

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

GUY D'HERBEMONT

Quelques remarques à propos d'un plan d'expérience

Revue de statistique appliquée, tome 8, n° 2 (1960), p. 41-52

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1960__8_2_41_0

© Société française de statistique, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES REMARQUES A PROPOS D'UN PLAN D'EXPERIENCE

par Guy d'HERBEMONT

Ancien élève de l'École Polytechnique

Ingénieur E.S.S.A.

Chef de service à l'Institut de Soudure

Divers programmes d'essais auxquels il a été fait allusion dans la revue⁽¹⁾ ont permis d'étudier le comportement des électrodes de soudage à l'arc en forte pénétration, en fonction de divers facteurs.

Les connaissances acquises de cette façon ont conduit à concevoir par la suite, un plan d'expérience destiné à définir les caractéristiques d'emploi de divers types d'électrodes fournies sur le marché. L'exposé suivant a pour but de présenter un certain nombre de remarques générales à propos de la construction et de l'interprétation de ce plan.

A - CONSTITUTION DU PLAN D'EXPERIENCE -

Les résultats recueillis antérieurement ont montré que, dans le domaine d'emploi pratique, la pénétration p obtenue pour un réglage donné des conditions de soudage, pouvait s'exprimer par la formule :

$$p = p_0 + a(I - I_0) + b(V - V_0) + c(w - w_0) + (f_e - f_0)$$

où les symboles ont la signification suivante :

- p pénétration obtenue en millimètres,
- p_0 pénétration moyenne,
- I intensité de soudage en ampères,
- I_0 intensité moyenne indiquée par le fabricant,
- V vitesse d'avance en centimètres par minute,
- V_0 vitesse moyenne indiquée par le fabricant,
- w inclinaison de l'électrode en degrés,
- w_0 inclinaison moyenne,
- f_e fonction de l'écartement des tôles à souder,
- f_0 moyenne de la fonction précédente,
- $a, b, c,$ paramètres caractéristiques du type d'électrode considéré.

Cette formule constitue un modèle linéaire en fonction des quatre paramètres $p_0, a, b, c,$ et des paramètres $(f_e - f_0)$, en nombre égal à celui des variantes d'écartement moins une.

(1) Revue de Statistique Appliquée - Vol. VI - N° 1.

Pour déterminer ces paramètres, il était nécessaire de mettre en œuvre un plan d'expérimentation comportant quatre facteurs principaux (I, V, w et e), auxquels il était souhaitable d'adjoindre un cinquième facteur prenant en compte des variantes d'échantillonnage. Toutefois lors de la première mise en œuvre du plan ce dernier facteur devait contrôler également que certaines variations dans les modalités d'exécution des essais étaient sans influence.

Dans tous les cas les variantes de ce facteur devaient permettre de discerner parmi les essais plusieurs catégories ou "blocs". Chaque bloc se trouve ainsi caractérisé par un paramètre correctif ϑ_b , avec $\sum \vartheta_b = 0$, venant s'ajouter au second membre de la formule (1).

Par ailleurs, il fallait que le plan soit susceptible d'attirer l'attention sur une éventuelle courbure des lois de variation en fonction de l'intensité et de la vitesse. Trois niveaux au moins étaient donc à prévoir pour ces deux facteurs, afin de pouvoir ajouter à la formule (1) un terme quadratique en I et un terme quadratique en V :

$$\lambda P(I) + \mu Q(V) \tag{2}$$

P et Q étant les polynômes du second degré orthogonaux aux termes du premier degré⁽¹⁾ et λ et μ , les paramètres correspondants.

L'influence de l'écartement, quoique considérable, était mal connue et quatre niveaux au moins étaient nécessaires pour l'analyser.

Quant à l'influence de l'inclinaison de l'électrode elle était toujours apparue très faible, et l'on désirait seulement vérifier qu'elle restait du même ordre pour les nouveaux types d'électrodes qui seraient présentés aux essais. Deux niveaux d'inclinaison ont donc été jugés suffisants.

Il résulte de tout ceci qu'un plan factoriel complet, combinant de toutes les façons possibles les variantes des cinq facteurs, aurait nécessité, en supposant que l'on se borne à distinguer deux blocs : $3 \times 3 \times 4 \times 2 \times 2 = 144$ essais.

Ceci ayant été jugé manifestement trop coûteux, il a été décidé de recourir à un plan factoriel réduit, c'est-à-dire un plan factoriel dans lequel, seules, certaines combinaisons de variantes sont essayées.

Le modèle linéaire, constitué par la formule (1), complétée par le paramètre de bloc et les deux termes quadratiques, étant du type purement additif (somme de fonctions⁽²⁾ à une seule variable désignant le niveau du facteur correspondant), on pouvait renoncer à l'estimation des interactions.

Dans ce cas, une formule économique est le carré latin de côté k, correspondant à l'exécution de k^2 essais. Or, on sait qu'un tel carré, complètement orthogonalisé permet d'imbriquer $k+1$ facteurs au plus. Il fallait donc que k soit au moins égal à 4. On a choisi $k = 5$ afin de disposer d'un nombre de degrés de liberté suffisant pour l'erreur expérimentale.

La construction de ce plan s'est effectuée de la façon suivante (figure 1).

- (1) En ce qui concerne la notion de polynômes orthogonaux, on pourra recourir, par exemple, à Kendall : The Advanced Theory of Statistics - Vol. II - Chap. 2 (Griffin éd.).
- (2) Il y a lieu de remarquer, en effet, que la notation paramétrique avec paramètres munis d'indices, par exemple ϑ_b , désigne la même chose que la notation fonctionnelle : $\vartheta(b)$. Dans les deux cas il s'agit de la valeur prise par ϑ pour la valeur b, autrement dit de la fonction ϑ de la variable b.

$y + x$		$x \rightarrow$								$y + 2x$	
		0	1	2	3	4					
0	0	0	0	1	2	2	4	3	1	4	3
	1	0	0	3	4	1	3	4	2	2	1
1	2	1	1	2	3	3	0	4	2	0	4
	3	1	1	4	0	2	4	0	3	3	2
2	4	2	2	3	4	4	1	0	3	1	0
	0	2	2	0	1	3	0	1	4	4	3
3	1	3	3	4	0	0	2	1	4	2	1
	2	3	3	1	2	4	1	2	0	0	4
4	3	4	4	0	1	1	3	2	0	3	2
	4	4	4	2	3	0	2	3	1	1	0
$y + 3x$										$y + 4x$	

Figure 1
Carré latin complètement orthogonalisé de côté $k = 5$.

Dans chaque case x, y ($x = 0, 1, 2, 3, 4$ et $y = 0, 1, 2, 3, 4$) d'un carré de $5 \times 5 = 25$ cases, on a disposé quatre nombres :

$$u_1 = y + x$$

$$u_2 = y + 2x$$

$$u_3 = y + 3x$$

$$u_4 = y + 4x$$

réduits à leur reste de division par 5.

On montre que, du fait que 5 est un nombre premier, on obtient bien ainsi un carré latin complètement orthogonalisé; c'est-à-dire que si l'on attribue les six séries de nombres (x, y, u_1 à u_4) à six facteurs et les cinq nombres à leurs cinq variantes, toute combinaison d'une variante d'un facteur quelconque avec une variante d'un autre facteur est représentée une fois et une seule (dans une case et une seule). Ainsi la combinaison $u_2 = 3, u_4 = 4$ figure colonne 2, ligne 3.

Les niveaux du sixième facteur ne correspondent ici à aucune réalité physique. Mais ils sont très utiles pour la conduite des calculs car l'effet fictif qui résulte de leur prise en considération correspond au résidu expérimental que l'on peut ainsi calculer séparément.

Le carré de la figure 1 est d'ailleurs à peu de chose près celui que l'on aurait trouvé en recourant aux tables de Fisher et Yates⁽¹⁾, qui donnent des carrés latins complètement orthogonalisés, pour tous les entiers k inférieurs à 10 et différents de 6 (valeur pour laquelle il n'en existe pas).

Ceci posé, on a décidé de faire varier l'intensité, la vitesse, l'écartement et l'angle, par échelons égaux respectivement à 10 ampères, 2,5 cm/minute, 0,5 mm et 1,5 degrés, l'ensemble des essais étant réparti en 5 blocs de 5 essais chacun. Après affectation des facteurs au hasard des lettres et affectation de leurs niveaux au hasard des chiffres, le plan d'expérience s'est présenté de la façon indiquée sur la figure 2.

		blocs →										
Vitesse		1		3		4		0		2		Intensité
Ecartement	1	4	1	3	4	0	2	2	0	1	3	
		2	0	4	4	0	3	3	2	1	1	
	0	3	0	0	3	2	1	1	4	4	2	
		0	1	3	0	1	4	2	3	4	2	
	4	0	4	2	2	1	0	4	3	3	1	
		1	2	2	1	4	0	0	4	3	3	
	2	2	3	1	1	4	4	3	2	0	0	
		4	3	0	2	3	1	1	0	2	4	
	3	1	2	4	0	3	3	0	1	2	4	
		3	4	1	3	2	2	4	1	0	0	
Angle												Résidu

Figure 2

Les indications données aux 4 sommets du carré sont relatives aux quatre positions à l'intérieur des cases, qui décrivent les combinaisons de variantes des facteurs pour chacun des 25 essais.

Les 24 degrés de liberté correspondants peuvent être utilisés de la façon suivante :

	<u>Degrés de liberté</u>
1/ Variations prises en compte par la formule (1)	
- influence linéaire de I.....	1
- influence linéaire de V.....	1
- influence linéaire de W.....	1
- influence de l'écartement.....	4

(1) Fisher and Yates - Statistical Tables for biological, agricultural and medical research - (Oliver and Boyd Ed.).

	<u>Degrés de liberté</u>
2/ Ecarts par rapport à la formule (1)	
- non linéarité en I (terme quadratique) ...	1
- non linéarité en V (terme quadratique) ...	1
- influence des blocs	4
3/ Résidu	<u>11</u>
Total :	24

Mais avant de mettre en œuvre un tel plan, proposé principalement pour des raisons d'économie, il est nécessaire de vérifier que l'on peut répondre affirmativement aux deux questions suivantes :

1/ Les paramètres à estimer, peuvent-ils l'être avec la précision requise ?

2/ La puissance du plan est-elle suffisante pour détecter presque certainement les effets ayant une importance du point de vue technique ?

Pour répondre à la première question, il est facile de calculer les précisions obtenues pour a, b, c et p₀, en fonction de l'erreur expérimentale de variance σ^2 et l'erreur interbloc σ_b^2 .

On obtient :

$$\pm 2\sigma(a) = \pm 0,025\sigma$$

$$\pm 2\sigma(b) = \pm 0,110\sigma$$

$$\pm 2\sigma(c) = \pm 0,18\sigma$$

$$\pm 2\sigma(p_0) = \pm 2 \sqrt{\sigma^2/25 + \sigma_b^2/5}$$

Etant donné l'idée que l'on se faisait a priori des variances, on a jugé que ces précisions étaient suffisantes.

Pour répondre à la seconde question, qui se rapporte aux trois tests prévus :

- non linéarité en I
- non linéarité en V
- influence des blocs

il convenait d'étudier le risque de seconde espèce c'est-à-dire la probabilité de juger statistiquement non significatif un effet techniquement à prendre en considération.

Cette question est souvent laissée dans l'ombre comme si le plus grand danger auquel s'expose un expérimentateur était de déceler des effets qui n'existent pas. Pourtant le danger de ne pas déceler des effets considérables paraît tout aussi grave. Par ailleurs, la connaissance a priori de l'effet à partir duquel le risque de seconde espèce est inférieur à 0,10, par exemple, permet de se rendre compte si le plan d'expérience risque ou non de faire paraître hautement significatifs des effets techniquement négligeables.

Or, les tables de Tang⁽¹⁾ permettent facilement de répondre à ce genre de question dans le cas de modèle à effets fixes. Ces tables donnent la probabilité d'accepter l'hypothèse nulle (risque β) en fonction du risque de première espèce

 (1) Statistical Research Memoirs V, 2 - 1938 - ou Kempthorne : Design and Analysis of Experiments (Wiley Ed.)

α choisi, des degrés de liberté en jeu et d'un paramètre Φ proportionnel aux effets considérés, mesurés en écarts-type. (Le coefficient de proportionnalité dépend du plan d'expérience et de la définition des effets).

Voici comment on détermine Φ .

S'il n'y a pas d'effet le terme "somme des carrés" de la ligne correspondante du tableau d'analyse de variance a pour espérance mathématique $v_1 \sigma^2$, v_1 étant le nombre de degrés de liberté relatifs à cette ligne.

S'il y a un effet et que l'on introduit celui-ci dans le modèle mathématique, l'espérance de ce même terme peut se mettre sous la forme :

$$d^2 + v_1 \sigma^2$$

ce qui détermine d en fonction de l'effet considéré.

Dans ces conditions le paramètre Φ de Tang est égal à :

$$\Phi = \frac{d}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + v_1}}$$

L'utilisation des tables permet donc de déterminer combien d'essais doivent être mis en jeu pour pouvoir tester

- au risque α l'hypothèse : "Effet techniquement négligeable (inférieur à une certaine limite)";
- contre, au risque β , l'hypothèse : "Effet techniquement à déceler (supérieur à une certaine limite)".

Si le plan d'expérience n'a pas été construit en tenant compte de cette remarque, la notion de signification statistique ne coïncide pas nécessairement avec la notion de signification technique.

Prenons, par exemple, le cas de l'effet quadratique relatif à l'intensité de soudage (terme $\lambda P(I)$). On trouve dans les tables de Tang, pour $v_1 = 1$, $v_2 = 11$, $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,10$, la valeur :

$$\Phi = 2,5$$

Il en résulte que :

$$d = \sigma \Phi \sqrt{1 + v_1} = 2,5 \sqrt{2} \sigma = 3,5 \sigma$$

Or ici d n'est autre que le coefficient λ de $P(I)$, qui, lui-même, a pour expression :

$$P(I) = \frac{(I - I_0)^2 - 200}{100 \sqrt{70}}$$

Ce polynôme a pour extremum, atteint pour la valeur centrale et les deux valeurs extrêmes ($I = I_0 \pm 20$), la quantité $\pm 2/\sqrt{70}$. L'effet maximum de pénétration correspondant à $\lambda = d = 3,5 \sigma$ est donc :

$$\max |\lambda P(I)| = 3,5 \times 2/\sqrt{70} \sigma = 0,85 \sigma$$

Si, par conséquent, la loi de variation de la pénétration en fonction de l'intensité de soudage présente un terme du second degré introduisant un écart de pénétra-

tion de $0,85\sigma$ par rapport à un ajustement linéaire, cet effet est décelé par l'analyse de variance, au risque $\beta = 0,10$ près.

En opérant de façon analogue pour les autres effets, on trouve que ceux-ci, au risque $\beta = 0,10$ près, sont décelés à partir des valeurs suivantes :

	<u>pour $\alpha = 0,05$</u>	<u>pour $\alpha = 0,01$</u>
Effet quadratique d'intensité	$0,85\sigma$	$1,10\sigma$
Effet quadratique de vitesse	$0,85\sigma$	$1,10\sigma$
Blocs	$0,99\sigma$	$1,23\sigma$

Dans ce tableau l'effet des blocs a été défini par l'écart type "certain" présenté par les blocs après que leur choix ait été fait.

On a jugé ces valeurs comme techniquement satisfaisantes, à condition de prendre le risque $\alpha = 0,05$ pour exécuter les tests F.

B - RESULTATS ET INTERPRETATION D'UNE EXPERIENCE MENEES SELON CE PLAN -

Cet examen préalable étant fait, on a procédé aux essais qui ont donné les résultats de la figure 3. Ceux-ci sont exprimés en dixièmes de millimètres après soustraction d'une constante (4,6 mm). Chaque résultat est disposé dans la case correspondant à celle de la figure 2.

		blocs				
		1	3	4	0	2
Ecartement ↑ ↓	1	0	22	18	8	21
	0	3	23	11	29	4
	4	57	42	39	47	41
	2	47	20	41	40	25
	3	44	21	40	44	46

Figure 3

Résultats des essais exprimés en dixièmes de millimètres, soustraction faite d'un terme constant (4,6 mm).

L'analyse de variance habituelle, s'agissant d'un carré latin, est extrêmement simple : le calcul se fait comme si chaque facteur agissait seul.

On effectue d'abord le total général des 25 résultats, on l'élève au carré et on divise ce carré par 25 pour obtenir le terme correctif.

Pour chaque facteur on effectue les cinq sommes de cinq valeurs correspondant à chaque variante. On calcule la somme des carrés de ces cinq sommes, on la divise par cinq et du quotient ainsi obtenu, on retranche le terme correctif. On obtient ainsi la quantité à placer dans la colonne "somme des carrés" de l'analyse de variance (figure 4).

Sources de variations	Sommes de carrés	Degrés de Liberté	Carré Moyen	F
Intensité	1 365	4	341	+++
Vitesse	328	4	82	non
Ecartement	4 247	4	1 062	+++
Angle	96	4	24	non
Blocs	184	4	46	non
Résidu	85	4	21	
Total	6 305	24		

Figure 4

non < $F_{0,1}$

+ > $F_{0,1}$

++ > $F_{0,05}$

+++ > $F_{0,01}$

On serait tenté de conclure de cette analyse que, ni la vitesse, ni l'angle, ni les blocs n'ont d'influence significative au seuil 10%.

Considérons pourtant, par exemple, les 5 moyennes correspondant aux 5 niveaux de vitesse successifs. Ce sont, dans l'ordre :

33,4 - 30,6 - 30,8 - 29,2 - 22,6 -

On constate donc une évidente décroissance des moyennes de pénétration en fonction de la vitesse. Mais l'analyse de la figure 4 ne permet pas de tenir compte de faits de ce genre, car si les moyennes avaient été les mêmes, mais dans un tout autre ordre, le terme "somme des carrés" correspondant serait resté rigoureusement identique.

Cette analyse pêche donc par un détail essentiel : elle ne tient pas compte du fait que la loi de variation en fonction des facteurs est progressive.

Si, par contre, on base l'analyse sur la formule (1) complétée par la formule (2) et les paramètres ϑ_0 , c'est-à-dire en tenant compte des renseignements que l'on possède a priori, on trouve le tableau suivant (figure 5).

On constate que les conclusions sont fort différentes de celles que l'on pouvait tirer de l'analyse précédente. En fait il faut parier sur l'influence de la vitesse et, moins chèrement, sur celle de l'angle. Quant aux blocs, ils n'atteignent pas le seuil dangereux.

Il est important de remarquer que cette modification des conclusions par rapport à l'analyse incomplète n'est pas due uniquement au fait que le résidu a été réévalué et comporte maintenant 11 degrés de liberté au lieu de 4. En effet, même si on teste l'influence linéaire de la vitesse par rapport au résidu du tableau précédent (figure 4) avec ses quatre degrés de liberté, on trouve que $265/21$ dépasse le seuil correspondant à $\alpha = 0,05$ (le seuil atteint ainsi correspond à $\alpha = 0,025$). Ce terme linéaire est en fait important mais il se trouve masqué dans la précédente analyse par la moyenne qui en est prise avec trois autres carrés qui sont des estimations de σ^2 .

Sources de Variations	Sommes de Carrés	Degrés de Liberté	Carré Moyen	F
Intensité (loi linéaire)	1 352	1	1 352	+++++
Vitesse (loi linéaire)	265	1	265	++++
Ecartement (total)	4 247	4	1 062	+++++
Angle (loi linéaire)	52	1	52	+
Non linéarité en I	1	1	1	non
Non linéarité en V	31	1	31	non
Bloc	184	4	46	+
Résidu	173	11	16	

Figure 5

non < $F_{0,1}$ + > $F_{0,1}$ ++ > $F_{0,05}$ +++ > $F_{0,01}$ ++++ > $F_{0,005}$ +++++ > $F_{0,001}$

Ce phénomène très général peut d'ailleurs être chiffré d'une façon plus rigoureuse en se plaçant du point de vue du risque de seconde espèce.

En recourant aux tables de Tang et en acceptant de prendre les risques $\alpha = 0,05$ et $\beta = 0,10$, on constate que, pour qu'un effet linéaire soit décelable par l'analyse de la figure 4, il faut qu'il soit deux fois plus important qu'il n'est nécessaire si l'on utilise l'analyse de la figure 5. L'analyse de la figure 5 présente donc le double avantage de mieux mettre en évidence des effets linéaires et de pouvoir tester des écarts éventuels par rapport à la linéarité.

C - ESTIMATION DE LA VARIANCE INTERBLOCS -

Si l'on se place dans le cadre de la population de tous les blocs de 5 essais possibles, et si l'on admet que le choix particulier qui en a été fait est un choix au hasard, l'influence des blocs est une variable aléatoire et le carré moyen relatif aux blocs a pour espérance $5\sigma_b^2 + \sigma^2$. Il en résulte que :

$$\frac{(\text{carré moyen blocs}) - (\text{carré moyen résidu})}{5}$$

semble avoir pour espérance mathématique σ_b^2 et constituer ainsi une estimation absolument correcte de la variance interbloc.

On estimerait de cette façon :

$$\hat{\sigma}_b^2 \text{ bloc} = \frac{1}{100} \frac{(46 - 16)}{5} = 0,06 \text{ mm}^2$$

Cependant, cette estimation, obtenue par différence, aurait pu être négative. Ceci a pour conséquence qu'au lieu de prendre, comme on désirerait le croire, l'estimation absolument correcte considérée, on prend en fait celle-ci assortie à la condition d'être positive. Ce faisant, on n'utilise donc que la partie positive de la distribution de l'estimateur, si bien que l'espérance mathématique se déplace vers la droite, introduisant ainsi un biais positif. Ce biais devient encore plus grand si au lieu de la condition d'être positif on choisit la condition de dépasser le seuil indiqué par le test F; dans ces conditions, en effet, on né-

glige non seulement la partie négative de la distribution mais encore une certaine partie positive.

Il y a lieu de remarquer cependant que, si l'on est décidé à affirmer $\sigma_B^2 = 0$ lorsque le seuil n'est pas atteint, ceci peut diminuer, annuler ou même changer le signe du biais ainsi mis en évidence. Mais il n'en reste pas moins alors que les estimations autres que zéro sont en moyenne trop grandes.

Quoiqu'il en soit, ces remarques contribuent à montrer qu'il y a intérêt à préférer les méthodes d'estimation par intervalles de confiance et les formules antérieurement publiées dans la revue à ce sujet⁽¹⁾. Dans ces conditions on trouve alors en prenant un risque $\alpha = 0,10$:

$$0 < \sigma_B^2 < 0,18 \text{ mm}^2$$

inégalité qui confirme d'ailleurs que l'on doit considérer σ_B^2 comme inférieur à la limite techniquement acceptable.

D - ETUDE DE L'INFLUENCE DE L'ECARTEMENT -

L'une des raisons pour lesquelles l'écartement des tôles a été introduit dans les programmes d'essai, était de mieux connaître la loi de variation en fonction de ce facteur. C'est en effet cette loi qui détermine la précision avec laquelle les bords à souder doivent être préparés. Mais le plan d'essai n'a pas été prévu pour prendre des décisions définitives à cet égard.

Des résultats obtenus antérieurement ont montré que, pour tous les types d'électrodes cette influence se manifeste par une croissance régulière de la pénétration, tout au moins à partir d'un écartement égal à 1 mm. Entre 0 et 1 mm on pensait qu'il se présentait un palier presque horizontal (figure 6).

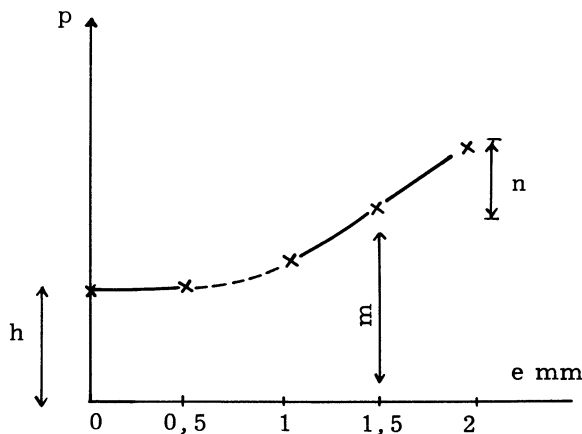


Figure 6
Variations de la pénétration avec l'écartement des bords à souder.

(1) J. Ulmo - D. Schwartz et A. Vessereau - Problèmes relatifs aux échantillonnages à plusieurs niveaux - Revue de Statistique Appliquée - Vol. V - N°1 - 1957.

Si l'on tente de chiffrer l'influence correspondante à l'aide d'un polynôme, celui-ci risque d'être d'un degré élevé à cause de ce palier initial; pour obtenir un ajustement correct on devrait donc recourir à un plus grand nombre de niveaux intermédiaires.

A cause de ce fait et pour des raisons de simplicité on a schématisé les variations d'une autre manière, à l'aide de deux segments de droite en laissant subsister une incertitude dans la zone comprise entre 0,5 et 1 mm.

Ce schéma (hypothèse à tester) est linéaire, fonction de 3 paramètres h et n , l'ensemble de tous les cas possibles pouvant être représenté à l'aide de deux paramètres supplémentaires q et r , de la façon suivante (p_i désigne la pénétration obtenue pour la valeur i de l'écartement) :

$p_0 = h$	$-q$	
$p_{0,5} = h$	$+q$	
$p_1 = m - n$		$+ r$
$p_{1,5} = m$		$-2r$
$p_2 = \underbrace{m + n}_{\text{schéma proposé}}$	$\underbrace{\hspace{2cm}}$ inclinaison du palier	$\underbrace{+ r}_{\text{courbure de la partie croissante}}$

Les quatre hypothèses $q=0$ $r=0$ $n=0$ et $h=m$ étant orthogonales, l'analyse de variance peut être dressée comme indiqué sur la figure 7.

SOURCE DE VARIATIONS	SOMME DES CARRÉS	DEGRÉS DE LIBERTÉ	F
1 - Schéma proposé soit :			
- différence entre la moyenne des deux premières valeurs et celle des 3 dernières ($m - h$)	3 963	1	oui
- variation linéaire des 3 dernières valeurs (n)	281	1	oui
2 - Ecarts par rapport au schéma proposé soit :			
- différence entre les deux premières valeurs (q)	0,1	1	non
- non linéarité des 3 dernières valeurs (r)	3	1	non
Influence totale de l'écartement	4 247	4	

Figure 7
Etude de l'influence de l'écartement

Cette analyse montre que le schéma proposé prend en compte pratiquement la quasi-totalité des variations et que les écarts ne sont pas significatifs, par rapport au résidu calculé par ailleurs ($\hat{\sigma}^2=16$ avec 11 degrés de liberté).

