

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

PHILIPPE FORMERY

Probabilité pour que simultanément (X soit supérieur à A - Y soit supérieur à B) dans une loi de Laplace-Gauss à deux variables X et Y

Revue de statistique appliquée, tome 8, n° 2 (1960), p. 87-98

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1960__8_2_87_0

© Société française de statistique, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBABILITÉ POUR QUE SIMULTANÉMENT
(X soit supérieur à A – Y soit supérieur à B)
DANS UNE LOI DE LAPLACE-GAUSS A DEUX VARIABLES X ET Y

par Philippe FORMERY
ingénieur civil des mines

I - POSITION DU PROBLEME -

On se propose de calculer la probabilité pour que le point aléatoire (x,y) se trouve dans le domaine : x supérieur à a, y supérieur à b.

Afin de simplifier les notations, prenons l'origine des axes au centre de la distribution. La loi de probabilité de Laplace-Gauss est alors de la forme :

$$d^2P = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{x^2}{s_x^2} - \frac{2rxy}{s_x s_y} + \frac{y^2}{s_y^2} \right]} \frac{dx}{s_x} \cdot \frac{dy}{s_y}$$

que l'on peut écrire :

$$d^2P = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{x^2}{2s_x^2}} e^{-\frac{1}{2s_y^2(1-r^2)} \left(y - r \frac{s_y}{s_x} x \right)^2} \frac{dx}{s_x} \cdot \frac{dy}{s_y}$$

Faisons le changement de variables défini par la droite de régression de y en x :

$$X = \frac{x}{s_x} ; \quad Y = \left(y - r \frac{s_y}{s_x} x \right) \frac{1}{s_y \sqrt{1-r^2}}$$

Le nouvel élément d'aire est :

$$dX dY = \frac{dx dy}{s_x s_y \sqrt{1-r^2}}$$

et la fonction devient :

$$d^2 P = \frac{e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}}{2\pi} dX dY$$

à intégrer dans le domaine défini par les deux droites :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{a}{s_x} \end{array} \right. \quad (D)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = (b - r s_y X) \frac{1}{s_y \sqrt{1-r^2}} \end{array} \right. \quad (D')$$

II - DEFINITION DU DOMAINE D'INTEGRATION -

Soit OX' le demi-axe orienté d'angle polaire i . Définissons la droite D par $\overline{OH}$:

$$\overline{OH} = \frac{a}{s_x}$$

et la droite D' par i et $\overline{OK}$:

$$r = \cos i$$

L'équation de D' peut s'écrire :

$$X \cos i + Y \sin i - \frac{b}{s_y} = 0 \quad (D')$$

D'où :

$$\overline{OK} = \frac{b}{s_y}$$

On a en outre, en projetant le contour $OHIK$ sur OX' :

$$\overline{OH} \cos i + \overline{HI} \sin i = \overline{OK}$$

$$\overline{HI} = \frac{1}{\sin i} \left(\frac{b}{s_y} - \frac{a}{s_x} \cos i \right)$$

$$\overline{HI} = \frac{1}{s_y \sqrt{1 - r^2}} \left(b - ar \frac{s_y}{s_x} \right)$$

et en projetant le contour $OHIK$ sur OX :

$$\overline{OH} + \overline{IK} \sin i = \overline{OK} \cos i$$

$$\overline{IK} = \frac{1}{\sin i} \left(\frac{b}{s_y} \cos i - \frac{a}{s_x} \right)$$

$$\overline{KI} = \frac{1}{s_x \sqrt{1 - r^2}} \left(a - br \frac{s_x}{s_y} \right)$$

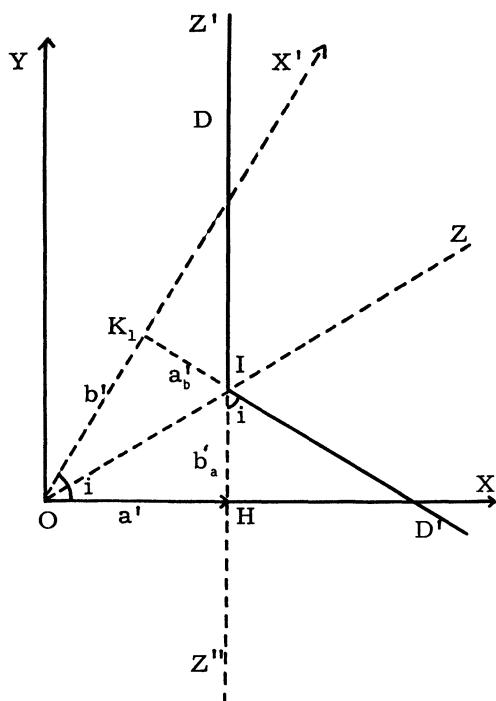
On remarque que :

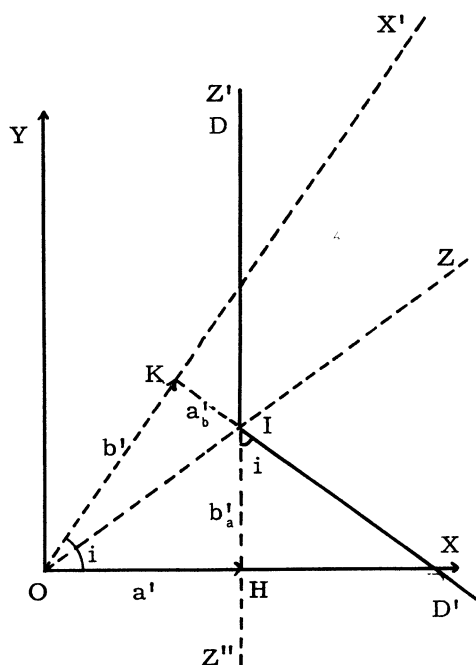
$\overline{OH}$ est la valeur réduite de a dans la loi marginale des x , soit a'

$\overline{OK}$ est la valeur réduite de b dans la loi marginale des y , soit b'

$\overline{HI}$ est la valeur réduite de b dans la loi marginale de y lié par $x = a$, soit :

$$b'_a = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} (b' - ra')$$





$\overline{KI}$ est la valeur réduite de a dans la loi de x lié par $y = b$, soit

$$a'_b = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} (a' - r b')$$

La probabilité pour que x soit supérieur à a , y supérieur à b s'exprime au moyen de trois paramètres seulement : les variables réduites a' et b' et le coefficient de corrélation r .

Ceci posé, la Probabilité pour que x soit supérieur à a , y supérieur à b dans la loi de Laplace-Gauss est mesurée par la valeur de l'intégrale :

$$\iint_{(D'I D)} \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} dX dY$$

dans le domaine $(D'ID)$ ou encore par la somme de l'intégrale de :

$$\iint_{(ZIZ')} \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} dX dY$$

dans le domaine (ZIZ') et de l'intégrale de :

$$\iint_{(D'IZ)} \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} dX dY$$

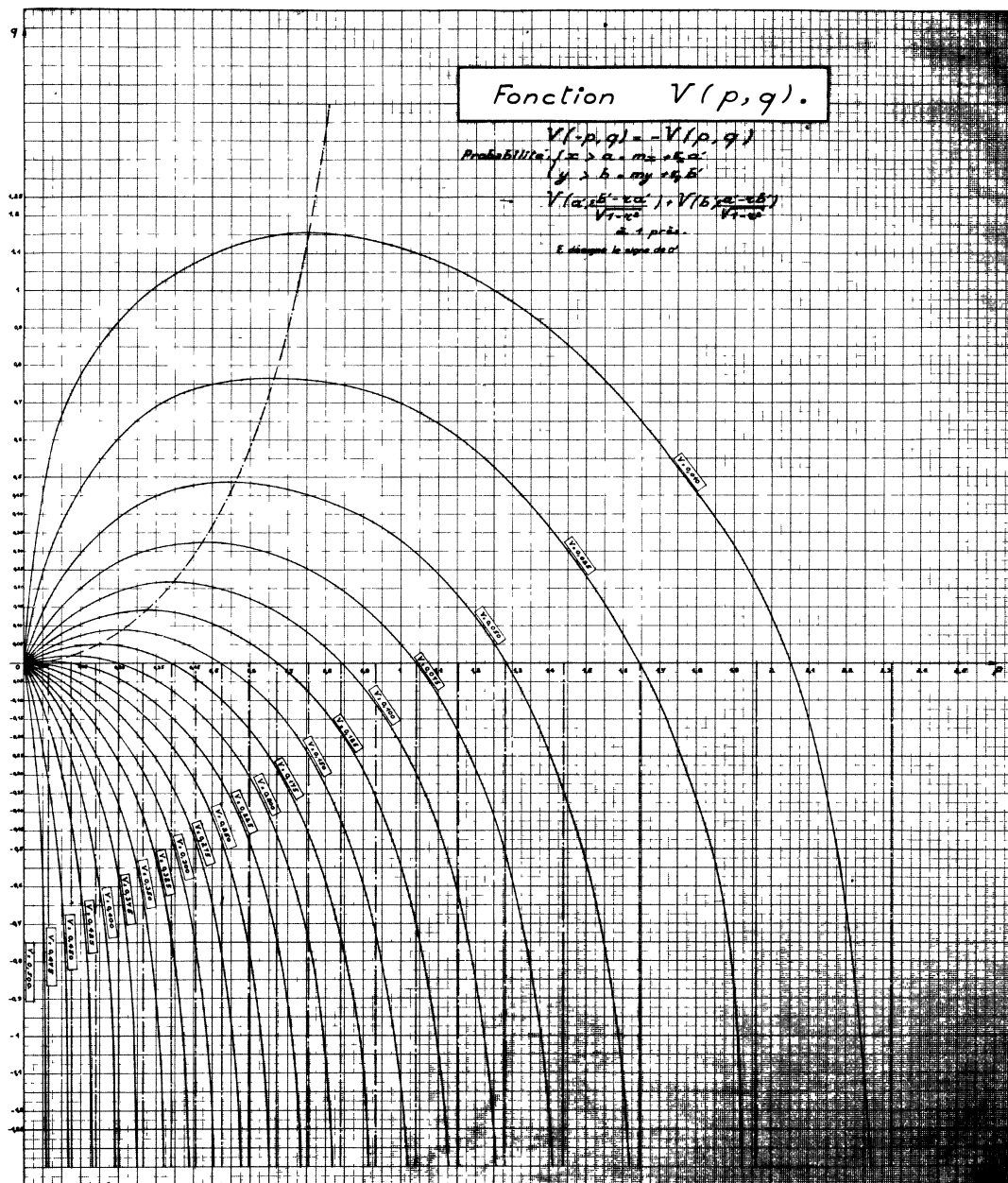
dans le domaine $(D'IZ)$.

On est donc amené à définir et à étudier l'intégrale de $\iint_{(ZIZ')} \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} dX dY$

dans le domaine (ZIZ') défini par les coordonnées cartésiennes p et q de I , ou par l'abscisse p de I et l'angle polaire α de OI . On désignera par $V(p, q)$ ou $V(p, \alpha)$

la fonction du point I mesurant l'intégrale : $\iint_{(ZIZ')} \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} dX dY$. Afin que soit

vraie, quel que soit le cas de figure, la formule énoncée plus bas, on envisagera toujours l'angle ZIZ' inférieur à π . On affectera du signe $+$ la fonction $V(p, q)$ ou $V(p, \alpha)$ si l'angle ZIZ' est direct, du signe $-$ dans le cas contraire, ce qui revient à affecter la fonction du signe de p . D'où :



$$V(-p, q) = -V(p, q)$$

On notera en outre que :

$$V(p, q) + V(p, -q) = \int_p^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = S(p)$$

Moyennant ces hypothèses, et à l'aide de la remarque ci-dessus, on a, quels que soient les signes de a', b', b'_a et a'_b , l'expression :

$$\begin{aligned} \text{Prob. } (x > a, y > b) &= V(a', b'_a) + V(b', a'_b) \\ &= V\left(a', \frac{b' - ra'}{\sqrt{1 - r^2}}\right) + V\left(b', \frac{a' - rb'}{\sqrt{1 - r^2}}\right) \text{ à 1 près} \end{aligned}$$

III - EXPRESSION DE LA FONCTION $V(p, \alpha)$ OU $V(p, q)$ -

1/ $p > 0$.

On suppose tout d'abord $p > 0$.

$$V(p, q) \text{ ou } V(p, \alpha) = \iint_{(Z|Z')} \frac{e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}}{2\pi} dX dY = \iint_{(Z|Z')} \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{2\pi} r dr d\alpha$$

$$V(p, q) \text{ ou } V(p, \alpha) = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{2\pi} \int_{\frac{p}{\cos \alpha}}^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} r dr = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{p^2}{2 \cos^2 \alpha}}}{2\pi} d\alpha = \int_{t=\frac{q}{p}}^\infty \frac{e^{-\frac{p^2(1+t^2)}{2}}}{2\pi(1+t^2)} dt$$

On a déjà noté que $V(p, -q) = S(p) - V(p, q)$.

2/ $p < 0$.

On attribue, par définition à $V(p, q)$ ou à $V(p, \alpha)$ le signe de p . En conséquence, si p est négatif, la fonction sera définie par :

$$V(p, q) = -V(-p, q) \text{ ou}$$

$$V(p, \alpha) = -V(-p, \alpha)$$

Nota - $V(p, q)$ et $V(p, \alpha)$ désignent la même fonction, à savoir la mesure du volume algébrique du secteur $(Z|Z')$, le point I étant caractérisé soit par ses coordonnées cartésiennes (p, q) , soit par son abscisse p et son angle polaire α .

IV - METHODE D'ETABLISSEMENT NUMERIQUE DE LA FONCTION $V(p, \alpha)$ OU $V(p, q)$ $q = p \tan \alpha$ - (voir le faisceau de courbes joint à la note).

On utilisera constamment les fonctions :

$$Y(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{et} \quad S(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

1/ $\alpha > 0$.
 $V(p, \alpha)$ est défini par :

$$V(p, \alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{p^2}{2 \cos^2 \alpha}}}{2\pi} d\alpha = \int_t^{\infty} \frac{e^{-\frac{p^2}{2}(1+t^2)}}{2\pi(1+t^2)} dt$$

$$V'_\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} Y\left(\frac{p}{\cos \alpha}\right)$$

On note que $V(p, 0) = \frac{1}{2} S(p)$.

a) $\alpha < \pi/4$. La fonction est approximativement représentée (à 1/1 000 près) par les premiers termes de son développement (voir plus loin l'établissement du développement) (paragraphe V)

$$V(p, \alpha) \sim \frac{1}{2} S(p) - \alpha \frac{Y(p)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\alpha^3}{6} p^2 \frac{Y(p)}{\sqrt{2\pi}}$$

b) $\alpha = \pi/4$. Une considération géométrique simple montre que :

$$V(p, \pi/4) = \frac{1}{2} S^2(p)$$

c) $\alpha > \pi/4$. Une remarque géométrique analogue permet de se rattacher au cas $\alpha < \pi/4$.

$$V(p, \alpha) = S(p) \cdot S(p \operatorname{tg} \alpha) - V(p \operatorname{tg} \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha)$$

Cependant, lorsque α est assez voisin de $\pi/2$, on obtient une expression approchée plus pratique, en assimilant $\cos \alpha$ à $\pi/2 - \alpha$ et $V(p, \alpha)$ à l'intégrale :

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{p^2}{2 \cos^2 \alpha}}}{2\pi} \sin \alpha d\alpha$$

que l'on sait exprimer au moyen des fonctions Y et S (par intégration par parties).

$$V(p, \alpha) \sim \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2\pi}} Y\left(\frac{p}{\cos \alpha}\right) - p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S\left(\frac{p}{\cos \alpha}\right)$$

avec une erreur relative positive et inférieure à $1 - \sin \alpha$.

2/ $\alpha < 0$.
 On définit $V(p, \alpha)$ par :

$$V(p, \alpha) = S(p) - V(p, -\alpha) = \int_{\alpha}^{\pi/2} \frac{e^{-\frac{p^2}{2 \cos^2 \alpha}}}{2\pi} d\alpha$$

V - DEVELOPPEMENT DE LA FONCTION $V(p, \alpha)$ EN SERIE ENTIERE DE α -

Si on désigne par $u^1 u'' u^{(3)} u^{(4)} \dots$ les dérivées successives de $\operatorname{tg} \alpha$

$$\begin{cases} V'_\alpha = -\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{p^2}{2}(1+t_0^2 \alpha)} \\ V'' = -z V' u'' \\ V^{(n)} = -z(V'u'')^{(n-2)} = -z(V^{(n-1)}u'' + C_{n-2}^1 V^{(n-2)}u'' + C_{n-2}^2 V^{(n-3)}u^{(4)} \dots + C_{n-2}^1 V'u^{(n-1)} + V'u^{(n)}) \end{cases} \quad \text{posant } z = \frac{p^2}{2}$$

Soit : $u_0' = 1$, $u_0^{(3)} = 2$, $u_0^{(5)} = 16$, $u_0^{(7)} = 272$, $u_0^{(9)} = 7\,936 \dots$ les dérivées pour $\alpha = 0$, les dérivées successives d'ordre pair sont nulles.

$$V_0^{(3)} = -z V_0' u_0^{(3)}$$

$$V_0^{(5)} = -z(C_3^1 V_0^{(3)} u_0^{(3)} + V_0' u_0^{(5)})$$

$$V_0^{(7)} = -z(C_5^1 V_0^{(5)} u_0^{(3)} + C_5^3 V_0^{(3)} u_0^{(5)} + V_0' u_0^{(7)})$$

$$V_0^{(9)} = -z(C_7^1 V_0^{(7)} u_0^{(3)} + C_7^3 V_0^{(5)} u_0^{(5)} + C_7^5 V_0^{(3)} u_0^{(7)} + V_0' u_0^{(9)})$$

$$V_0^{(n)} = -z(C_{n-2}^1 V_0^{(n-2)} u_0^{(3)} + C_{n-2}^3 V_0^{(n-4)} u_0^{(5)} \dots + C_{n-2}^2 V_0^{(3)} u_0^{(n-2)} + V_0' u_0^{(n)})$$

Les premiers coefficients sont :

$$V_0' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} Y(p)$$

$$V_0^{(3)} = +\frac{2z}{\sqrt{2\pi}} Y(p)$$

$$V_0^{(5)} = (-12z^2 + 16z) \frac{Y(p)}{\sqrt{2\pi}}$$

$$V_0^{(7)} = (120z^3 - 480z^2 + 272z) \frac{Y(p)}{\sqrt{2\pi}}$$

$$V_0^{(9)} = (-1\,680z^4 + 13\,440z^3 - 20\,384z^2 + 7\,936z) \frac{Y(p)}{\sqrt{2\pi}}$$

$$V(p, \alpha) = \frac{1}{2} S(p) - \frac{Y(p)}{\sqrt{2\pi}} \left[\alpha - \frac{p^2 \alpha^3}{6} + \frac{3p^4 - 8p^2}{120} \alpha^5 - \frac{15p^6 - 120p^4 + 136p^2}{5\,040} \alpha^7 + \frac{105p^8 - 1\,680p^6 + 5\,096p^4 - 3\,968p^2}{362\,880} \alpha^9 - \dots \right]$$

On peut noter que $\frac{3p^4 - 8p^2}{120} \frac{Y(p)}{\sqrt{2\pi}}$ est borné supérieurement par 4/1 000.

Pour $\alpha = \pi/4$, l'erreur maxima est de l'ordre de 4/3 000.

Si l'on n'exige pas une très grande précision, on peut se limiter à :

$$V(p, \alpha) = \frac{1}{2} S(p) - \frac{\alpha Y(p)}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\alpha^3 p^2 Y(p)}{6 \sqrt{2\pi}}$$

VI - DEVELOPPEMENT DE LA FONCTION $V(p, \alpha)$ EN SERIE ENTIERE DE $\frac{p^2}{2} = z$ -

Le développement de $V(p, \alpha)$ en série entière de $\frac{p^2}{2} = z$, peut-être moins pratique dans l'établissement des courbes, donne naissance cependant à une série plus remarquable. On a :

$$V(p, \alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{p^2}{2 \cos^2 \alpha}}}{2\pi} d\alpha = \frac{1}{2} S(p) - \frac{e^{-\frac{p^2}{2}}}{2\pi} \int_0^{\alpha} e^{-\frac{p^2}{2} \tan^2 \alpha} d\alpha$$

que l'on peut écrire en posant $\frac{p^2}{2} = z$ et en introduisant la fonction auxiliaire $A(z, t)$.

$$A(z, t) = e^z \text{Arc tg } t - \int_0^t \frac{e^{-zt^2}}{1+t^2} dt$$

$$V(p, \alpha) = \frac{1}{2} S(\sqrt{2z}) - \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{e^{-z}}{2\pi} A(z, t)$$

Cherchons à développer en série entière la fonction $A(z, t)$.

$$\left[\begin{aligned} A(z, t) &= e^z \text{Arc tg } t - \int_0^t \frac{e^{-zt^2}}{1+t^2} dt \\ A'_z(z, t) &= e^z \text{Arc tg } t + \int_0^t \frac{t^2 e^{-zt^2}}{1+t^2} dt = A(z, t) + \int_0^t e^{-zt^2} dt \\ A_z^{(2)}(z, t) &= A'(z, t) - \int_0^t t^2 e^{-zt^2} dt \\ A_z^{(n)}(z, t) &= A^{(n-1)}(z, t) + (-1)^{n-1} \int_0^t t^{2n-2} e^{-zt^2} dt \end{aligned} \right.$$

$$\text{D'où} \quad A_z^{(n)} = e^z \text{Arc tg } t + (-1)^{n-1} \int_0^t \frac{t^{2n} e^{-zt^2}}{1+t^2} dt$$

Donnant à z la valeur 0

$$\int A = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} A^{(1)} &= A + t && = t \\ A^{(2)} &= A^{(1)} - \frac{t^3}{3} && = t - \frac{t^3}{3} \\ A^{(n)} &= A^{(n-1)} + (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \dots (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} \end{aligned} \right.$$

$A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(n)}$ ne sont autres que les expressions du développement en série entière de Arc tg t limitées respectivement aux premier, second, n ième terme.

D'où le développement :

$$A(z, t) = A^{(1)} \frac{z}{1} + \frac{A^{(2)}}{2!} z^2 + \frac{A^{(3)}}{3!} z^3 + \dots \frac{A^{(n)}}{n!} z^n + \dots$$

valable quels que soient t et z car le reste de la série de Mac Laurin tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (bien que le développement de Arc tg t ne soit convergent que pour $t < 1$). Il serait cependant préférable dans les applications de se borner au cas $t < 1$ puisque l'on sait, dans le calcul de V, ramener le cas $t > 1$ au cas $t < 1$ comme on a vu plus haut.

t étant inférieur à 1, on borne supérieurement $A^{(n+1)}$, $A^{(n+2)}$ etc. par t et le reste de la série exponentielle par $\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{n+1}} \right)$ et on obtient ainsi une limite supérieure de l'erreur sur la fonction $V(p, \alpha)$

$$0 < \text{erreur} < \frac{t z^{n+1} e^{-z}}{2\pi n! (n - z + 1)}$$

Conclusion. Si on désigne par A_n la somme des n premiers termes de la série $\alpha = \text{Arc tg } t$, on obtient pour $V(p, \alpha)$ le développement en série entière de $z = \frac{p^2}{2}$.

Pour $\alpha < \frac{\pi}{4}$ $V(p, \alpha) = \frac{1}{2} S(p) - \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{e^{-z}}{2\pi} \sum_1^n A_n \frac{z^n}{n!} + \frac{\epsilon t z^{n+1} e^{-z}}{2\pi n! (n - z + 1)}$ $0 < \epsilon < 1$ si on se limite aux fonctions $p > 2$; les fonctions $p < 2$ étant toujours inférieures à 0,01

$$V(p, \alpha) = \frac{1}{2} S(p) - \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{e^{-z}}{2\pi} \sum_1^n A_n \frac{z^n}{n!} + \epsilon \cdot 0,043 \frac{2^n}{n!(n-1)}$$

Pour $\alpha > \frac{\pi}{4}$ on se ramène au cas précédent par la formule

$$V(p, \alpha) = S(p) S(p \text{ tg } \alpha) - V(p \text{ tg } \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha)$$

VII - UNE INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE LA FONCTION $V(p, \alpha)$ -

$$V(p, \alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\frac{z}{\cos^2 \alpha}}}{2\pi} d\alpha \quad z = \frac{p^2}{2}$$

Si on effectue sur l'intégrale le changement de variable $\alpha = \frac{\beta}{2}$

$$V(p, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_{2\alpha}^{\pi} e^{-\frac{2z}{(1+\cos\beta)}} d\beta = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_{2\alpha}^{\pi} \left[e^{-\frac{z}{1+\cos\beta}} \right]^2 d\beta$$

D'où
$$V(p, \alpha) = \frac{1}{2\pi} [\text{Aire}]_{2\alpha}^{\pi}$$

On voit sous cette forme que $2\pi V(p, \alpha)$ s'interprète comme l'aire du secteur défini par les rayons d'angles polaires 2α et π et la courbe :

$$r = e^{-\rho}$$

transformée de la parabole (ρ) foyer O et de paramètre z par une transformation exponentielle négative sur le rayon vecteur ρ .

En particulier, on pourra remarquer que cette courbe transformée a pour aire totale :

$$2\pi S(p)$$

L'aire des deux quadrants postérieurs est :

$$2\pi S^2(p)$$

VIII - APPLICATIONS -

1/ Calcul du volume compris entre le plan horizontal XOY et la surface de Laplace-Gauss à l'aplomb d'un domaine angulaire quelconque.

La solution découle immédiatement de la théorie précédente (§ II). Le domaine étant défini par les deux droites D et D' dont les distances à l'origine sont :

$$\overline{OH} = a' \quad \overline{OK} = b'$$

et dont l'angle est i , le volume est donné par la formule :

$$\boxed{V\left(a', \frac{b' - a' \cos i}{\sin i}\right) + V\left(b', \frac{a' - b' \cos i}{\sin i}\right)}$$

2/ Double discrimination dans une population d'individus gigognes.

On envisage une population d'individus désignés par (x) , de valeur aléatoire x , normalement répartis autour d'une moyenne $m(x)$ avec une variance s_x^2 . On imagine ensuite que chaque individu (x) est constitué par une population d'éléments (y) de valeur aléatoire y normalement répartis au sein de l'individu (x) et assujettis aux deux conditions :

- la variance de y au sein de (x) est constante et égale à la différence de la variance de l'ensemble des y relatifs à tous les (x) et de la variance des x ;

$$v_{y \cdot x}^2 = s_y^2 - s_x^2$$

- la valeur moyenne des éléments (y) est égale à la valeur de (x) : moyenne liée

$$\bar{y}_x = x$$

On peut alors admettre que le couple (x, y) suit une loi de Laplace-Gauss à deux variables, ainsi définie.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{valeurs moyennes } m_x = m_y = m \\ \text{variances } s_x^2 \text{ et } s_y^2 \\ \text{variance de y lié par x : } v_{y,x}^2 = s_y^2 - s_x^2 \\ \text{droite de régression de y en x : } \bar{y}_x = x \\ \text{c'est-à-dire coefficient de corrélation } r = \frac{s_x}{s_y} \end{array} \right.$$

Ceci posé, on appellera double discrimination l'opération qui consiste à sélectionner les éléments (y) dont la valeur est supérieure à une grandeur b et qui soient en outre situés au sein d'individus (x) dont la valeur est supérieure à a.

Le résultat de cette opération de double discrimination n'est autre que la probabilité pour que x soit supérieur à a et y supérieur à b dans une loi Laplace-Gauss définie comme il précède.

En conséquence, désignant comme plus haut par a' et b' les variables réduites de a et b, le rendement de la double discrimination peut se calculer par la formule :

$$\text{soit } \frac{V(a', b'_a) + V(b', a'_b)}{V\left(a', \frac{b - a}{v_{y,x}}\right) + V\left(b', \frac{a's_y - b's_x}{v_{y,x}}\right)}$$

Corollaire -

Cas d'une répartition log-normale des individus (x) et d'une répartition log-normale des individus (y) au sein des individus (x).

Ce corollaire présente un certain intérêt en statistique des gisements :

Le raisonnement précédent subsiste intégralement, les variables réduites prennent toutefois la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} a' = \frac{1}{s_x} L \frac{a}{m} + \frac{s_x}{2} \\ b' = \frac{1}{s_y} L \frac{b}{m} + \frac{s_y}{2} \\ b'_a = \frac{1}{v_{y,x}} L \frac{b}{a} + \frac{v_{y,x}}{2} \end{array} \right.$$

$$V(a', b'_a) + V\left(b', \frac{a's_y - b's_x}{v_{y,x}}\right)$$

Remarque - Si x et y désignent des teneurs en métal de masses de minerai, la proportion en métal contenu dans les wagonnets sélectionnées sera donnée par

la formule précédente avec :

$$\left| \begin{array}{l} a' = \frac{1}{s_x} L \frac{a}{m} - \frac{s_x}{2} \\ b' = \frac{1}{s_y} L \frac{b}{m} - \frac{s_y}{2} \\ b'_a = \frac{1}{v_{y.x}} L \frac{b}{a} - \frac{v_{y.x}}{2} \end{array} \right.$$

Les variables réduites du métal contenu dans le minerai sont en effet inférieures d'un écart-type à celle du minerai.

3/ Calcul approximatif d'un coefficient de corrélation expérimentale.

En se reportant au deuxième paragraphe de cette note et à la première figure, on note que :

- la probabilité pour que (x supérieur à a et y inférieur à b) est donnée par le volume relatif au domaine (Z''IZ).

En particulier, la probabilité P_0 pour que (x supérieur à sa moyenne m_x et y inférieur à sa moyenne m_y) est égale à $i/2\pi$.

$$P_0 = \frac{i}{2\pi}$$

Or, on a vu dans le premier paragraphe que :

$$r = \cos i$$

D'où

$$\boxed{r = \cos 2\pi P_0}$$

On peut obtenir ainsi une évaluation rapide d'un coefficient de corrélation expérimentale à partir de la proportion P_0 des points expérimentaux situés dans le quatrième quadrant ayant pour sommet le point moyen (m_x , m_y) de la distribution.

On a retrouvé une formule classique sous une forme un peu différente.