

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

JIRI LIKES

Détermination de la distance interlamellaire de perlite

Revue de statistique appliquée, tome 11, n° 1 (1963), p. 95-103

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1963__11_1_95_0

© Société française de statistique, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉTERMINATION DE LA DISTANCE INTERLAMELLAIRE DE PERLITE

JIRI LIKES, Prague

L'auteur propose une méthode d'estimation de la distance interlamellaire de perlite.

Indépendamment du problème métallographique ainsi étudié, cet article est un intéressant exemple d'un cas où la notion de répartition au hasard dans l'espace doit être précisée et où l'estimation sans biais d'un paramètre par la valeur extrême d'un échantillon est mieux adaptée à la solution du problème que celle que l'on obtient à partir de la moyenne des valeurs.

Cette étude paraît susceptible de s'appliquer à de nombreux autres problèmes d'estimation de distance.

INTRODUCTION

La détermination de la distance interlamellaire de perlite σ constitue une question importante de l'analyse quantitative métallographique. La solution envisagée correspond au cas où l'on peut approximer les lamelles par des plans de façon qu'on puisse considérer chaque colonie comme définie par un faisceau de plans parallèles ayant une distance σ pratiquement constante. On suppose, de plus, que les colonies de perlite sont orientées au hasard dans l'espace d'un spécimen suffisamment grand.

On envisage pour le spécimen étudié, un plan de polissage métallographique, dans lequel on peut déterminer la distance interlamellaire "apparente" ξ des colonies. Si σ est constant dans tout le spécimen, la variable ξ à l'intérieur des colonies sera constante, elle variera, toutefois, d'une colonie à l'autre en fonction de l'angle de la colonie considérée avec le plan de polissage (figure n° 1). Notre tâche est la détermination de σ à partir des valeurs de la variable ξ , observées dans le plan de polissage.

Jusqu'à présent on employait la méthode de Pellisier [1], basée sur l'estimation graphique de σ déduite de la fonction de répartition empirique de la variable ξ . Dans cet article nous prendrons en considération l'estimation du paramètre σ en fonction de la valeur minimum de ξ au cours des mesures faites dans k colonies choisies au hasard dans le plan de polissage. En plus de l'estimation de σ , l'estimation de la valeur inverse de la distance inter-

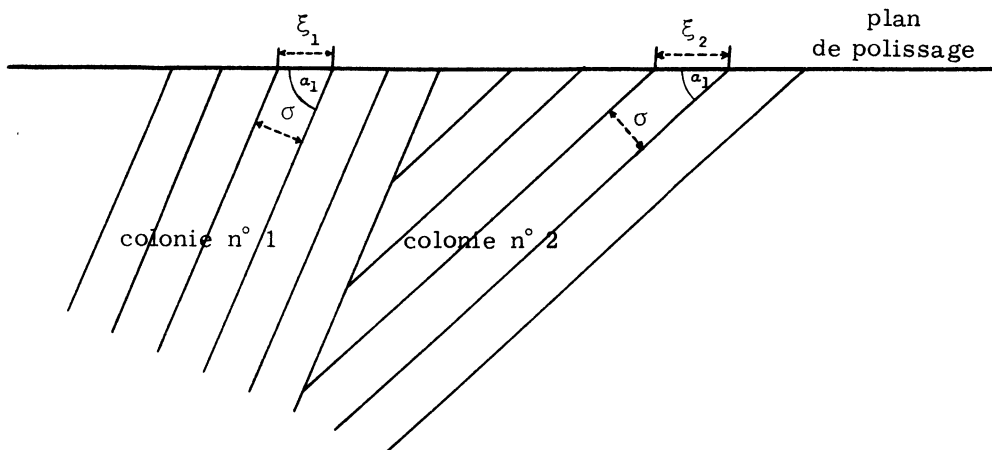


Figure 1

lamellaire réelle $\mu = \frac{1}{\sigma}$ revêt également une certaine importance. Le paramètre μ joue un rôle important dans l'étude des questions relatives à la vitesse d'accroissement de perlite.

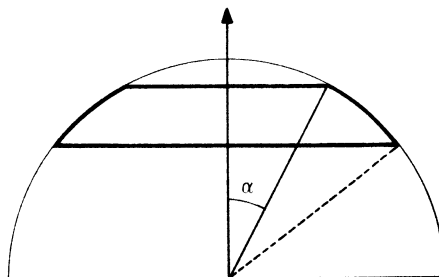
I - ESTIMATIONS SANS BIAIS DES PARAMETRES σ et μ

Désignons par α l'angle aigu de la colonie avec le plan de polissage. Etant donné que :

$$\sigma = \xi \sin \alpha,$$

ξ représente, à condition d'admettre l'orientation au hasard⁽¹⁾ des colonies, une variable aléatoire avec une densité de probabilité définie par :

(1) Il s'agit d'une orientation au hasard dans l'espace, des plans des lamelles. Les points d'intersection des normales à ces plans avec une demi-sphère de rayon unité sont répartis uniformément en surface sur la demi-sphère. La probabilité élémentaire de α est $p_\alpha d\alpha = \frac{\text{aire de la zone}}{\text{aire de la demi-sphère}} = \frac{2\pi |dh|}{2\pi} = \sin\alpha d\alpha$ |dh| = hauteur de la zone : $d(\cos \alpha)$.



$$f(x) = \frac{\sigma^2}{x^2 \sqrt{x^2 - \sigma^2}}, \quad x > \sigma \quad (1)$$

d'où la fonction de répartition

$$F(x) = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{x^2}}$$

Considérons maintenant les variables $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k$ représentant les éléments, rangés par ordre de grandeur, de l'échantillon d'effectif donné k , de la distribution (1). Nous nous proposons de déterminer une estimation sans biais du paramètre σ , basée sur la valeur minimum ξ_1 , fournie par l'échantillon.

La densité de probabilité de la variable aléatoire ξ_1 est :

$$f_k(x_1) = \frac{k\sigma^2}{x_1^2 \sqrt{x_1^2 - \sigma^2}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{x_1^2}} \right]^{k-1}, \quad x_1 > \sigma \quad (2)$$

L'espérance mathématique de la puissance ν de la variable ξ_1 est donc donnée, en posant $v = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{x^2}}$, par :

$$E(\xi_1^\nu) = \int_{\sigma}^{\infty} x_1^\nu f_k(x_1) dx_1 = k \sigma^\nu \int_0^1 (1 - v^2)^{-\frac{\nu}{2}} (1 - v)^{k-1} dv \quad (3)$$

Pour $\nu = 1$, on a :

$$E(\xi_1) = k\sigma \int_0^1 (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - v)^{k-1} dv = a_k \cdot \sigma \quad (4)$$

Etant donné que $(1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} > 1$ pour $0 < v < 1$, on $a_k > 1$ pour $k \geq 1$.

Pour $k = 1$, on a $a_1 = \frac{\pi}{2}$. En écrivant l'expression $(1 - v)^{k-1}$, pour $k \geq 2$, sous la forme $(1 - v)^{k-2} - v(1 - v)^{k-2}$, nous avons :

$$a_k = \frac{k}{k-1} a_{k-1} - k \int_0^1 \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} (1-v)^{k-2} dv = \frac{k}{k-1} a_{k-1} - k I_k$$

En intégrant par parties, nous obtenons :

$$I_k = 1 - (k-2) \int_0^1 \sqrt{1-v^2} (1-v)^{k-3} dv$$

Donc

$$I_k = 1 - (k-2) \int_0^1 \frac{1+v}{\sqrt{1-v^2}} (1-v)^{k-2} dv = 1 - \frac{k-2}{k-1} a_{k-1} - (k-2) I_k$$

d'où

$$I_k = \frac{1}{k-1} - \frac{k-2}{(k-1)^2} a_{k-1}$$

On obtient donc, pour les coefficients a_k la relation de récurrence suivante :

$$a_k = \frac{k(2k-3)}{(k-1)^2} a_{k-1} - \frac{k}{k-1} \quad k \geq 2 \quad (5)$$

Table n° 1

Valeurs de a_k , $\frac{1}{a_k}$ et α_k

k	a_k	$\frac{1}{a_k}$	α_k
2	1,1416	0,8760	0,0637
3	1,0686	0,9358	0,0149
4	1,0413	0,9603	0,0056
5	1,0278	0,9729	0,0026
6	1,0201	0,9803	0,0014
7	1,0153	0,9850	0,0008
8	1,0120	0,9881	0,0005
9	1,0097	0,9904	0,00035
10	1,0080	0,9920	0,0025

Les valeurs a_k pour $k = 2$ (1)...10 sont données dans la table n° 1. Nous voyons que pour $k = 10$, a_k ne diffère pratiquement pas de 1.

Pour $\nu = 2$ nous obtenons à partir de l'équation (3) :

$$E(\xi_1^2) = k \sigma^2 \int_0^1 \frac{(1-\nu)^{k-2}}{1+\nu} d\nu = b_k \cdot \sigma^2 \quad (6)$$

La valeur b_1 n'est pas finie ; pour $k = 2$, on a $b_2 = 2 \text{ Log } 2$.

Pour $k > 3$, en écrivant :

$(1-\nu)^{k-2} = (1-\nu)^{k-3} [2 - (1+\nu)]$, nous obtenons pour b_k la relation de récurrence :

$$b_k = \frac{2k}{k-1} b_{k-1} - \frac{k}{k-2} \quad k \geq 3 \quad (7)$$

La variable $\hat{\sigma} = \frac{1}{a_k} \xi_1$ représente donc l'estimation sans biais de σ , qui est fonction de la valeur minimum ξ_1 de l'échantillon.

La variance de $\hat{\sigma}$ est donnée par :

$$D(\hat{\sigma}) = \left(\frac{b_k}{a_k^2} - 1 \right) \sigma^2 = \alpha_k \cdot \sigma^2 \quad (8)$$

Les valeurs $\frac{1}{a_k}$ et α_k pour $k = 2$ (1)...10 sont données dans la table n° 1.

La densité de probabilité de la variable aléatoire $\eta = \frac{1}{\xi}$, définie à partir de l'équation (1) est :

$$g(y) = \frac{y}{\mu} \frac{1}{\sqrt{\mu^2 - y^2}}, \quad 0 < y < \mu = \frac{1}{\sigma} \quad (9)$$

Considérons les variables : $\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_k$ représentant l'échantillon rangé, d'effectif donné k , de la distribution (9), et cherchons une estimation sans biais de μ , en fonction de η . Compte tenu de $\eta_k = \frac{1}{\xi_k}$, nous obtiendrons $E(\eta_k)$ à partir de l'équation (3), $v = -1$.

$$E(\eta_k) = k \mu \int_0^1 (1-v)^{\frac{1}{2}} (1-v)^{k-1} dv = c_k \cdot \mu \quad (10)$$

Etant donné que $(1-v^2)^{\frac{1}{2}} < 1$ pour $0 < v < 1$, on a $c_k < 1$ pour $k \geq 1$.
Pour $k = 1$, $c_1 = \frac{\pi}{4}$.

Par application d'un procédé analogue à celui employé pour a_k , on peut montrer que l'on a :

$$c_k = \frac{k(2k-1)}{k^2-1} c_{k-1} - \frac{k}{k+1}, \quad k \geq 2 \quad (11)$$

Pour $v = -2$ nous obtenons à partir de l'équation 3 :

$$E(\eta_k^2) = \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)} \mu^2 = d_k \cdot \mu^2, \quad k \geq 1 \quad (12)$$

L'estimation sans biais de μ est donc donnée par :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{c_k} \eta_k$$

dont la variance est :

$$D(\hat{\mu}) = \left(\frac{d_k}{c_k^2} - 1 \right) \mu^2 = \beta_k \cdot \mu^2 \quad (13)$$

Les valeurs $\frac{1}{c_k}$ et β_k pour $k = 1(1) \dots 10$ sont données dans la table n° 2.

II - LES INTERVALLES DE CONFIANCE POUR LES PARAMETRES σ ET μ

Considérons de nouveau l'échantillon rangé dans la distribution (1). La fonction de répartition de la variable aléatoire ξ_1 au point $x_1 = \frac{\sigma}{Z_1}$ est donnée par :

$$F_k(x_1) = \int_{\sigma}^{x_1} f_k(x_1) dx_1 = 1 - \left[1 - \sqrt{1 - Z_1^2} \right]^k, \quad 0 < Z_1 < 1 \quad (14)$$

Pour un ε donné, ($0 < \varepsilon < 1$), si l'on veut que :

$$P\{\sigma > A_k(\varepsilon), \xi_1\} = 1 - \varepsilon$$

nous obtenons, compte tenu de (14) :

Table n° 2

Valeurs de $\frac{1}{c_k}$ et β_k

k	$\frac{1}{c_k}$	β_k
1	1,2732	0,0808
2	1,1060	0,0194
3	1,0579	0,00073
4	1,0369	0,0034
5	1,0256	0,0018
6	1,0189	0,0011
7	1,0145	0,0007
8	1,0115	0,0004
9	1,0094	0,0003
10	1,0078	0,0002

$$A_k(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon^{\frac{1}{k}} - \varepsilon^{\frac{2}{k}}} \quad (15)$$

Donc l'intervalle de confiance à 100 (1 - ε) %, pour le paramètre σ est donné par les inégalités :

$$A_k(\varepsilon) \cdot \xi_1 < \sigma < \xi_1 \quad (16)$$

Les valeurs $A_k(\varepsilon)$ pour $k = 1 (1) \dots 10$ et $\varepsilon = 0,01 ; 0,05$ et $0,1$ sont données dans la table n° 3.

Table n° 3

Valeurs de $A_k(\varepsilon)$

k	$A_k(\varepsilon)$		
	$\varepsilon = 0,01$	$\varepsilon = 0,05$	$\varepsilon = 0,1$
1	0,141	0,312	0,436
2	0,436	0,630	0,730
3	0,620	0,775	0,844
4	0,730	0,850	0,899
5	0,799	0,893	0,929
6	0,844	0,920	0,948
7	0,876	0,937	0,960
8	0,899	0,950	0,968
9	0,916	0,959	0,974
10	0,929	0,966	0,979

Nous pouvons aussi employer cette table pour la construction des intervalles de confiance pour le paramètre μ . L'inégalité $\sigma < A_k(\varepsilon) \cdot \xi_1$ étant équivalente à $\mu > \frac{1}{A_k(\varepsilon)} \cdot \eta_k$, l'intervalle de confiance du paramètre μ à 100 (1 - ε) % est donné par l'inégalité :

$$\eta_k < \mu < \frac{1}{A_k(\varepsilon)} \cdot \eta_k \quad (17)$$

III - COMPARAISON DES ESTIMATIONS $\hat{\sigma}$, $\hat{\mu}$ AVEC LES ESTIMATIONS QUI SONT FONCTIONS DU RESULTAT MOYEN DES MESURES

Soient $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots, \xi_{(k)}$ les variables aléatoires indépendantes distribuées avec la densité de probabilité définie par la formule (1). L'espérance mathématique de la variable $\xi_{(i)}$ sera donnée par l'équation (4) pour $k = 1$, soit :

$$E(\xi_{(i)}) = a_1 \sigma = \frac{\pi}{2} \sigma, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Considérons la variable aléatoire :

$$\bar{\xi} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \xi_{(i)}$$

La variable $\tilde{\sigma} = \frac{2}{\pi} \bar{\xi}$ (18)

représente évidemment l'estimation sans biais du paramètre σ . Cette estimation, toutefois, n'a pas une variance finie puisque $E(\xi_{(i)}^2) = b_1 \cdot \sigma^2, i = 1, 2, \dots, k$.

De même, $\eta_{(1)}, \eta_{(2)}, \dots, \eta_{(k)}$ étant des variables aléatoires indépendantes, distribuées identiquement avec la densité de probabilité (9), l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $\eta_{(i)}$ sont :

$$\left. \begin{aligned} E(\eta_{(i)}) &= c_1 \mu = \frac{\pi}{4} \mu \\ D(\eta_{(i)}) &= (d_1 - c_1^2) \mu^2 = \frac{32 - 3\pi^2}{48} \mu^2 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, k$$

considérons la variable aléatoire :

$$\bar{\eta} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \eta_{(i)}$$

La variable :

$$\hat{\mu} = \frac{4}{\pi} \bar{\eta}$$

représente l'estimation sans biais du paramètre μ . La variance de cette variable est :

$$D(\hat{\mu}) = \frac{1}{k} \frac{32 - 3\pi^2}{3\pi^2} \mu^2 \quad (20)$$

L'efficacité de l'estimation $\tilde{\mu}$ par rapport à l'estimation $\hat{\mu}$ est :

$$E_k = \frac{D(\hat{\mu})}{D(\tilde{\mu})} = \frac{3\pi^2 k}{32 - 3\pi^2} \beta_k \quad (21)$$

Les valeurs de E_k pour $k = 1(1) \dots 10$ sont données dans la table n° 4. Nous voyons que E_k est une fonction décroissante de k .

Table n° 4
Valeurs de E_k

k	E_k
1	1,000
2	0,481
3	0,271
4	0,168
5	0,112
6	0,079
7	0,057
8	0,043
9	0,033
10	0,026

IV - EXEMPLE

Dans un plan de polissage d'un spécimen d'acier on a pris des vues de colonies de perlite (avec un agrandissement 2000 fois). Ces photographies ont été ensuite agrandies 25 fois (par agrandissement de la photographie à l'aide de l'épidiascope).

Chez $k = 10$ colonies choisies au hasard on a mesuré les valeurs de la variable ξ . On a obtenu successivement les valeurs suivantes (en microns) :

0,49 ; 0,73 ; 0,42 ; 0,89 ; 0,62 ; 0,65 ; 0,41 ; 0,45 ; 0,91 ; 0,57.

On a obtenu pour σ les estimations :

$$\hat{\sigma} = 0,9921 \times 0,41 = 0,407$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{2}{\eta} \times \frac{1}{10} \times 6,14 = 0,391$$

L'intervalle de confiance à 0,95 pour σ est donné par :

$$0,396 < \sigma < 0,41$$

L'estimation de μ est :

$$\hat{\mu} = 1,0078 \times \frac{1}{0,41} = 2,458$$

Pour $k = 10$, on a pratiquement $\hat{\mu} = \frac{1}{\hat{\sigma}}$ car $\frac{1}{c_{10}}$ est pratiquement égal à a .
On a aussi :

$$\tilde{\mu} = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{10} \times 17,58 = 2,238$$

Imaginons maintenant que nos données représentent les résultats de $p = 2$ échantillons indépendants de l'effectif $k = 5$. Désignons par $\xi_1^{(1)}$, ou éventuellement $\xi_1^{(2)}$, l'élément minimum du premier ou du deuxième échantillon. La variable :

$$\sigma^* = \frac{1}{2a_5} \sum_{j=1}^2 \xi_1^{(j)} \quad (22)$$

est l'estimation sans biais du paramètre σ . Dans notre cas σ^* prend la valeur $\sigma^* = \frac{0,9729}{2} \cdot (0,42 + 0,41) = 0,404$.

La variance de l'estimation (22) est $D(\sigma^*) = \frac{1}{2} d_5 \sigma^2 = 0,0013 \sigma^2$; elle est alors plus grande que la variance $\alpha_{10} \sigma^2 = 0,00025 \sigma^2$ de l'estimation $\hat{\sigma} = \frac{1}{a_{10}} \xi_1$, où $\xi_1 = \min \{ \xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)} \}$.

De la même façon, si nous posons $\eta_5^{(j)} = \frac{1}{\xi_1^{(j)}}$, $j = 1, 2$, la variable :

$$\mu^* = \frac{1}{2c_5} \sum_{j=1}^2 \eta_5^{(j)} \quad (23)$$

est l'estimation sans biais de μ . Dans notre cas $\mu^* = \frac{1,0256}{2} \left(\frac{1}{0,42} - \frac{1}{0,41} \right) = 2,472$.

La variance de l'estimation (23) est $D(\mu_2^*) = \frac{1}{2} \beta_5 \mu^2 = 0,0009 \mu^2$, on constate qu'elle est plus grande que $\beta_{10} \mu^2 = 0,0002 \mu^2$, ce qui est la variance de l'estimation $\hat{\mu} = \frac{1}{c_{10}} \eta_{10}$, où $\eta_{10} = \max \{ \eta_5^{(1)}, \eta_5^{(2)} \}$.

CONCLUSIONS

Nous avons considéré les estimations sans biais de la distance interlamellaire de perlite σ et de son inverse $\mu = \frac{1}{\sigma}$. Les estimations sans biais $\hat{\sigma}$ et $\hat{\mu}$ sont des fonctions de la valeur minimale ξ_1 de la distance interlamellaire "apparente" ξ , mesurée dans le plan de polissage métallographique sur k colonies perlitiques choisies au hasard.

Nous avons trouvé les intervalles de confiance pour σ et μ en fonction de ξ_1 .

Nous avons déterminé l'efficacité E_k de l'estimation $\tilde{\mu}$ par rapport à l'estimation $\hat{\mu}$, $\tilde{\mu}$ étant fonction de la valeur moyenne $\bar{\eta} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \eta_{(i)}$, de la variable $\eta = \frac{1}{\xi}$ déterminée à partir de k colonies.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G.E. PELLISIER, M.F. HAWKES, W.A. JOHNSON, R.F. MEHL - The interlamellar spacing of pearlite. Transactions American Society of Metals, 30 (1942), p. 1049.