des $r_{p,j}$ a été tentée.

Les résultats étaient assez instables.

c) La moyenne arithmétique des $r_{p,j}$ a donné les meilleurs résultats à cause de sa stabilité.

6/ *Repondération des résultats.*

Ces prévisions sont relatives à des mois de 30 jours. Il est nécessaire de les réajuster pour des mois légaux. On divise donc les prévisions mensuelles u_j par le coefficient λ_j défini au § 4. 1. 1.

4. 1. 3 - Résultats obtenus.

Les produits testés sont au nombre de deux, à l'échelle du marché national. Nous les désignerons par Produit I et Produit II.

Les années utilisées sont :

N°1 1954
N°2 1955
N°3 1956
N°4 1957
N°5 1958
N°6 1959

pour les prévisions mensuelles de l'année N°7, soit 1960.

On a procédé aussi à quelques contrôles pour les années 5 et 6.

Les résultats suivants ont été obtenus :

PRODUIT I -

Trend linéaire

(1, 2, 3, 5, 6)	$\longrightarrow$ 7	b = +0,075 %	σ = 4,27 %
(2, 3, 5, 6)	$\longrightarrow$ 7	b = +1,54 %	σ = 4,27 %
(1, 2, 3, 5)	$\longrightarrow$ 6	b = -3,41 %	σ = 5,30 %

Trend parabolique

(1, 2, 3, 5, 6)	$\longrightarrow$ 7	b = +5,22 %	σ = 4,40 %
(2, 3, 5, 6)	$\longrightarrow$ 7	b = +2,38 %	σ = 4,57 %
(1, 2, 3, 5)	$\longrightarrow$ 6	b = +3,74 %	σ = 5,52 %

Trend $\frac{1}{2}$ (linéaire parabolique)

(1, 2, 3, 5, 6)	$\longrightarrow$ 7	b = 3,05 %	σ = 4,50 %
(2, 3, 5, 6)	$\longrightarrow$ 7	b = 1,96 %	σ = 4,57 %
(1, 2, 3, 5)	$\longrightarrow$ 6	b = 0,17 %	σ = 5,30 %

Trend exponentiel

(2, 3, 5, 6)	$\longrightarrow$ 7	b = 0,82	σ = 4,57

PRODUIT II.

Trend linéaire

(1, 2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = - 3,27 %	σ = 3,69 %
(2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = - 3,28 %	σ = 3,71 %
(1, 2, 3, 5) $\longrightarrow$ 6	b = - 2,14 %	σ = 4,64 %
(1, 2, 3, 4) $\longrightarrow$ 5	b = - 1,30 %	σ = 3,51 %

Trend parabolique

(1, 2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = - 2,14 %	σ = 3,68 %
(2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = - 1,99 %	σ = 3,69 %
(1, 2, 3, 5) $\longrightarrow$ 6	b = - 0,87 %	σ = 4,58 %
(1, 2, 3, 4) $\longrightarrow$ 5	b = - 0,55 %	σ = 3,56 %

Trend $\frac{1}{2}$ (linéaire + parabolique)

(1, 2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = - 2,27 %	σ = 3,80 %
(2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = - 2,64 %	σ = 3,70 %
(1, 2, 3, 5) $\longrightarrow$ 6	b = - 1,51 %	σ = 4,60 %
(1, 2, 3, 4) $\longrightarrow$ 5	b = - 0,92 %	σ = 3,53 %

Remarques sur ces résultats.

Au sens de la grille de référence du § 3, 16 résultats paraissent satisfaisants, 6 résultats moyens.

Avec la définition donnée du biais :

$$b = \frac{\Sigma \text{valeurs vraies} - \Sigma \text{valeurs calculées}}{\Sigma \text{ valeurs vraies}} \tag{9}$$

on constate que les prévisions du Produit I sont pessimistes, tandis que celles portant sur le produit II sont légèrement optimistes.

On voit également que les extrapolations sur le Produit II donnent des résultats plus voisins de la réalité.

Ces faits s'expliquent si on considère la stabilité des marchés de ces deux produits.

4. 2 - Méthode de la modulation bimensuelle des valeurs réduites.

4. 2. 1 - Généralités.

Certaines constatations portent à croire que les modulations saisonnières sur des séquences de 12 mois apparaîtront mieux sur les valeurs mensuelles réduites (c'est-à-dire le rapport de chaque réalisation mensuelle à la somme annuelle) que sur les réalisations brutes. La chronique des valeurs mensuelles relatives à chaque année aura ainsi un trend général horizontal et les extrapolations opérées sur cette chronique auront un caractère relatif, c'est-à-dire saisonnier.

Ceci conduit à une extrapolation séparée des totaux annuels et à la répartition de la somme ainsi prévue sur les 12 mois de l'année de prévision. Pour cette répartition, on utilise les modulations saisonnières précédemment décrites.

De plus, une somme annuelle suit une loi plus régulière qu'une chronique composée de mois de même nom et, de ce fait, est plus facile à extrapoler avec un modèle simple.

En ce qui concerne la modulation saisonnière, on la fera porter sur des sommes bimensuelles, ce qui permet de s'affranchir de fêtes mobiles.

En outre, les fluctuations de réalisations bimensuelles sont moins corrélées que dans le cas de réalisations mensuelles.

4. 2. 2 - Schéma mathématique.

Les différentes étapes de calcul sont les suivantes :

1/ Pondération des réalisations en les ramenant à des mois de 30 jours. Elle se fait comme pour la méthode du Trend moyenné $u_{p,j} = \lambda_j y_{p,j}$ la réalisation pondérée (p numéro de l'année, j numéro du mois).

2/ Somme annuelle des réalisations pondérées :

$$\sum_{j=1}^{12} u_{p,j} = S_p \qquad (1)$$

3/ Extrapolation de la chronique des réalisations annuelles. Soit $S_1, S_2, \ldots, S_j, \ldots$ etc.

L'extrapolation se fait par un schéma, soit :

a) linéaire,
b) parabolique,
c) mixte,
d) exponentiel.

Le principe est ici le même que celui exposé pour la méthode du trend moyenné au 4/ du § 4. 1. 2.

4/ Calcul des rapports :

$$\frac{u_{p,j}}{S_p} = m_{p,j} \qquad j = 1, 2, \ldots, 12 \qquad (2)$$

Ils représentent la contribution, ramenée à l'unité, de chaque mois dans l'année.

On a :

$$\sum_{j=1}^{12} m_{p,j} = 1 \qquad (3)$$

5/ Détermination des contributions bimensuelles :

$$m_{p,j} + m_{p,j+1} = q_{p,j} \quad \text{avec} \quad (j = 1, 3, 5, 7, 9, 11) \qquad (4)$$

Pour la commodité des notations, on posera :

$$j = 2i - 1 \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

et on aura les 6 valeurs $q_{p,i}$ fixé par i.

On a évidemment :

$$\sum_{i=1}^{6} q_{p,i} = 1 \tag{5}$$

6/ On admet une périodicité annuelle des 6 valeurs $q_{p,i}$ autour d'un trend linéaire annuel.

Le fait aurait été plus difficile à admettre pour les 12 valeurs $m_{p,j}$. Nous poserons donc :

$$q_{p,i} = z_{p,i} + \eta_{p,i} \tag{6}$$

dans laquelle :

$$z_{p,i} = a_p i + b_p + \alpha_p \frac{\cos \pi i}{3} + \beta_p \frac{\sin \pi i}{3} \tag{7}$$

et $\eta_{p,i}$ une fluctuation aléatoire.

Voici quelques remarques sur cette forme d'ajustement. Les droites $Z = a_p x + b_p$ passeront respectivement par les points :

$$\begin{pmatrix} x = 3,5 \\ Z = \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x = 9,5 \\ Z = \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x = 15,5 \\ Z = \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \ldots \text{etc.}$$

L'ordonnée de ces points reste constante.

En effet, la théorie nous apprend que l'ajustement d'une fonction par les moindres carrés donne une moyenne résiduelle nulle lorsque la fonction à ajuster contient un paramètre additif.

Pour le voir, considérons une fonction à k + 1 paramètres : $\alpha_o, \alpha_1 \ldots \alpha_k$, le paramètre α_o étant additif, soit :

$$\alpha_o + \Phi(i, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$$

la minimisation de :

$$\sum_i [y_i - (\alpha_o + \Phi(i, \alpha_1, \ldots, \alpha_k))]^2$$

conduit à annuler les dérivées partielles par rapport aux α, en particulier par rapport à α_o.

D'où l'égalité :

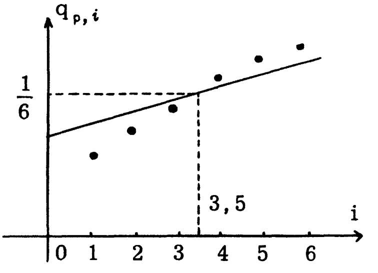
$$\sum_i (y_i - \alpha_o - \Phi(i, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)) \equiv \sum_i \varepsilon_i = 0$$

Ce qui démontre la propriété.

Dans le présent cas, on a b_p comme paramètre additif.

Pour la (k + 1)ème année, on a donc :

$$\sum_{i=6k+1}^{6k+6} (q_{p,i} - z_{p,i}) = 0$$



mais :

$$\sum_{i=6k+1}^{6k+6} \cos \frac{\pi}{3}\, i = 0 \qquad \sum_{i=6k+1}^{6k+6} \sin \frac{\pi}{3}\, i = 0$$

d'où :

$$\frac{1}{6} = a_p \times (3,5 + 6k) + b_p$$

ce qui démontre la propriété.

La partie linéaire de chaque ajustement partiel passe bien par les points indiqués.

Les droites de régression simple prises pour chaque année p passeront respectivement par les points précédents.

Mais les pentes des droites de régression simples et modulées ne seront pas les mêmes.

Calcul d'ajustement.

On minimise :

$$\sum_{i=1}^{6} \left[q_{p,i} - a_p i - b_p - \alpha_p \cos \frac{\pi}{3}\, i - \beta_p \sin \frac{\pi}{3}\, i \right]^2 \qquad (8)$$

On est conduit au système :

$$\left.\begin{aligned} 91\,a + 21\,b + 3\alpha - 3\sqrt{3}\beta &= \sigma_N \\ 21\,a + 6\,\beta &= 6\,\bar{p} \\ 3\,a + 3\,\alpha &= \sigma_c \\ -3\sqrt{3}\,\alpha + 3\,\beta &= \sigma_s \end{aligned}\right\} \quad \text{(on a supprimé l'indice p pour alléger l'écriture)} \qquad (9)$$

Avec :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_N &= \sum_{i=1}^{6} i\, q_{p,i} \\ 6\bar{p} &= \sum_{i=1}^{6} q_{p,i} \\ \sigma_c &= \sum_{i=1}^{6} q_{p,i} \cos i \frac{\pi}{3} \\ \sigma_s &= \sum_{i=1}^{6} q_{p,i} \sin i \frac{\pi}{3} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

D'où :

$$\left.\begin{aligned}
a &= \frac{2}{11}\left[\sigma_N - 21\bar{p} - \sigma_c + \sqrt{3}\,\sigma_s\right] \\
b &= \bar{p} - 3{,}5\,a \\
\alpha &= \frac{\sigma_c}{3} - a \\
\beta &= \frac{\sigma_s}{3} + a\sqrt{3}
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Remarque :

Supposons que l'on fasse subir une translation de la multiple période au coefficient i, en remplaçant i par i + 6 k.

Les quantités $\bar{p}$, σ_c, σ_s, a, α, restent inchangées.

Seules b et σ_N sont modifiées.

Pour le voir, il suffit d'examiner la forme quadratique génératrice des équations normales :

$$\sum_{i=1}^{6}\left[q_i - a_i - (b + 6\,ak) - \alpha\cos\frac{\pi}{3}\,i - \beta\sin\frac{\pi}{3}\,i\right]^2 \quad (12)$$

7/ Extrapolation de la pente a_p pour l'année de prévision : Il paraît difficile d'avoir une idée de la loi d'extrapolation de a. On a finalement opté pour un compromis :

$a_{prévu} = \frac{1}{2}$[moyenne des pentes + prévision des pentes par régression linéaire] ... (13)

D'où :

$$b_{prévu} = \bar{p} - 3{,}5\,a_{prévu}$$

8/ Prévision de la modulation : La modulation est définie par son amplitude et sa phase.

Amplitude.

On admet une variation (qui doit en principe être une fonction décroissante) exponentielle des amplitudes de la modulation saisonnières définies par :

$$s_{p,i} = \alpha_p\cos\frac{\pi}{3}\,i + \beta_p\sin\frac{\pi}{3}\,i \quad (15)$$

L'amplitude s'écrit :

$$A_p = \sqrt{\alpha_p^2 + \beta_p^2} \quad (16)$$

On fait la prévision en posant :

$$A_p = C\,e^{hp} \quad (17)$$

et en ajustant par les moindres carrés Log C + hp sur les quantités Log A_p.

<u>Phase</u> :

On pose :

$$s_{p,i} = A_p \sin\left(\frac{\pi}{3} i + \varphi\right) \tag{18}$$

ce qui donne :

$$\left.\begin{aligned} \beta &= A \cos \varphi \\ \alpha &= A \sin \varphi \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

on en déduit φ_p pour chaque année p.

La phase ne subit en principe que des variations aléatoires puisqu'elle ne dépend que du produit étudié, de sorte que la phase prévue sera prise égale à la moyenne des phases connues.

$$\varphi_{\text{prévue}} = \text{moyenne des } \varphi_p = \bar{\varphi}_p \tag{20}$$

La forme prévisionniste des réalisations bimensuelles réduites s'écrira donc :

$$z_{i\ \text{prévu}} = a_{\text{prévu}} i + b_{\text{prévu}} + A_{\text{prévu}} \sin\left(\frac{\pi}{3} i + \varphi_{\text{prévu}}\right) \tag{21}$$

9/ Passage aux pourcentages mensuels : z_i est la somme de 2 mois consécutifs.

avec :

$$\left.\begin{aligned} & m_j + m_{j+1} = z_i \\ & j = 1, 3, 5, 7, 9, 11 \\ & i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

La correspondance entre i et j est donc :

$$\frac{j + 1}{2} = i$$

Dans l'expression de z_i on remplace donc i par $\frac{j+1}{2}$ et on résout l'équation linéaire aux différences finies.

$$x(j) + x(j + 1) = z(j) \tag{23}$$

La solution générale de l'équation sans second membre s'écrit :

$$C(-1)^j$$

où C est une constante arbitraire.

Pour trouver une solution particulière de l'équation avec second membre, on identifie les 2 membres de l'égalité (23) dans laquelle on pose :

$$x(j) = \gamma j + \delta + \mu \cos j \frac{\pi}{6} + \nu \sin j \frac{\pi}{6} \tag{24}$$

ce qui donne par identification des 2 membres de l'équation fonctionnelle en x :

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{\text{prévu}} &= \frac{a}{4} \text{ prévu} \\
\delta_{\text{prévu}} &= \frac{1}{2}\left[b + \frac{a}{4}\right] \text{prévu} \\
\mu_{\text{prévu}} &= \frac{1}{2}\left[\frac{-\alpha}{2+\sqrt{3}} + \beta\right] \text{prévu} \\
\nu_{\text{prévu}} &= \frac{1}{2}\left[\alpha + \frac{\beta}{2+\sqrt{3}}\right] \text{prévu}
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

La solution générale de (23) s'écrit donc :

$$x(j) = Cx(-1)^j + \gamma j + \delta + \mu \cos j \frac{\pi}{6} + \nu \sin j \frac{\pi}{6} \tag{26}$$

Cette fonction est discontinue en j à cause de la présence de $(-1)^j$. La constante C se détermine par des conditions sur la parité des mois.

Si l'on constate l'alternance systématique d'une certaine part de réalisation d'un mois au suivant, et que la somme des deux mois consécutifs reste néanmoins une fonction analytique de j, le fait se traduit par l'existence d'une partie non analytique dans la solution : $(-1)^j C$.

Ce terme s'interprète donc comme un phénomène de transfert bimensuel systématique. Sous cette forme, l'idée n'est pas acceptable car les phénomènes de transfert sont accidentels.

On peut également chercher, pour chaque groupe de 2 mois, une autre relation entre x et x_{j+1}.

Associée à la relation (23), on obtient 6 systèmes de 2 équations à 2 inconnues.

Mais, cela complique le schéma de calcul pour un gain de précision problématique.

Pour la commodité du programme de calcul, on a pris la solution analytique :

$$x(j) = j\gamma + \delta + \mu \cos j \frac{\pi}{6} + \nu \sin j \frac{\pi}{6} \tag{27}$$

On en déduit les prévisions mensuelles pondérées par :

$$(u_{\text{prévu}})\, j = S_{\text{prévu}} \times x_j \tag{28}$$

10/ On passe des réalisations pondérées aux réalisations pour les mois légaux par l'opération :

$$y_j = \frac{u_j}{\lambda_j} \tag{29}$$

4. 2. 3 - Résultats obtenus.

Les années et les produits sont les mêmes que dans le cas du trend moyenné.

PRODUIT I -

Trend linéaire

(1, 2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = 1,08 %	σ = 5,60 %
(2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = 2,70 %	σ = 5,30 %
(1, 2, 3, 5) $\longrightarrow$ 6	b = -1,90 %	σ = 7,16 %

Trend parabolique

(1, 2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = 6,06 %	σ = 5,37 %
(2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = 3,19 %	σ = 5,29 %
(1, 2, 3, 5) $\longrightarrow$ 6	b = 4,60 %	σ = 6,52 %

Trend $\frac{1}{2}$ (linéaire + parabolique)

(1, 2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = +4,02 %	σ = 5,61 %
(2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = 2,95 %	σ = 5,30 %
(1, 2, 3, 5) $\longrightarrow$ 6	b = 1,35 %	σ = 6,82 %

Trend exponentiel

(2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = 2,17 %	σ = 5,31 %

PRODUIT II -

Trend linéaire

(1, 2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = -2,40 %	σ = 5,96 %
(2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = -2,24 %	σ = 5,81 %
(1, 2, 3, 5) $\longrightarrow$ 6	b = -0,78 %	σ = 4,18 %
(1, 2, 3, 4) $\longrightarrow$ 5	b = +0,76 %	σ = 3,89 %

Trend parabolique

(1, 2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = -1,32 %	σ = 5,90 %
(2, 3, 5, 6) $\longrightarrow$ 7	b = -0,72 %	σ = 5,75 %
(1, 2, 3, 5) $\longrightarrow$ 6	b = +0,28 %	σ = 4,13 %
(1, 2, 3, 4) $\longrightarrow$ 5	b = 3,62 %	σ = 3,90 %

Trend $\frac{1}{2}$ (linéaire + parabolique)

(1, 2, 3, 5, 6)	$\longrightarrow$ 7	b = -1,37 %	σ = 6,08 %
(2, 3, 5, 6)	$\longrightarrow$ 7	b = -1,48 %	σ = 5,78 %
(1, 2, 3, 5)	$\longrightarrow$ 6	b = -0,25 %	σ = 4,15 %
(1, 2, 3, 4)	$\longrightarrow$ 5	b = +2,19 %	σ = 3,89 %

Remarques sur les résultats.

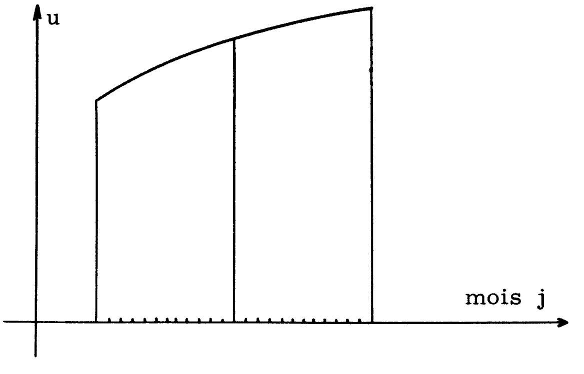
Les mêmes faits que ceux obtenus par le trend moyenné apparaissent ici.

Les prévisions sur le Produit I sont pessimistes. Celles du Produit II sont optimistes et leur précision est nettement meilleure que pour le produit I.

5 - CRITIQUES ET COMPARAISON DES DEUX METHODES -

5.1 - La méthode de la modulation bimensuelle est dans l'ensemble plus pessimiste que la méthode du trend moyenné et, plus généralement, qu'une méthode d'extrapolation des données brutes elles-mêmes.

Considérons, par exemple, une courbe de réalisation à trend croissant.



On remplace les données mensuelles pondérées $u_{p,j}$ par :

$$\frac{u_{p,j}}{\sum_{i=1}^{12} u_{p,j}}$$

Mais $\Sigma u_{p,j}$ est croissant d'une année à la suivante. Les ordonnées $u_{p,j}$ sont divisées par une quantité qui croît.

Les 2 chroniques $u_{p,j}$ et $\frac{u_{p,j}}{\Sigma u_{p,j}}$ ne sont rigoureusement affines que dans des intervalles de 12 mois.

Sur plusieurs années, le rapport :

$$\frac{u_{p,j}}{\Sigma u_{p,j}} \Big/ u_{p,j} = \frac{1}{\Sigma u_{p,j}} \quad \text{est décroissant.}$$

Le trend se trouve donc systématiquement atténué, d'où une prévision plus pessimiste.

5.2 - Comparaison de la méthode I (trend moyenné) et de la méthode II (modulation bimensuelle).

Il ressort des calculs-test que la méthode donnant les résultats les plus proches de la réalité est celle du trend moyenné.

C'est aussi la plus simple. Elle a, de plus, l'avantage d'être un peu plus optimiste que la méthode II car elle opère directement sur les données brutes (voir § 5.1).

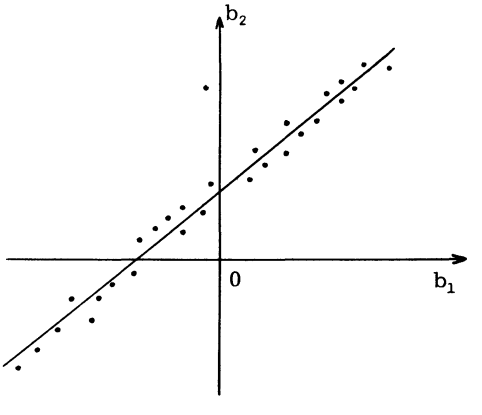
La comparaison des deux méthodes se traduit bien par un graphique de corrélation.

Pour les produits I, on a porté respectivement en abscisse et en ordonnée les biais b_1 et b_2 des méthodes I et II.

Il est apparu une forte corrélation entre $\bar{b}_1$ et $\bar{b}_2$.

Les points représentatifs se répartissent autour d'une droite ayant approximativement pour équation :

$$\frac{-b_1}{1,3} + \frac{b_2}{1,2} = 1$$



La pente est voisine de l'unité mais la droite ne passe pas par l'origine. On voit que les prévisions optimistes :

$$(b_1 < 0 \qquad \text{et} \qquad b_2 < 0)$$

sont, en ce qui concerne le biais, à l'avantage de la méthode II puisque :

$$|b_2| < |b_1|$$

Le contraire a lieu pour les prévisions pessimistes.

Ce fait apparaît nettement sur le graphique, mais il était à prévoir en vertu de la remarque du § 5.1.

Pour le produit I, les prévisions des 2 méthodes donnaient des prévisions test pessimistes dans l'ensemble.

On avait ainsi :

$$b_1 < 0 \qquad \text{et} \qquad b_2 < 0$$

Les biais b_1 étaient donc les plus faibles en valeur absolue :

$$|b_1| < |b_2|$$

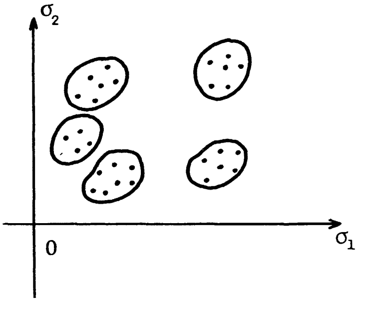
Pour le produit II où les prévisions test étaient optimistes, on avait au contraire :

$$|b_2| < |b_1|$$

en grande majorité.

La considération des biais ne départage donc pas les 2 calculs.

On a également construit un graphique de corrélation des variances : σ_1, σ_2.



Mais on a obtenu un nuage de points, sans aucune corrélation apparente, avec des zones de densité plus forte.

Aucune conclusion n'a pu être tirée dans ce sens.

Mais dans la plupart des cas et pour les deux produits, on avait $\sigma_1 < \sigma_2$.

La méthode du trend moyenné est donc à préconiser, en principe, de préférence à la modulation bimensuelle.

C'est aussi la plus simple.

Il semble donc que des schémas d'extrapolation trop raffinés n'apportent pas plus de précision que des modèles plus simples dans le cas de produits où les fluctuations mensuelles accidentelles dépassent 5 % de la réalisation moyenne.

6 - EXPLOITATION MECANOGRAPHIQUE -

Les méthodes I et II ont été programmées sur un calculateur électronique à tambour magnétique de moyenne capacité.

Les programmes ont été conçus de manière à présenter les mêmes possibilités d'extrapolation et pouvoir faire des comparaisons.

Le temps d'exécution d'une extrapolation sur 12 mois et l'impression des résultats est de l'ordre de 2 minutes.