REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. AGARD

Estimateurs et intervalles de confiance de l'écart-type d'une loi normale et de la moyenne d'une loi exponentielle

Revue de statistique appliquée, tome 9, n° 2 (1961), p. 27-35
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1961__9_2_27_0>

ESTIMATEURS ET INTERVALLES DE CONFIANCE DE L'ÉCART-TYPE D'UNE LOI NORMALE ET DE LA MOYENNE D'UNE LOI EXPONENTIELLE

J. AGARD

Docteur ès-Sciences

C'est un fait bien connu que les moments d'ordre 1 et 2 sont des estimateurs à variance minimum formant un résumé exhaustif de la moyenne m et de l'écart-type σ d'une loi normale. Il en est de même du moment d'ordre 1 pour la moyenne $\frac{1}{\lambda}$ de la loi exponentielle de densité $\lambda e^{-\lambda x}$.

En étudiant divers estimateurs de σ et de λ on peut cependant constater que les estimateurs classiques peuvent être remplacés par d'autres sans élargir beaucoup l'intervalle de confiance. En particulier, le moment absolu d'ordre 1 est un estimateur sans biais du σ de la loi normale ayant une dispersion à peine supérieure à celle de l'estimateur fourni par le moment d'ordre 2. Cette remarque nous parait utile car le calcul de $E(|X - m|)$ est plus facile que celui de $E[(X - m)^2]$ et il peut être associé au calcul de $E(X)$.

Nous calculons ici les estimateurs de σ et de λ par les moments absolus d'ordre α, ainsi que les écarts types de ces estimateurs. Lorsque le nombre d'observations n de l'échantillon observé est grand, la distribution d'échantillonnage des divers estimateurs est la loi normale. Le principe du calcul consiste à partir du moment absolu d'ordre α, puis à calculer l'écart-type du moment absolu d'ordre α et, connaissant cet écart-type, à en déduire l'écart-type de l'estimateur.

Dans le cas de la loi normale, nous supposons la moyenne connue et nous nous ramenons à la variable aléatoire centrée. Si la moyenne n'est pas connue, on peut l'estimer par $E(X)$, mais la démonstration qui suit n'est plus rigoureuse, quoique ses résultats nous semblent encore valables.

I - ESTIMATION DE L'ECART-TYPE σ DE LA LOI NORMALE.

$$E(|X|^{\alpha}) = 2\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} = \int_0^{\infty} \frac{(\sqrt{2}\,\sigma)^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} X^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}} e^{-X}\, dX$$

$$= \frac{(\sqrt{2}\,\sigma)^{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

La variance de ce moment absolu d'ordre α :

$$\Sigma_\alpha^2 = \mathbf{E}\left[\left(|X|^\alpha - \frac{(\sqrt{2}\sigma)^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)^2\right] = \mathbf{E}(|X|^{2\alpha}) - \frac{(\sqrt{2}\sigma)^{2\alpha}}{\pi}\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= (\sqrt{2}\sigma)^{2\alpha}\left[\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\pi}\right]$$

Nous pouvons ainsi estimer σ par l'intermédiaire du moment d'ordre α :

$$\boxed{\hat{\sigma}_\alpha = \left[\frac{\sqrt{\pi}\,\mathbf{E}\,[|X|^\alpha]}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \sigma}$$

Lorsque pour la population normale considérée, on a mesuré un nombre n d'observations suffisamment grand, on sait que la probabilité que $\mathbf{E}\,[|X|^\alpha]$ soit compris entre $\frac{(\sqrt{2}\sigma)^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right) \pm t\sum_\alpha$ est fournie par la probabilité P (t) (1) que la variable aléatoire normée réduite T soit comprise entre $\pm$ t. On a ainsi une probabilité P(t) que, avec n observations, $\hat{\sigma}_\alpha$ soit compris entre :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\left\{\frac{(\sqrt{2}\sigma)^\alpha}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right) \pm \frac{t}{\sqrt{n}}(\sqrt{2}\sigma)^\alpha\left[\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\pi}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

ou :

$$\sigma\left\{1 \pm \frac{t}{\sqrt{n}}\left[\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)} - 1\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

Si n est assez grand, $\hat{\sigma}_\alpha - \sigma$ aura approximativement P (t) chances d'être compris entre :

$$\pm\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\frac{1}{|\alpha|}\left[\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

Lorsque n est grand, l'écart-type $\hat{\sum}_\alpha$ de l'estimateur $\hat{\sigma}_\alpha$ est donc approximativement :

$$\boxed{\hat{\sum_\alpha} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\frac{1}{|\alpha|}\left[\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)} - 1\right]^{\frac{1}{2}}}$$

---

(1) Dans toute la suite P(t) sera la loi de Laplace Gauss d'une variable aléatoire centrée et normée.

Résumons sur un tableau les caractéristiques de quelques estimateurs :

$E(X) = m$	$\hat{X}$ a pour écart-type :	σ
$E(\lvert X\rvert) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ (2)	$\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,E(\lvert X\rvert)$	$\sigma_{\hat{\sigma}_1} = \sigma\sqrt{\frac{\pi-2}{2n}} = \frac{0,75\sigma}{\sqrt{n}}$
$E(X^2) = \sigma^2$	$\hat{\sigma}_2 = \sqrt{E(X^2)}$	$\sigma_{\hat{\sigma}_2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}} = \frac{0,705\sigma}{\sqrt{n}}$
$E(X^4) = 3\sigma^4$	$\hat{\sigma}_4 = \left[\frac{E(X^4)}{3}\right]^{\frac{1}{4}}$	$\sigma_{\hat{\sigma}_4} = \sigma\sqrt{\frac{2}{3n}} = \frac{0,814\sigma}{\sqrt{n}}$
$E(\lvert X\rvert^{\frac{1}{2}}) = \frac{(\sqrt{2\sigma})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$	$\hat{\sigma}_{\frac{1}{2}} = 1,48\,E(\lvert X\rvert^{\frac{1}{2}})^2$	$\sigma_{\hat{\sigma}_{\frac{1}{2}}} = \sigma\,\frac{0,85}{\sqrt{n}}$
$E(\lvert X\rvert^{\frac{1}{10}}) = (\sqrt{2\sigma})^{\frac{1}{10}}\Gamma\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{2}\right)$	$\hat{\sigma}_{\frac{1}{10}} = 1,78\,E(\lvert X\rvert^{\frac{1}{10}})^{10}$	$\sigma_{\hat{\sigma}_{\frac{1}{10}}} = \sigma\,\frac{1,03}{\sqrt{n}}$
$E(\lvert X\rvert^{-\frac{1}{10}}) = (\sqrt{2\sigma})^{-\frac{1}{10}}\Gamma\left(\frac{19}{20}\right)$	$\hat{\sigma}_{-\frac{1}{10}} = 2\,E(\lvert X\rvert^{-\frac{1}{10}})^{-10}$	$\sigma_{\hat{\sigma}_{-\frac{1}{10}}} = \sigma\,\frac{1,23}{\sqrt{n}}$
$E(\lvert X\rvert^{-1}) = (\sqrt{2\sigma})^{-1}\Gamma(0)$	$\hat{\sigma}_{-1} = \infty$	$\sigma_{\hat{\sigma}_{-1}} = \sigma\,\frac{\infty}{\sqrt{n}}$

(les moments d'ordre $\alpha \leqslant -1$ ne sont pas bornés
l'écart-type des moments $\alpha \leqslant -\frac{1}{2}$ n'est pas borné)

On vérifie bien que le moment d'ordre 2 est le meilleur estimateur de σ. En effet, si nous prenons la dérivée de $\hat{\Sigma}_\alpha$ par rapport à α, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{\sigma}{\alpha}\left[\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)} - 1\right]^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{\alpha}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\;\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}\left[\psi\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)\right]\right]$$

où :

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(1+z)}{\Gamma(1+z)}$$

On peut vérifier que si nous prenons $\alpha = 2$, on a :

$$\frac{0,705}{\sqrt{n}}\,\sigma\left[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\;\frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{\frac{\pi 3}{4}-\frac{\pi}{4}}\left[\psi(1,5)-\psi(0,5)\right]\right]$$

Comme : $\qquad \psi(x+1) = \psi(x) + \frac{1}{1+x}$ (1)

----

(1) (Voir Tables Universelles de Marcel Boll p.571 Dunod).

(2) (Voir Mathematical Methods of Statistics. Cramer p. 485 Princeton).

On a : $\psi(1,5) - \psi(0,5 = \frac{2}{3}$

et la dérivée est bien nulle.

Sur le graphique joint nous avons tracé la courbe du coefficient de $E[|X|^{\alpha}]^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'estimateur $\hat{\sigma}_a$ de σ (courbe I) et la courbe du coefficient de σ dans $\hat{\sum_{\alpha}}$ (courbe II). On peut remarquer que la courbe (II) a un minimum très plat, de sorte que l'écart-type de l'estimateur σ_a varie peu entre $\frac{1}{2} < \alpha < 4$. Lorsque $\alpha = 0$, il faut calculer le développement de $\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$ au voisinage de x pour trouver la limite de $\frac{1}{|\alpha|\sqrt{n}}\left[\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)} - 1\right]^{\frac{1}{2}}$ = qui prend pour $\alpha = \frac{1}{2}$ une forme indéterminée.

Pour vérifier la validité de la méthode, nous avons tiré plusieurs échantillons de populations normales de moyenne nulle et d'écart-type $\sigma = \frac{1}{2}$, et nous avons estimé σ par les moments absolus d'ordre $\frac{1}{2}$, 1 et 2 ; les résultats de ces calculs sont synthétisés dans le tableau ci-dessous.

Expérience	Moyenne observée	$\hat{\sigma}_{\frac{1}{2}}$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\sigma}_2$	n	$\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$
1	0,0038	0,592	0,589	0,596	250	0,022
2	0,029	0,478	0,507	0,509	100	0,035
3	0,050	0,468	0,476	0,481	100	0,035

n = nombre d'observations.

Le premier échantillon est mauvais et le test χ^2 rejette l'hypothèse de sa normalité. Néanmoins, pour cet échantillon comme pour les autres, on constate que les trois estimateurs de σ sont cohérents et leurs différences sont inférieures à $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$. A l'exception du premier exemple, les trois estimateurs sont à moins de $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ de $\sigma = \frac{1}{2}$ valeur théorique de l'écart-type.

Remarque : Nous indiquons ici l'estimateur de σ obtenu à partir de $E[\text{Log}|x|]$ et son écart-type :

$$E[\text{Log}|x|] = 2\int_0^{\infty} \text{Log}\, x \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-y}\, y^{-\frac{1}{2}}\left(\text{Log}\sqrt{2}\sigma + \frac{\text{Log}\, y}{2}\right) dy$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \text{Log}\sqrt{2}\sigma + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-y}\; y^{-\frac{1}{2}}\ \text{Log}\ y\ dy$$

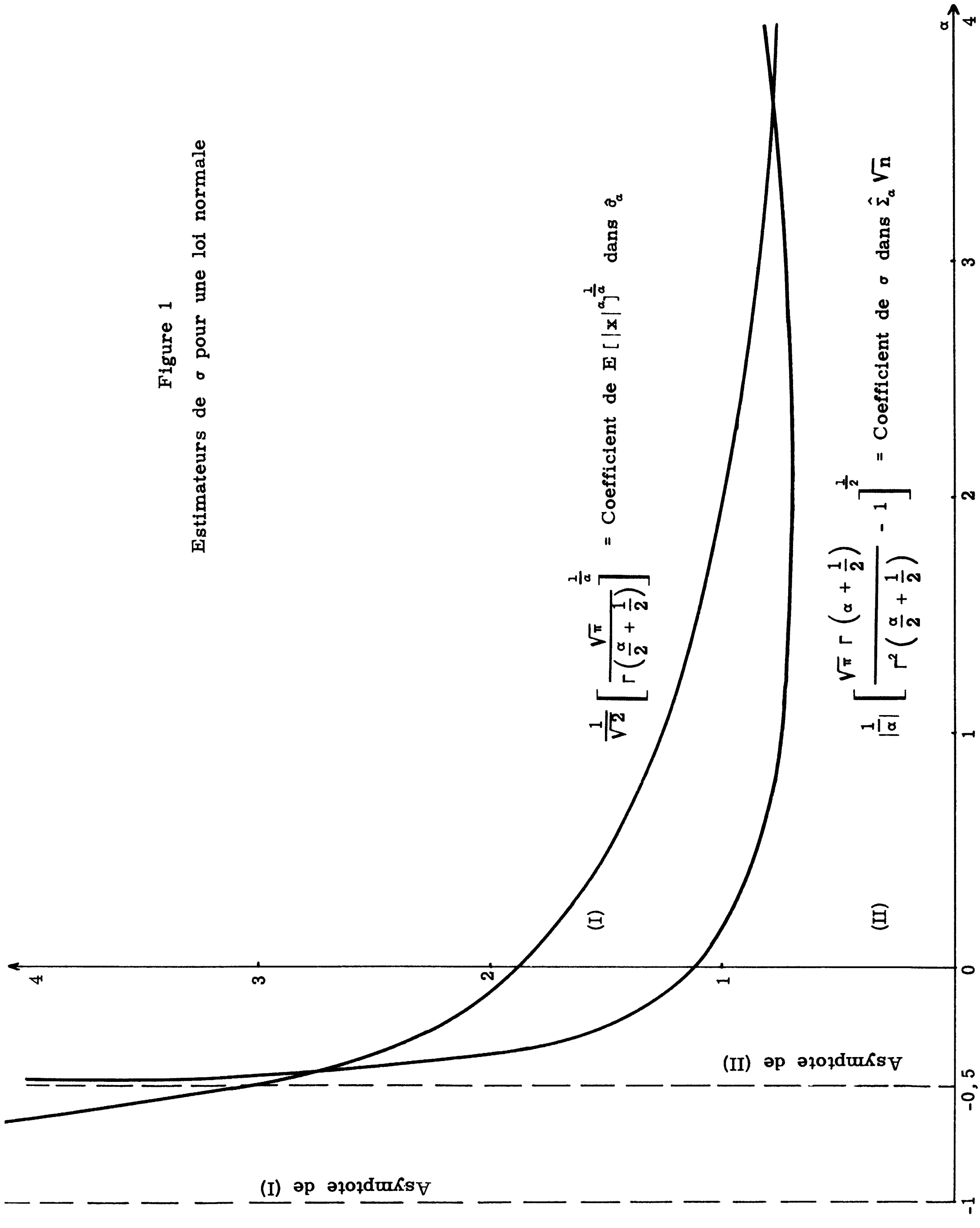


Figure 1

Estimateurs de σ pour une loi normale

Or : $\quad \displaystyle\int_0^\infty e^{-y}\, y^{-\frac{1}{2}} \text{ Log } y \, dy = \frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{\alpha}\, dy \quad$ pour $\alpha = -\frac{1}{2}$

Donc : $\displaystyle\int_0^\infty e^{-y}\, y^{-\frac{1}{2}} \text{ Log } y \, dy = \Gamma'\left(1-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\psi\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\pi}\,[C + 2 \text{ Log } 2]$

$$E[\text{Log}\,|x|] = \text{Log}\sqrt{2}\,\sigma - \frac{C + 2\text{ Log } 2}{2}$$

C = constante d'Euler
= 0,5772...

28

d'où : $$\boxed{\hat{\sigma}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\left[E[\text{Log}\,|x|] + \frac{C}{2} + \text{Log } 2\right]}}$$

$$E[\text{Log}^2|x|] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-y}\left[\text{Log}\sqrt{2}\,\sigma + \frac{\text{Log } y}{2}\right]^2 y^{-\frac{1}{2}}\, dy$$

$$= [\text{Log}\sqrt{2}\,\sigma]^2 - [\text{Log}\sqrt{2}\,\sigma]\,(C + 2\text{ Log } 2) + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{-\frac{1}{2}} \text{ Log}^2 y\, dy$$

Or : $\quad \displaystyle\int_0^\infty e^{-y}\, y^{-\frac{1}{2}} \text{ Log}^2 y \, dy = \frac{d^2}{d\alpha^2}\int_0^\infty e^{-y}\, y^{\alpha}\, dy \quad$ pour $\alpha = -\frac{1}{2}$

Donc : $\quad \displaystyle\int_0^\infty e^{-y}\, y^{-\frac{1}{2}} \text{ Log}^2 y\, dy = \Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)\left[\psi'\left(-\frac{1}{2}\right) + \psi^2\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left[\psi'\left(\frac{1}{2}\right) + \pi^2 + \psi^2\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 25,978$$

car : $\quad \displaystyle\frac{\Gamma''(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} = \psi'(\alpha) + \left(\frac{\Gamma'(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)}\right)^2 \quad$ et $\quad \psi(-x) = \psi(x) - \dfrac{\pi}{\text{tg}\,\pi x}$

$$\text{Var}\,[\text{Log}(|x|)] = \frac{\pi^2 + \psi'\left(\frac{1}{2}\right)}{4} = 2,7005$$

Lorsqu'on dispose d'un très grand nombre d'observations, n, on aura P(t) chances que $\text{Log}\,|x| + \dfrac{C + 2\text{ Log } 2}{2}$ soit compris entre $\text{Log}\sqrt{2}\,\sigma \pm \dfrac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{2,7}$

et de même pour que $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\text{Log}\,|x| + \frac{C + 2\text{ Log } 2}{2}}$ soit compris entre $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\text{Log}\sqrt{2}\,\sigma \pm \frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{2,7}}$

Donc, $\hat{\sigma}_L$ aura P(t) chances d'être compris entre $\sigma\, e^{\pm\frac{t\sqrt{2,7}}{\sqrt{n}}}$ soit $\sigma\left(1 \pm \dfrac{t\sqrt{2,7}}{\sqrt{n}}\right)$

On peut donc dire que $\hat{\sigma}_L$ est un estimateur de σ dont l'écart-type est égal à $\sigma\sqrt{\dfrac{2,7}{n}} = \dfrac{1,65}{\sqrt{n}}\,\sigma$. Cet estimateur a un écart-type presque double de de celui de variance minimum.

II - ESTIMATION DU PARAMETRE λ D'UNE LOI EXPONENTIELLE -

Soit la loi exponentielle de densité $\lambda e^{-\lambda x}$. L'espérance mathématique de son moment d'ordre α est, à condition que $\alpha > -1$ pour que le moment ait un sens :

$$E[x^\alpha] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} x^\alpha dx = \lambda^{-\alpha} \Gamma(\alpha + 1)$$

Le moment d'ordre α est donc un estimateur de λ avec :

$$\boxed{\hat{\lambda}_\alpha = \Gamma(\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} E[x^\alpha]^{-\frac{1}{\alpha}}}$$

L'écart-type du moment d'ordre α est :

$$\lambda^{-\alpha}[\Gamma(2\alpha + 1) - \Gamma^2(\alpha + 1)]^{\frac{1}{2}}$$

Lorsqu'on dispose de n observations et que n tend vers l'infini, on sait que, t étant la variable normale centrée réduite, on a P(t) chances que $E(x^\alpha)$ soit compris entre $\lambda^{-\alpha}\Gamma(\alpha + 1) \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \lambda^{-\alpha}[\Gamma(2\alpha + 1) - \Gamma^2(\alpha + 1)]^{\frac{1}{2}}$.

Donc, on peut dire qu'il y a P(t) chances que $\hat{\lambda}_\alpha$ soit compris entre :

$$\Gamma(\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} \left[\lambda^{-\alpha}\Gamma(\alpha + 1) \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \lambda^{-\alpha}[\Gamma(2\alpha + 1) - \Gamma^2(\alpha + 1)]^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

où :

$$\lambda \left[1 \pm \frac{t}{\sqrt{n}} \left(\frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{\alpha}}$$

Lorsque n tend vers l'infini, l'estimateur $\hat{\lambda}_\alpha$ suit une loi normale de moyenne λ et d'écart-type égal à :

$$\boxed{\hat{\sum_\alpha} = \frac{\lambda}{|\alpha|\sqrt{n}} \left(\frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Nous avons tracé les courbes du coefficient de $E(x^\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}$ dans $\hat{\lambda}_\alpha$ et de λ dans $\hat{\sum_\alpha}$.

La dérivée de $\hat{\sum_\alpha}$ est :

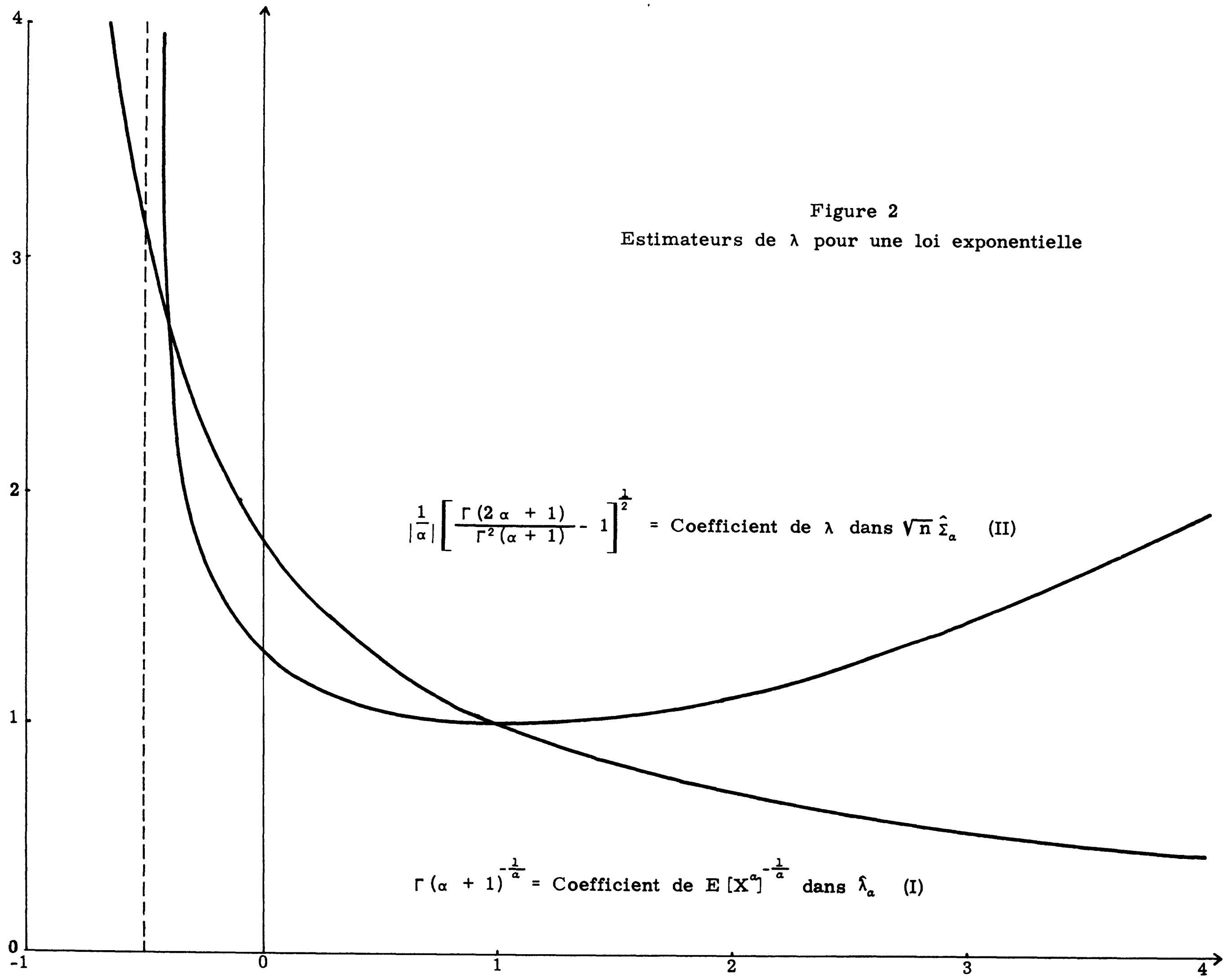
$$\frac{1}{\alpha\sqrt{n}} \left[\frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma^2(\alpha + 1)} \left(\psi(2\alpha) - \psi(\alpha) \right) \right]$$

où :

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(1 + x)}{\Gamma(1 + x)}$$

Figure 2

Estimateurs de λ pour une loi exponentielle



On constate que cette dérivée s'annule en $\alpha = 1$, ce qui est connu : l'estimateur à variance minimum de λ dans la loi exponentielle est le moment d'ordre 1.

<u>Estimation de λ par $E[\text{Log } x]$</u> :

On aura : $$E[\text{Log } x] = \int_0^\infty \lambda \text{ Log } x \; e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty [\text{Log } X - \text{Log } \lambda] \; e^{-X} \; dX$$

$$= \int_0^\infty e^{-X} \text{ Log } X \; dX - \text{Log } \lambda \qquad \text{avec } X = \lambda x$$

La première intégrale est la dérivée de $\Gamma(\alpha + 1)$ en $\alpha = 0$.

Donc : $$E[\text{Log } x] = [\Gamma(\alpha + 1) \, \psi(\alpha) - \text{Log } \lambda]_{\alpha=0} = - C - \text{Log } \lambda$$

$$C = \text{constante d'Euler} = \psi(0)$$

On aura : $$\boxed{\hat{\lambda}_L = \frac{1}{e^{E[C + \text{Log } x]}}}$$

La variance de Log x sera $E[\text{Log}^2 x] - (C + \text{Log } \lambda)^2$

$$E[\text{Log}^2 x] = \int_0^\infty [\text{Log } X - \text{Log } \lambda]^2 \; e^{-X} dX \qquad (X = \lambda x)$$

$$= \int_0^\infty \text{Log}^2 X \; e^{-X} \; dX - 2 \text{ Log } \lambda \int_0^\infty \text{Log } X \; e^{-X} \; dX + \text{Log}^2 \lambda$$

$$= [\Gamma''(\alpha + 1) - 2 \text{ Log } \lambda \; \Gamma'(\alpha + 1)]_{\alpha=0} + \text{Log}^2 \lambda$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + C^2 + 2 \, C \text{ Log } \lambda + \text{Log}^2 \lambda$$

$$\text{Var}(\text{Log } x) = \frac{\pi^2}{6}$$

Il y a P(t) chances que $E[\text{Log}(x) + C]$ soit compris entre $- \text{Log}(\lambda) \pm \frac{t\pi}{\sqrt{6n}}$ avec un grand nombre n d'observations ou encore que $e^{-E[\text{Log}(x) + C]}$ soit compris entre :

$$e^{\text{Log}(\lambda) \pm \frac{t\pi}{\sqrt{6n}}} = \lambda \left(1 \pm \frac{t\pi}{\sqrt{6n}}\right)$$

On peut dire que $\hat{\lambda}_L$ est un estimateur d'écart-type $\lambda \frac{\pi}{\sqrt{6n}} = \frac{1,28\lambda}{\sqrt{n}}$. Il est beaucoup moins satisfaisant que les estimateurs avec moments d'ordre α pour $0 < \alpha < 2,5$.