REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

F. BASTENAIRE
M. BASTIEN

Essais de la communauté européenne du charbon et de l'acier de réfractaires de silice pour voûtes des fours Martin

Revue de statistique appliquée, tome 7, nº 3 (1959), p. 81-110
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1959__7_3_81_0>

© Société française de statistique, 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ESSAIS DE LA COMMUNAUTÉ EUROPÉENNE DU CHARBON ET DE L'ACIER DE RÉFRACTAIRES DE SILICE POUR VOUTES DES FOURS MARTIN

F. BASTENAIRE et M. BASTIEN
Ingénieurs au Service Statistique
de l'Institut de Recherches de la Sidérurgie

La tendance actuelle au remplacement du gaz de gazogène par du mazout, du goudron ou du gaz naturel, pour le chauffage des fours d'aciérie, et l'augmentation du rendement généralement demandé à ces fours ont entraîné une diminution de la durée de leurs voûtes. Le besoin de réfractaires de plus en plus résistants s'est donc fait sentir de façon de plus en plus pressante au cours des dernières années.

Dans la plupart des pays, ceux, en particulier, de la Communauté Européenne du Charbon et de l'Acier, les briques de silice sont encore, pour des raisons économiques, les plus couramment employées.

En 1954, la Haute Autorité de la C.E.C.A. a, en conséquence, fourni son appui à une Commission de techniciens chargée d'organiser des essais comparatifs sur différents types de briques de silice. Cette Commission disposait alors de seize fours répartis dans quatre pays de la C.E.C.A.

Or, en raison de leur ampleur ou de la diversité des installations utilisées, les essais réalisés en commun par plusieurs usines, à l'échelle industrielle, donnent des résultats dont l'interprétion est délicate par suite de l'intervention de facteurs différents selon les usines dont les effets se combinent à ceux des facteurs que l'on veut étudier.

L'adoption d'un plan d'essais approprié permet, cependant, de se débarrasser des effets du facteur "usine" et d'estimer les effets des facteurs à étudier avec une meilleure précision.

Les servitudes qu'un plan d'essais impose aux participants à une recherche sont largement compensés par la réduction importante du nombre total d'essais requis et par la quasi-certitude d'obtenir une réponse valable - positive ou négative - aux questions posées. Les discussions qui précèdent le choix d'un plan stimulent les réflexions, ce qui permet de parer à l'avance à la plupart des écueils.

On verra dans ce qui suit que l'organisation de ces essais a posé un problème difficile car, en définitive, le nombre des fours disponibles a été réduit à treize : trois en Belgique, quatre en France, deux en Italie et quatre dans la République Fédérale Allemande.

Première partie

PLAN DES ESSAIS

I - INTRODUCTION -

La durée de la voûte d'un four Martin dépend de nombreux facteurs. On sait, par exemple, qu'elle est fonction de la nuance de l'acier produit, de la productivité exigée du four, de sa capacité, du combustible utilisé et même de la conduite des opérations.

Les variations des facteurs dont l'action est connue ne suffisent cependant pas à expliquer les différences que l'on constate entre les durées de différentes voûtes. Cette durée est affectée, et les résultats des essais dont il sera ici question, le confirment, d'une importante dispersion.

Pour comparer le comportement de deux réfractaires de façon valable, il faut donc disposer, relativement à chacun d'eux, de plusieurs résultats.

Ce ne serait cependant qu'avec des moyens à la fois assez considérables et assez concentrés que l'on pourrait répéter, dans des conditions relativement uniformes, des essais industriels dans des fours Martin.

En organisant une recherche coopérative, on parvient à répartir les risques de perturbation de la production sur un plus grand nombre d'usines mais les conditions des essais deviennent, en même temps, d'autant moins uniformes que le nombre de participants à la recherche est plus grand.

Il faut alors trouver une répartition des essais qui ne soit pas incompatible avec une interprétation correcte de résultats obtenus dans des conditions plus ou moins variées, ce qui peut être réalisé en respectant un plan d'expérimentation bien choisi.

Chacun des essais devant être effectué dans des conditions différentes, aucun résultat de mesure de l'usure ne peut être considéré comme absolu, même si on tolère qu'il soit entaché d'une erreur. L'objectif essentiel ne doit être, par conséquent, que de comparer les uns par rapport aux autres, les types de briques étudiés et, puisque les divergences de durée sont dues, pour une grande part, aux différences entre les caractéristiques des fours eux-mêmes ou de leurs modes de fonctionnement, la méthode la plus simple et la plus économique pour effectuer des comparaisons est d'introduire, dans un même four, des briques d'origines différentes.

Des difficultés techniques étant à craindre, par suite de l'emploi de briques différentes dans une même voûte, on doit aussi s'efforcer de réduire leur nombre au minimum.

Par sa structure générale, le plan dont nous allons parler pourrait permettre de n'introduire que deux sortes de briques dans chaque four mais on verra plus loin que l'on peut également s'arranger pour en introduire trois, réparties

en quatre bandes. Cette dernière solution a été adoptée pour les essais : deux bandes ont été placées dans chaque moitié de chaque four (fig. 1).

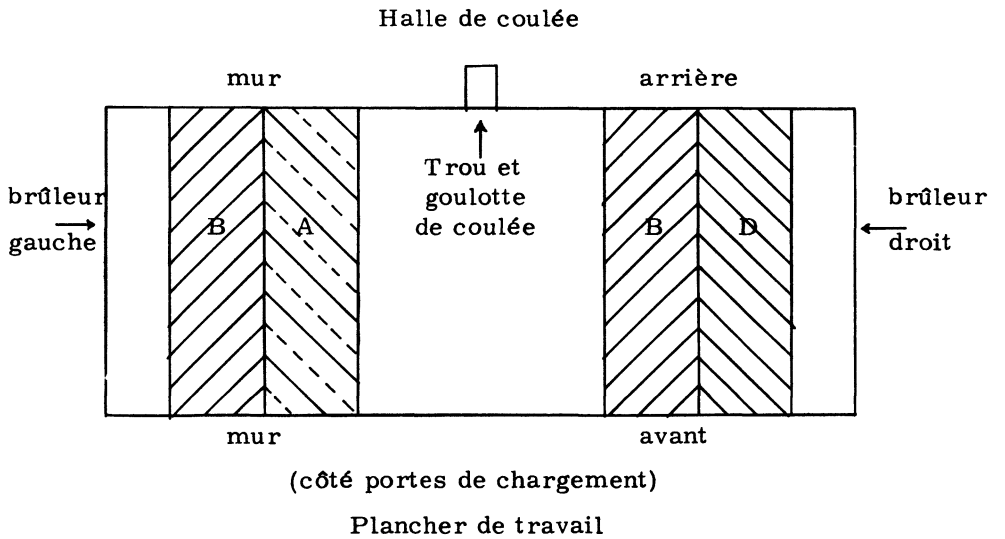


Fig. 1 - Plan schématique d'un four Martin d'essai (sans aucune de ses installations annexes). A, B, C, D : bandes d'essai. (Le reste de la voûte est construit en briques habituelles).

L'expérience montre que, malgré la symétrie de construction des fours, l'usure d'une voûte est fréquemment dissymétrique au cours d'une campagne donnée et que, dans chaque moitié, elle peut être différente du centre à l'extrémité. Il est donc prudent de faire en sorte qu'il soit possible de tenir compte de la position des bandes dans l'interprétation des résultats.

Enfin, il faut aussi que la dispersion inhérente aux résultats de mesure puisse être chiffrée, une différence entre deux usures ne devant être jugée significative que par rapport à cette dispersion.

II - GENERALITES SUR LE PLAN DES ESSAIS -

Ce plan permet de comparer la résistance à l'usure de quatre types de briques réfractaires pour voûtes Martin, en regardant comme des facteurs systématiques de cette usure :

1/ Le four, avec toutes ses particularités de construction et d'exploitation au cours de la campagne qui sert de base aux essais.

2/ La région du four dans laquelle une bande de briques d'essais se trouve située (moitié gauche ou droite du four, centre ou extrémité).

Ce plan permet d'étudier en outre l'influence de deux des caractéristiques des fours sur l'usure des voûtes.

Celles qui furent retenues se trouvèrent pratiquement imposées par le choix des fours, choix qui avait été arrêté bien avant celui du plan d'essais. L'examen des caractéristiques des fours permit, en effet, de s'apercevoir, à posteriori, qu'ils pouvaient être classés selon leur tonnage et leur combustible de chauffage de façon à étudier l'influence de ces deux facteurs sur l'usure. Même du point de vue de ces deux caractéristiques seules, les classes ainsi constituées ne pré-

sentèrent toutefois qu'une homogénéité assez grossière et, rien ne s'opposa à ce que des fours très différents à d'autres points de vue appartinssent à la même classe.

III - STRUCTURE DU PLAN -

Le but essentiel de l'étude était de comparer la tenue de quatre sortes de réfractaires et, à l'origine, on avait pu réunir 16 fours Martin en vue de ces essais.

Il fut d'abord envisagé d'associer les briques deux par deux dans chaque four et d'essayer ainsi différentes combinaisons. Cependant, le nombre total des combinaisons différentes de quatre briques deux à deux étant de 6, et 16 n'étant pas divisible par 6, il n'aurait pas été possible de répéter l'essai sur chaque paire de briques un même nombre de fois de façon à obtenir un plan par blocs équilibrés incomplets.

D'autre part, l'interprétation statistique des résultats de l'étude préliminaire d'une voûte ayant montré que l'usure pouvait y être très différente d'un endroit à un autre, on jugea qu'il était nécessaire de tenir compte de la position des bandes. On fut ainsi amené à un plan de type factoriel dans lequel chaque brique serait, dans chaque position, associée à chacune des quatre briques dans l'autre position (Tableau 1). Ce plan consistait donc en l'essai de 16 paires de bandes, nombre exactement égal à celui des fours disponibles. On jugea cependant qu'il devait être possible de loger, sans difficultés techniques excessives, quatre bandes d'essai dans chaque voûte. Le plan n'exigeant plus, dans ces conditions, que huit fours, il serait alors réalisé deux fois.

Tableau 1

		Position 1			
		A	B	C	D
Position 2	A	AA	BA	CA	DA
	B	AB	BB	CB	DB
	C	AC	BC	CC	DC
	D	AD	BD	CD	DD

Tableau 2

		Brique en position 1			
		A	B	C	D
Brique en position 2	α	Aα	Bα	Cα	Dα
	β	Aβ	Bβ	Cβ	Dβ
	γ	Aγ	Bγ	Cγ	Dγ
	δ	Aδ	Bδ	Cδ	Dδ

Par la suite, le nombre de fours disponibles pour les essais s'étant trouvé réduit à 13, il fallut s'arranger pour faire servir dans les deux plans, à la fois, les résultats obtenus sur certains fours. Les plans restèrent les mêmes dans leur principe et leur mode d'analyse n'en fut pas changé.

Pour montrer de quelle façon ces plans peuvent permettre d'étudier également les effets de deux facteurs supplémentaires sur l'usure des voûtes (tonnage et nature du combustible), il est commode de désigner la nature du réfractaire d'une bande, soit par une lettre latine majuscule, soit par la lettre grecque minuscule correspondante selon que cette bande se trouve placée en position 1 ou en position 2.

Les éléments du tableau 1 correspondent alors à ceux du tableau 2.

On y retrouve sans omission, ni répétition, les éléments d'un carré gréco-latin 4 x 4 qui peuvent être réarrangés dans l'ordre suivant :

Tableau 3

Aα	Bγ	Cδ	Dβ
Bβ	Aδ	Dγ	Cα
Cγ	Dα	Aβ	Bδ
Dδ	Cβ	Bα	Aγ

Dans ce nouveau tableau, chaque lettre latine et chaque lettre grecque n'apparaissent qu'une fois et une seule, dans chaque ligne et dans chaque colonne. Dès lors, si on peut s'arranger pour que tous les essais représentés par les éléments d'une même ligne soient effectués dans des fours chauffés au même combustible, on peut, d'après la théorie du carré gréco-latin, en se basant sur la somme des carrés des différences entre les moyennes de lignes, étudier l'effet du combustible. Si on peut simultanément s'arragner pour faire correspondre les colonnes à des classes de tonnage, on peut aussi étudier l'effet du tonnage du four sur l'usure des voûtes.

IV - REPARTITION PRATIQUE DES BANDES DANS LES FOURS -

Les fours n'ayant pas été choisis à l'avance de façon à remplir des conditions déterminées, il fallut chercher s'il existait une ou plusieurs répartitions des bandes permettant d'étudier, selon la méthode indiquée plus haut, les effets du combustible et du tonnage.

L'étude complète du tableau des fours classés d'après ces deux critères permit de constituer deux groupes de fours dans chacun desquels il était possible de répartir les bandes d'essai de façon à faire correspondre respectivement aux lignes et aux colonnes du carré gréco-latin des classes de combustibles et de tonnages.

Un premier groupe comprenait les fours 14, 15 ; 10, 2 ; 11, 1 ; 12, 16 dans lesquels les bandes furent réparties comme il est indiqué dans le tableau 4.

Tableau 4

Groupe I

COMBUSTIBLE	TONNAGE					
	< 60 t			⩾ 60 t		
	N° du four	moitié gauche	moitié droite	N° du four	moitié gauche	moitié droite
Gaz de fours à coke	14	A α	Bγ	15	Cδ	Dβ
Gaz mixte	10	Bβ	Aδ	2	Dγ	Cα
Gaz naturel + fuel	11	Cγ	Dα	1	Aβ	Bδ
Fuel	12	Dδ	Cβ	16	Bα	Aγ

Un second groupe fut constitué en reprenant les fours 10, 2 ; 11, 1 et en leur adjoignant les fours 8 et 7 (ou 3) puis 9 et 4 ; la répartition des bandes figure dans le tableau 5.

Tableau 5

Groupe II

COMBUSTIBLE	TONNAGE					
	< 80 t			> 80 t		
	N° du four	moitié gauche	moitié droite	N° du four	moitié gauche	moitié droite
Gaz de gazogène	8	Aα	Bγ	7 ou 3	Cδ	Dβ
Gaz mixte	10	Bβ	Aδ	2	Dγ	Cα
Gaz naturel + huile	11	Cγ	Dα	1	Aβ	Bδ
Gaz mixte + huile	9	Dδ	Cβ	4	Bα	Aγ

Les poids moyens des coulées produites au cours des essais, quoique différents des prévisions, se groupèrent dans chaque classe autour de moyennes assez différentes.

Les tonnages moyens des fours de la première colonne du tableau 4 furent compris entre 32 et 39 t. Dans la deuxième colonne du même tableau, trois tonnages furent voisins de 60 t, le quatrième étant de 114 t (contre 80 t annoncées).

Dans le groupe II, les tonnages réels des deux colonnes (< 80 t et > 80 t) chevauchèrent légèrement, le tonnage le plus faible de la colonne de droite ayant été, en fait, inférieur au tonnage le plus élevé de la colonne de gauche.

Nous avons déjà signalé qu'il avait fallu se contenter d'une classification grossière faite d'après des tonnages indiqués avant les essais qui ne coïncidèrent pas avec les tonnages réels. En fait, le tonnage réel moyen fut de 40 t pour les fours de la première colonne du tableau 5 et de 89 t ou de 106 t pour ceux de la seconde colonne selon qu'elle contenait le four 7 ou le four 3. Il y eut donc une forte différence entre les tonnages moyens de classes, par ailleurs assez hétérogènes.

Parallèlement, certaines usines changèrent le mode de chauffage de leur four entre le moment ou le plan des essais fut établi et celui où commencèrent les essais. Dans l'ensemble, les combustibles réellement utilisés par deux fours appartenant, dans les tableaux 6 et 7 à une même ligne restèrent cependant voisins. Ils sont récapitulés dans les tableaux 5 et 6.

Tableau 6

Combustibles réellement utilisés
dans les fours du groupe I au cours des essais (1)

N° du four	Combustible	N° du four	Combustible
14	Gaz de fours à coke	15	Gaz de fours à coke + fuel
10	Gaz de H. F. + gaz de fours à coke	2	66% de gaz de fours à coke + 33% de gaz de gazogène
11	75% de méthane + 25% de fuel	1	70% de gaz naturel (à 76% de CH_4) + 30% de fuel
12	Fuel	16	Gaz de fours à coke + fuel

(1) Les pourcentages indiqués correspondent aux calories fournies.

Tableau 7

Combustibles réellement utilisés
dans les fours du groupe II au cours des essais.

N° du four	Combustible	N° du four	Combustible
8	Gaz de gazogène	7 et 3	3) 78% gaz de gazogène + 22% de fuel 7) Gaz de gazogène
10	Gaz de fours à coke + Gaz de H. F.	2	66% de gaz de fours à coke + 33% de gaz de gazogène
11	75% méthane + 25% de fuel	1	70% gaz naturel (à 76% de CH_4) + 30% de fuel
9	Gaz mixte + Gaz de gazogène	4	Gaz de gazogène + fuel

V - EXPLOITATION DES RESULTATS -

5. a) Méthode générale.

Les résultats de ces plans d'essais peuvent être exploités par la méthode statistique connue sous le nom "d'Analyse de la variance".

A chaque effet systématique possible d'un facteur, l'analyse de variance fait correspondre une quantité numériquement calculable appelée variance due à ce facteur. Celle-ci se trouvant forcément affectée par les erreurs aléatoires qui entachent chacun des résultats à partir desquels elle est calculée, ce n'est pas d'après sa valeur numérique seule qu'il est possible de porter un jugement sur l'influence du facteur correspondant mais en la comparant à une quantité également calculable appelée variance résiduelle qui représente une estimation du carré moyen de l'erreur.

D'autre part, l'expression mathématique de la variance due à un facteur quelconque est telle que, lorsque celui-ci n'a pas d'effet, elle constitue une estimation de la variance d'erreur distincte et indépendante de l'estimation fournie par la résiduelle. La loi de probabilité du rapport de deux variances étant connue, on peut voir si les valeurs effectivement trouvées à partir des résultats d'expériences sont ou non compatibles avec l'hypothèse que le facteur étudié n'avait pas d'effet. Lorsque ce rapport est supérieur au seuil de signification, seuil choisi de telle façon qu'il ne soit dépassé en l'absence de tout effet qu'avec une probabilité faible (et donnée d'avance), on peut alors en conclure que le facteur a très probablement un effet réel sur la variable dépendante étudiée. Dans le cas contraire, on dit que l'effet produit n'est pas significatif.

"L'équation de l'analyse de variance est établie en annexe. Dans le texte, nous nous limiterons donc à quelques explications générales".

5. b) Réduction des données.

Nous verrons ultérieurement, dans la partie concernant l'exploitation des résultats, comment l'usure de chaque bande peut être caractérisée par un seul paramètre obtenu à partir des mesures réalisées en différents points de cette bande et à des époques échelonnées au cours de la campagne. Le problème ne

comporte donc qu'une seule variable dépendante dont une valeur donnée est associée à chaque bande d'essai.

5. c) Notations.

5. c. 1) *Indices.*

Il suffit de se reporter au tableau 2 pour constater que chaque couple de bandes peut être repéré par la donnée de la nature des briques placées respectivement en position 1 et 2, c'est-à-dire, par un système de deux indices j, k, où j représente l'indice de la brique placée en première position et k celui de la brique placée en seconde position.

Les valeurs des deux indices j et k déterminent donc le numéro 1 de la ligne et le numéro c de la colonne à l'intersection desquelles le couple j, k considéré se trouve dans le carré gréco-latin (tableau 3).

Enfin, les quatre colonnes du carré gréco-latin étant associées deux par deux (Tableaux 4 et 5), on a encore besoin d'un dernier indice t caractérisant le tonnage (t = 1 ou 2).

5. c. 2) *Sommes et différences utilisées dans l'analyse de variance.*

Les différentes sommes de carrés de l'analyse de variance s'expriment entièrement au moyen des quantités suivantes :

D_{jk} : Différence entre le taux d'usure de la bande de qualité j placée en position 1 et le taux d'usure de la bande de qualité k placée en position 2 dans le couple défini par j, k.

S_{jk} : Somme de ces mêmes taux d'usure.

Dans l'exécution des calculs, interviennent :

1/ Les sommes des D_{jk} pour une valeur donnée de j (Somme des différences d'usure entre les deux bandes de chaque couple de chaque colonne du tableau 2):

$$D_{j.} = \sum_k D_{jk}$$

2/ Les sommes des différences d'usure D_{jk} pour une valeur donnée de k (Somme des différences correspondant aux lignes du tableau 2) :

$$D_{.k} = \sum_j D_{jk}$$

3/ La somme totale des différences :

$$D = \sum_{j,k} D_{jk}$$

4/ De façon analogue, les sommes des usures dans les couples où la brique j est en première position :

$$S_{j.} = \sum_k S_{jk}$$

5/ Les sommes des usures pour une valeur donnée de k :

$$S_{.k} = \sum_j S_{jk}$$

6/ Les sommes des usures correspondant à un combustible donné (c'est-à-dire, à une ligne donnée du tableau 3) :

$$S_1 = \Sigma S_{jk} \quad \text{le long de la ligne 1.}$$

7/ Les sommes analogues par colonnes :

$$S_c = \Sigma\, S_{jk} \quad \text{le long de la colonne c.}$$

8/ Les sommes par tonnages :

$$S_t = \Sigma\, S_{jk} \quad \text{pour tous les demi-fours de même tonnage.}$$

9/ La somme générale :

$$S = \sum_{j,k} S_{jk}$$

5. d) Expressions des termes de l'analyse de variance.

Les expressions des sommes de carrés correspondant à chaque facteur sont données dans le tableau d'analyse de variance (tableau 8).

Tableau 8

Groupe	Facteur de variation	Somme de carrés	Degrés de liberté	Désignation de la variance
a	Position	$D^2/16$	1	$s^2_{a,p}$
	Qualité des briques	$\frac{1}{8}\sum_j (D_{j.} - D_{.j})^2$	3	$s^2_{a,p}$
	Interaction "briques x positions"	$\frac{1}{8}\sum_j (D_{j.} + D_{.j})^2 - D^2/8$	3	$s^2_{a,pq}$
	Résiduelle (erreurs a)	$\sum_{j,k} D^2_{jk}$ - (Autres sommes de carrés (a))	9	s^2_a
b	Moitiés de fours	$\frac{1}{4}\sum_c S^2_c - \frac{1}{8}\sum_t S^2_t$	2	s^2_b
c	Usure moyenne des voûtes	$S^2/16$	1	$s^2_{c,m}$
	Qualités des briques	$\frac{1}{8}\sum_j (S_{j.} + S_{.j})^2 - S^2/8$	3	$s^2_{c,q}$
	Interaction "briques x positions"	$\frac{1}{8}\sum_j (S_{j.} - S_{.j})^2$	3	$s^2_{c,qp}$
	Nature du combustible	$\frac{1}{4}\sum_l S^2_l - S^2/16$	3	$s^2_{c,l}$
	Tonnage du four	$\frac{1}{8}\sum_t S^2_t - S^2/16$	1	$s^2_{c,t}$
	Résiduelle	$\sum_{j,k} S^2_{jk}$ - (Autres sommes de carrés (c) et (b))	3	s^2_c
Total		$\sum_{j,k} D^2_{jk} + \sum_{j,k} S^2_{jk} =$ 4 fois la somme des carrés des 32 observations.	32	

La variance (ou carré moyen) due à chaque facteur est obtenue en divisant la somme des carrés correspondante par le nombre de degrés de liberté.

Cette analyse de variance n'est pas du type classique le plus simple parce que trois sortes d'erreurs aléatoires différentes sont susceptibles d'affecter les sommes de carrés.

Ce sont :

1/ Les erreurs affectant les différences D_{jk} des taux d'usure de deux bandes situées dans la même moitié d'un four. Ces différences dépendent des effets systématiques, des erreurs de mesure et des particularités internes des fours, de caractère aléatoire (courants aérodynamiques, forme de la flamme, etc.). Elles ne sont affectées que de façon secondaire par les caractéristiques globales des fours dont il est question plus loin (3/).

2/ Les erreurs résultant des différences d'usure entre les deux moitiés, gauche et droite, d'un même four.

3/ Les erreurs responsables des différences d'usure globale des différentes voûtes. Elles sont dues aux différences de construction et d'exploitation des fours (conception générale du four, genre de production, mode de chauffage, allure de la production, etc.).

Il est intuitif, par exemple, que l'estimation de l'effet dû à la position (centre ou extrémité) des bandes dans chaque moitié de four ne peut être affectée que par les erreurs mentionnées au 1/ ; tandis que l'estimation des effets systématiques dus aux combustibles est affectée par les erreurs mentionnées au 3/ puisque des fours différents interviennent dans les comparaisons de combustibles.

A priori déjà, on avait pensé que ces trois erreurs seraient d'importances très différentes et seraient probablement dans l'ordre $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$. C'est pourquoi on s'était efforcé d'utiliser un plan d'essai qui en tenait compte, bien que ce ne fut qu'une hypothèse. Nous verrons plus loin qu'elle a été entièrement confirmée par les résultats.

Dans cette analyse de variance, on peut classer les sommes de carrés en trois groupes :

a) celles qui ne sont affectées que par les erreurs du type 1/.

b) celles qui ne le sont que par les erreurs des types 1/ et 2/.

c) celles qui le sont à la fois par les erreurs de types 1/, 2/ et 3/.

Les expressions des différentes sommes de carrés de l'analyse de variance, groupées dans les trois catégories a), b), c), définies ci-dessus, sont données dans le tableau 8 (ci-dessus).

Tout effet doit naturellement être testé par comparaison de la variance qu'il introduit avec la résiduelle appartenant au même groupe que lui. Les variances d'erreurs s_a^2, s_b^2, s_c^2 peuvent être, par ailleurs, comparées entre elles.

On remarque que les effets "qualités des briques" et "Interaction briques x positions" figurent deux fois, affectées dans un cas des erreurs a) et dans l'autre, des erreurs c). Comme la variance résiduelle s_a^2 est beaucoup plus faible que s_c^2, on a intérêt à tester ces effets au moyen des rapports s_{aq}^2/s_a^2 et s_{apq}^2/s_a^2 ces tests étant beaucoup plus sensibles.

Remarque.
La somme $\sum_{j,k} D_{jk}^2 + \sum_{j,k} S_{jk}^2$ est égale à quatre fois la somme des carrés des 32 observations parce qu'une décomposition orthogonale devrait faire interve -

nir les demi-sommes et les demi-différences des observations appartenant à un même couple. Les résultats pratiques des tests de signification ne sont cependant pas modifiées en employant directement sommes et différences, ce qui revient simplement à changer l'unité de mesure des taux d'usure.

5. e) Estimation des taux d'usure.

Nous avons dit au paragraphe 5. d. que les effets des qualités des briques peuvent être appréciés de deux manières : soit au moyen des différences entre des taux d'usure de bandes situées dans une même moitié de four, soit au moyen de leurs sommes.

Nous avons alors attiré l'attention sur le fait que la variance résiduelle est différente dans ces deux cas, les résultats du dépouillement ayant montré, comme nous nous y attendions, que s_a^2 était beaucoup plus faible que s_c^2.

Pour comparer les qualités de briques les unes par rapport aux autres, il est préférable de se baser sur les D_{jk} plutôt que sur les S_{jk}. Les résultats ainsi obtenus sont beaucoup plus significatifs et les estimations plus précises. Il est vrai qu'au moyen des différences D_{jk}, on ne peut donner d'estimations des taux d'usure absolus alors que ceci paraît possible au moyen des sommes S_{jk}.

Cependant, les résultats des essais montrent que l'usure dépend surtout du four. Ceci se manifeste aussi bien par la variance $s_{c,t}^2$ qui représente les effets du tonnage que par la variance s_c^2 qui englobe les effets de toutes les autres caractéristiques des fours. Le taux d'usure n'est donc pas un résultat absolu et l'on n'estime, au moyen des S_{jk}, qu'un taux d'usure moyen pour les diverses conditions dans lesquelles les essais ont été réalisés. Comme nous verrons, de plus, que les qualités des briques ne sont pas significativement différentes les unes des autres lorsqu'on se rapporte à s_c^2, il est tout à fait inutile de calculer le taux d'usure moyen de chaque qualité de brique.

Les quantités D_{jk} permettent, au contraire, d'estimer l'importance des différences entre les qualités des briques, ces différences ayant beaucoup plus de chances d'être significatives.

Lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux différences entre les briques, il est alors possible de représenter les résistances à l'usure par quatre nombres r_j tels que $\sum_{j=1}^{4} r_j = 0$.

En utilisant les notations suivantes :

p_i (i=1,2) : effet dû à la position dans une même moitié du four ;

r_j : effet dû à la brique j ;

$s_{i,j}$: interaction des effets "briques" et "positions" ;

ε_{jk} : terme aléatoire affectant D_{jk},

on peut représenter $D_{j,k}$ par l'équation suivante :

$$D_{jk} = p_1 - p_2 + r_j - r_k + s_{1j} - s_{2k} + \varepsilon_{jk}$$

avec les conditions :

$$p_1 + p_2 = 0$$

$$\sum_j s_{ij} = \sum_i s_{ij} = 0$$

Par application des méthodes générales, on trouve comme estimateur des r_j, l'expression :

$$\hat{r}_j = \frac{D_{j.} - D_{.j}}{8}$$

Or, de l'expression de $D_{j,k}$, on déduit que :

$$\begin{aligned} D_{j.} - D_{.j} &= 8\, r_j + \varepsilon_{j.} - \varepsilon_{.j} \\ &= 8\, r_j + \sum_{l} \varepsilon_{jl} - \sum_{m} \varepsilon_{mj} \end{aligned}$$

En désignant par σ^2 la variance de l'erreur ε_{jk}, on peut alors calculer la variance de l'estimation, $\hat{r}_j$:

$$V(\hat{r}_j) = \frac{3\,\sigma^2}{32}$$

Comme les quantités $\hat{r}_j$ sont indépendantes de la résiduelle s_a^2, le rapport :

$$\frac{\hat{r}_j - r_j}{\sqrt{\frac{3s^2}{32}}} = 4\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{\hat{r}_j - r_j}{s}\right)$$

est distribué (sous l'hypothèse de référence) comme la variable t de Student-Fisher. La relation :

$$|\ \hat{r}_j - r_j\ | < s\, t_p \sqrt{\frac{3}{32}}$$

définit, pour r_j, un intervalle de confiance au seuil p.

Deuxième partie

ÉTUDE STATISTIQUE DES RÉSULTATS

I - EXAMEN DES DONNEES -

Les données de base sont constituées par un certain nombre de résultats de mesure de l'épaisseur des voûtes.

Des trous avaient été prévus à cet effet. Ils avaient été réalisés pratiquement, soit en utilisant quelques briques percées dans le sens de leur hauteur, soit en abattant les arêtes de quatre briques juxtaposées. L'épaisseur a été mesurée de diverses manières, par exemple, en enfonçant un fil ou un tube d'acier dans les trous jusqu'à ce qu'on l'aperçoive à l'intrados.

On peut déjà observer, en comparant les dispersions des mesures des épaisseurs relevées dans des trous voisins les uns des autres et au même moment de la campagne d'un four, que celles-ci sont variables, ce qui montre que les diverses méthodes de mesure utilisées n'eurent pas la même précision.

Ce qui importe bien davantage, du point de vue de la facilité de l'exploitation des résultats et de la richesse des renseignements qu'on aurait pu en tirer, c'est que les trous furent répartis dans les voûtes selon des pointés très différents et que leur nombre fut variable, même parfois dans une même voûte, d'une bande à l'autre.

Le nombre des relevés d'épaisseur fut, lui aussi, variable.

Enfin, l'interprétation fut encore compliquée par les mesures d'épaisseur qui firent défaut pour des raisons techniques diverses.

Le tableau 1 donne, pour chaque four, le nombre de trous par bande dans chacune des trois régions : mur arrière, clé, mur avant. Il permet d'apprécier la diversité du nombre et de la disposition des trous percés dans les bandes.

Tableau 1

Four N°	Nombre de trous par bande			Four N°	Nombre de trous par bande		
	AR	Clé	AV		AR	Clé	AV
1	1	2	1	9	4	5	4
2	1	2	1	10	3	6	3
3	1 à 2	1 à 3	0 à 2	11	2	2 à 3	1
4	1	2	1	12	2	1	1
7	4	6	4	14	2	6	2
8	4	6 à 7	4	15	3	9	3
				16	3	9	3

Le nombre total des mesures effectuées au cours de la campagne dans chacune des trois régions des quatre bandes d'essai (numérotées 1, 2, 3, 4 de gauche à droite) est donné dans le tableau 2. On peut constater que ce nombre est extrêmement variable et parfois très faible.

Tableau 2

Four N°	BANDES D'ESSAIS											
	I			II			III			IV		
	AR	Clé	AV	AR	Clé	AV	AR	Clé	AV	AR	Clé	AV
1	6	12	6	5	11	6	6	12	6	6	12	6
2	8	16	8	6	7	5	6	11	5	6	12	6
3	12	17	10	12	12	0	12	17	5	6	6	5
4	4	12	1	6	10	7	3	8	4	2	10	7
7	19	27	19	18	25	18	19	24	19	13	26	20
8	9	16	9	10	12	9	15	21	13	12	27	14
9	13	24	17	14	22	13	16	20	15	19	14	15
10	12	22	10	12	24	12	0	0	12	8	13	12
11	8	8	4	8	12	4	8	12	4	8	12	14
12	10	4	3	10	4	3	9	4	2	4	1	2
14	8	20	7	5	23	8	5	30	10	8	30	10
15	5	14	6	4	17	16	6	17	6	6	18	6
16	5	17	6	8	24	8	6	18	6	8	24	8

II - REDUCTION DES DONNEES -

On a pu se rendre compte que le plan des essais avait été conçu en admettant que l'usure de chaque bande pourrait être caractérisée par une grandeur unique.

L'usure varie, en réalité, en fonction du temps et les épaisseurs mesurées en plusieurs points d'une même bande peuvent être différentes.

Nous avons admis que les deux principaux facteurs agissant de façon systématique sur l'épaisseur de chaque bande étaient, d'une part, le nombre de coulées produites jusqu'à l'époque de la mesure et, d'autre part, dans une bande de position déterminée, la distance du point de mesure au plus grand axe du four. En accord avec l'expérience des aciéristes, les résultats montrent, en effet, que l'usure est généralement plus prononcée dans deux zones situées respectivement au voisinage des murs avant et arrière. Ils montrent aussi que la largeur des zones fortement usées est relativement faible, si bien qu'on peut désigner par "clé" une zone occupant une grande partie de la largeur du four.

Avant l'exécution des essais, nous avions envisagé d'étudier séparément le comportement des briques dans ces trois régions mais, le nombre des mesures relatives aux zones avant et arrière s'étant révélé, a posteriori, trop faible et surtout trop irrégulier pour permettre un dépouillement statistique, nous ne nous occuperons seulement que des résultats obtenus dans ce que nous avons considéré comme la clé. Dans la zone ainsi délimitée, on peut admettre que l'usure ne varie que de façon aléatoire en fonction de la position du point de mesure.

L'épaisseur est, par ailleurs, fonction du temps. Chacun des relevés couvrant toute la voûte, on pourrait se passer de définir une échelle des temps si l'on n'avait à comparer que l'usure de bandes appartenant à une même voûte. Or, d'une part, l'expérience consistait, ce qui était beaucoup plus réaliste d'ailleurs, à comparer les briques entre elles dans différents fours, et, d'autre part, le plan permettait d'étudier l'effet de certaines caractéristiques des fours sur l'usure. Dans ces conditions, il fallait définir une correspondance des temps. L'unité commune que nous avons retenue est la coulée.

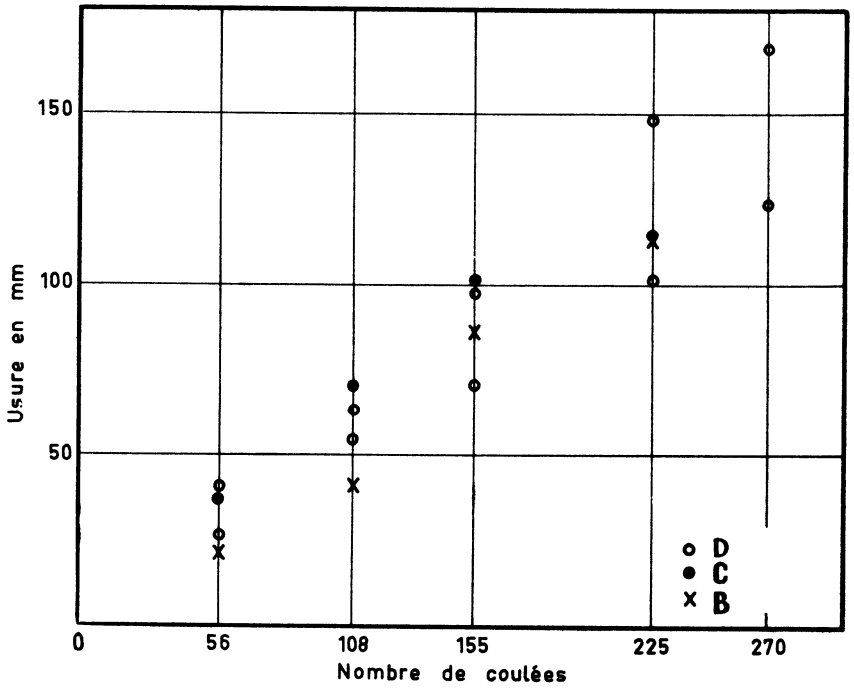
II. A - *VARIATION DE L'EPAISSEUR EN FONCTION DU NOMBRE DE COULEES* -

La variation de l'usure en fonction du nombre de coulées ne peut pas être suivie en chaque point de la voûte, à cause des données manquantes. La dispersion de chaque mesure serait d'ailleurs trop importante pour qu'il soit possible d'être bien renseigné sur la forme de la courbe représentative mais, dans les voûtes où le nombre de trous est, dans chaque bande, assez élevé, on peut délimiter des domaines à l'intérieur desquels l'usure ne semble pas varier de manière systématique et, par conséquent, diminuer la dispersion des résultats en calculant l'usure moyenne, en général avec quatre à six points.

Par cette méthode, on a tracé soixante-cinq diagrammes "usure, nombre de coulées" et étudié le comportement des quatre réfractaires dans les trois régions et dans différents fours (il y aurait eu 32 x 3 = 96 diagrammes si tous les cas avaient pu être étudiés). On a trouvé qu'à l'exception de quatre ou cinq cas douteux, les points ne s'écartent que de façon aléatoire d'une droite passant par l'origine.

Deux exemples de variation de l'usure en fonction du nombre de coulées sont donnés par les figures 2 et 3 (chaque point correspond à l'usure moyenne d'une bande dans la région de la clé).

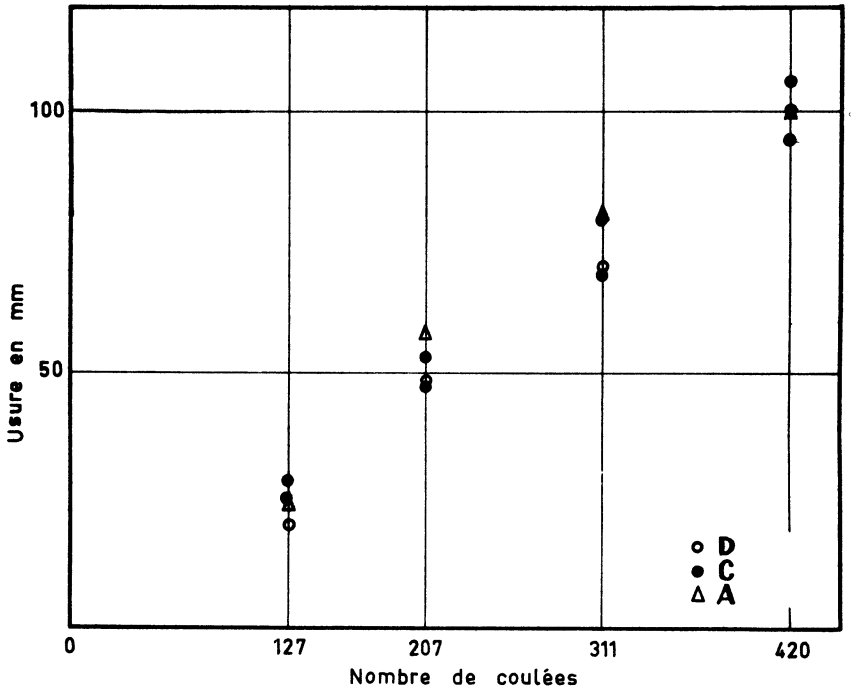
Revue de Statistique Appliquée — 1959 — Vol. VII — N° 3



FOUR CECA N°9

Moyennes des mesures en 4 points

Fig. 2



FOUR CECA N° 11

Moyennes des mesures en 2 ou 3 points

Fig. 3

On a donc admis que cette forme de variation était générale et s'appliquait également aux cas où elle ne pouvait être directement vérifiée vu le nombre et la dispersion des mesures.

La pente de la droite, exprimée par exemple en millimètres par 10 coulées, définit naturellement la résistance à l'usure du réfractaire, dans les conditions d'essai où il s'est trouvé placé. Elle peut être estimée au moyen de résultats de mesure de l'épaisseur répartis de façon quelconque au cours de la campagne du four.

Il est très commode de pouvoir caractériser la résistance à l'usure par ce paramètre que nous avons appelé "taux d'usure". S'il n'avait pas été possible de définir une grandeur de ce genre, on n'aurait pu comparer les épaisseurs de différentes voûtes qu'au bout d'un même nombre de coulées, condition qui n'était pas vérifiée par les données. Au point de vue statistique, le taux d'usure a l'avantage de pouvoir être calculé à partir de l'ensemble des résultats obtenus au cours de la campagne et d'utiliser par conséquent la totalité de l'information dont on dispose.

II. B - *ESTIMATION DES TAUX D'USURE* -

Pour trouver la meilleure méthode d'estimation statistique du taux d'usure, il faudrait théoriquement connaître la forme de la loi de probabilité de l'ensemble de résultats de mesures faites à des instants donnés de la campagne.

On peut admettre que chacun de ces résultats, pris séparément, suit une loi de Laplace-Gauss mais, logiquement, l'usure paraissant être un phénomène irréversible, ils ne devraient pas être indépendants en probabilité.

En fait, peut-être à cause des erreurs de mesure, on a fréquemment constaté des augmentations d'épaisseur.

D'autre part, avec les seuls résultats dont on dispose aujourd'hui, il serait assez téméraire de chercher un modèle théorique pouvant rendre compte de l'irréversibilité supposée de l'usure. Enfin, l'avantage concret qu'on retirerait d'une méthode d'estimation qui tiendrait bien compte de la loi de probabilité de l'ensemble des mesures relatives à une même région d'une même bande serait peut-être assez faible parce que, dans la variance de l'estimation du taux d'usure, elle ne réduirait au minimum que la part qui résulte de la dispersion de ces mesures entre elles. Or, les taux d'usure diffèrent aussi les uns des autres sous l'effet de facteurs qui n'ont existé qu'à plus grande échelle, tant dans l'espace que dans le temps (direction de la flamme, par exemple).

Pour étudier l'effet des facteurs contrôlés du plan d'expérience, il n'est donc pas indispensable de connaître les meilleures estimations des taux d'usure. Une méthode plus empirique, pourvu qu'elle ne dépende d'aucun facteur subjectif, peut suffire. Nous avons employé la méthode des moindres carrés en la considérant uniquement comme telle. Elle a l'avantage d'être connue et de n'entraîner qu'à des calculs assez simples.

Nous avons déjà donné les raisons pour lesquelles ces taux d'usure n'ont pu être calculés que pour la région de la clé. Leurs valeurs numériques, exprimées en millimètres par 10 coulées, sont données dans le tableau 3 qui contient toutes les indications permettant d'identifier la bande considérée.

Tableau 3

Taux d'usure en millimètres par 10 coulées (1)(2)

Four N°	moitié gauche		moitié droite	
	Position		Position	
	2	1	1	2
1	B 19,35	A 36,51	B 24,27	D 16,29
2	C 6,42	D 8,87	C 6,51	A 17,44
3	D 16,75	C 13,41	D 12,69	B 9,16
4	A 9,95	B 2,25	A 9,81	C 3,54
7	D 2,17	C 2,31	D 2,28	B 2,05
8	A 6,10	A 11,14	B 1,49	C 1,56
9	D 4,45	D 3,94	C 4,04	B 4,62
10(3)	B 3,31	B 3,97	A 3,64	D 4,65
11(4)	C 2,51	C 3,07	D 3,03	A 2,73
12(4)	D 4,37	D 4,93	C 5,42	B 3,77
14	A 24,48	A 21,49	B 3,39	C 6,13
15	D 12,19	C 8,93	D 6,21	B 9,20
16	A 38,86	B 5,73	A 15,65	C 9,42

---

(1) Les chiffres placés après la virgule n'ont aucun caractère significatif, mais ils sont nécessaires, dans les calculs statistiques, pour éviter le cumul des erreurs.

(2) A : Brique complètement transformée à faible porosité.
B : " moyennement " " " "
C : " " " " moyenne porosité
D : " complètement " " " porosité et faible teneur en alumine.

(3) Exceptionnellement, les taux d'usure relatifs au four 10 ont été relevés au mur avant.

(4) Pour les fours 11 et 12, on a tenu compte des mesures d'épaisseur des briques après démolition.

III - TRANSFORMATION DES DONNEES -

Il ne nous est pas possible de nous étendre sur les raisons qui conduisent à transformer les données au moyen d'une fonction bien choisie. Ces questions sont étudiées plus à fond dans les traités de statistique(1). Nous rappellerons seulement que les résultats de la méthode de randomisation étant d'autant meilleurs que les interactions confondues avec l'erreur sont plus faibles, on a intérêt à utiliser une fonction des données qui ait pour effet de les réduire.

Même avant les essais, nous nous doutions que la différence des taux d'usure de deux bandes de natures données, placées dans des positions données, ne pouvait être même en moyenne indépendante des conditions d'essai et, en premier lieu du four utilisé pour les comparer.

En effet, si l'on considère des allures de moins en moins poussées, il arrive un moment où l'usure de la bande la plus résistante devient quasiment nulle. Au-dessous de cette allure, l'usure de la bande la moins résistante est également presque nulle. La différence des taux d'usure de deux bandes de natures données ne peut donc être la même pour deux fours marchant à des allures très différentes.

L'hypothèse qui consiste à admettre que le rapport des taux d'usure de deux bandes données est indépendant du four dans lequel elles se trouvent placées paraît plus plausible que la précédente.

On peut généraliser et admettre que chacune des conditions d'essai agit par une constante multiplicative sur le taux d'usure. Sous cette hypothèse, le logarithme de ce taux est alors une fonction additive de termes représentant les effets des différents facteurs.

Les résultats expérimentaux semblent montrer que les différences des logarithmes des taux d'usure de deux réfractaires donnés sont cependant plus élevées dans les fours de grande capacité que dans les petits fours.

En fait, cette dépendance n'est pas significative(2) et les résultats numériques dont on dispose ne permettent donc pas de rechercher une fonction qui pourrait remplacer le logarithme.

Comme cette transformation réduit suffisamment l'importance des interactions gênantes, c'est sur les logarithmes des taux d'usure qu'a porté l'analyse des résultats.

IV - INTERPRETATION DES RESULTATS -

Les logarithmes des taux d'usures sont donnés dans le tableau 4 dont la disposition reproduit celle du tableau 3.

Ces résultats ont été analysés selon les méthodes indiquées dans la 1ère partie "PLAN DES ESSAIS".

IV. A - *FOURS DU GROUPE 1* -

L'analyse de variance est entièrement détaillée dans le tableau 5.

---

(1) Cf. par exemple : O. Kempthorne. - "The design and analysis of experiments".

(2) On verra plus loin que les briques B, C, D peuvent être considérées comme équivalentes. Si on les groupe ensemble et qu'on étudie la différence entre les logarithmes des taux d'usure de A et de B, C, D groupées, en fonction de la production de chaque four par coulée et par mètre carré de surface de bain, on trouve que le coefficient de corrélation des rangs de ces deux quantités est juste inférieur au seuil de signification à 10%.

Tableau 5

Logarithmes des taux d'usure du tableau 3

(Logarithmes de base 10)

Four N°	moitié gauche		moitié droite	
	Position		Position	
	2	1	1	2
1	B 1,287	A 1,562	B 1,385	D 1,212
2	C 0,807	D 0,948	C 0,814	A 1,242
3	D 1,224	C 1,127	D 1,103	B 0,962
4	A 0,998	B 0,353	A 0,987	C 0,549
7	D 0,334	C 0,363	D 0,359	B 0,312
8	A 0,785	A 1,047	B 0,172	C 0,194
9	D 0,648	D 0,596	C 0,606	B 0,665
10	B 0,510	B 0,599	A 0,561	D 0,668
11	C 0,399	C 0,487	D 0,481	A 0,436
12	D 0,640	D 0,693	C 0,734	B 0,576
14	A 1,389	A 1,332	B 0,530	C 0,787
15	D 1,086	C 0,951	D 0,793	B 0,964
16	A 1,589	B 0,758	A 1,195	C 0,974

Dans le groupe (a), les sommes de carrés de l'effet position et de l'interaction "Briques x positions" peuvent, ces effets n'étant pas significatifs, être regroupées avec la résiduelle.

Dans le groupe (c), on peut de la même façon regrouper avec la résiduelle les sommes de carrés de l'interaction "Briques x positions" et de l'effet combustible.

Après ces regroupements, l'analyse de variance se présente de la façon indiquée dans le tableau 5 bis.

Les niveaux de signification figurent dans les trois dernières colonnes Il est à noter que le premier rapport (3,296), bien qu'appartenant à la catégorie S_{10}, est très proche du niveau de signification à 5%. Avec 3 et 13 degrés de liberté, on a, en effet, $F_{0,05} = 3,41$.

Tableau 5

Fours du groupe 1

Groupe	Facteur de variation	Somme de carrés	d° de liberté	Variance ou carré moyen
(a)	Position	0,034.503	1	0,034.503
	Qualité des briques	0,527.762	3	0,175.921
	Interaction "briques x positions"	0,071.672	3	0,023.891
	Résiduelle	0,587.760	9	0,065.307
(b)	Moitiés de four	0,224.432	2	0,112.216
(c)	Usure moyenne des voûtes	50,370.958	1	
	Qualité des briques	1,581.701	3	0,527.234
	Interaction "briques x positions"	0,382.619	3	0,127.540
	Nature du combustible	0,366.469	3	0,122.156
	Tonnage du four	2,843.439	1	0,843.439
	Résiduelle	0,845.667	3	0,281.889

Tableau 5 bis

Groupe	Facteur de variation		ddl	Rapport des variances	Signif. (1)		
					N. S.	S_{10}	S_{05}
(a)	Qualité des briques	0,527.762	3	3,296		x	
	Résiduelle	0,693.935	13				
(b)	Moitiés de four	0,224.432	2				
(c)	Usure moyenne	50,370.958	1				
	Qualité des briques	1,581.701	3	2,975		x	
	Tonnage du four	2,843.439	1	16,047			x
	Résiduelle	1,594.755	9				

---

(1) N. S. = Non significatif

S_{10} = Significatif au niveau 10% ($F \geqslant F_{0,10}$)

S_{05} = " " " 5% ($F \geqslant F_{0,05}$)

IV. B - *FOURS DU GROUPE 2 (AVEC LE FOUR 7)* -

L'analyse de variance est entièrement détaillée dans le tableau 6.

Tableau 6

Groupe	Facteur de variation	Somme de carrés	ddl	Variance, carré moyen	Signific. N.S	S_{10}	S_{05}
(a)	Position	0,004.692	1	0,004.692	x		
	Qualité des briques	0,536.534	3	0,178.845		x	
	Interaction "briques x positions"	0,007.992	3	0,002.664	x		
	Résiduelle	0,474.771	9	0,052.752			
(b)	Moitiés de fours	0,212.776	2	0,106.388			
(c)	Usure moyenne des voûtes	31,264.872	1				x
	Qualité des briques	1,193.913	3	0,397.971	x		
	Interaction "briques x positions"	0,427.340	3	0,142.447	x		
	Nature du combustible	1,799.168	3	0,599.723	x		
	Tonnage du four	1,356.060	1	1,356.060	x		
	Résiduelle	2,054.153	3	0,684.718			

Dans les sommes de carrés du groupe (a), l'effet "briques" comparé directement à la résiduelle, est significatif au niveau 10%, tandis que l'effet "positions" et l'interaction "briques x positions" ne sont pas significatifs. En regroupant leurs sommes de carrés avec celle de la résiduelle, l'effet brique devient significatif au niveau 5%.

Dans les sommes de carrés du groupe (c), aucun effet n'est significatif. Ceci s'explique par l'importance de la variance résiduelle, 13 fois supérieure à la résiduelle du groupe (a)(ce qui est significatif à 1%).

IV. C - *FOURS DU GROUPE 2 (AVEC LE FOUR 3)* -

L'analyse de variance est détaillée dans le tableau 7.

D'après les sommes de carrés du groupe (a), l'effet position et l'interaction "briques x positions" ne sont toujours pas significatifs. Sans même regrouper leurs sommes de carrés avec la résiduelle, on constate que l'effet "briques" est, par contre, significatif au niveau 5%.

Dans le groupe (c), seul l'effet du tonnage est significatif.

Tableau 7

Groupe	Facteur de variation	Somme de carrés	ddl	Variance, carré moyen	N.S	S_{10}	S_{05}
(a)	Position	0,003.660	1	0,003.660	x		
	Qualité des briques	0,603.025	3	0,201.008			x
	Interaction "briques x positions"	0,001.573	3	0,000.524	x		
	Résiduelle	0,441.971	9	0,049.108			
(b)	Moitiés de fours	0,214.096	2	0,107.048			
(c)	Usure moyenne des voûtes	40,940.802	1				
	Qualité des briques	0,443.844	3	0,147.948	x		
	Interaction "briques x positions"	1,579.193	3	0,526.398	x		
	Nature du combustible	0,483.758	3	0,161.253	x		
	Tonnage du four	3,886.812	1	3,886.812			x
	Résiduelle	0,493.913	3	0,164.638			

IV. D - *DIFFERENCES ENTRE LES QUALITES DES BRIQUES* -

Les trois analyses de variance précédentes montrent que les quatre réfractaires ont des résistances à l'usure significativement différentes. Comme c'est surtout la brique A qui se distingue de façon nette des trois autres, il est permis de se demander si les qualités B, C, D diffèrent entre elles(1).

Comme le plan comprend toutes les paires de bandes obtenues en associant chaque qualité en position 1 avec chaque qualité en position 2, on peut en extraire un carré gréco-latin 3 x 3 ne contenant que les qualités B, C et D associées de la même façon. Ce sous-ensemble de données peut alors être traité par l'analyse de variance. Nous ne nous étendrons pas sur les détails de cette étude dont nous ne donnerons ici que la conclusion qui est que les qualités autres que A ne diffèrent pas entre elles de façon significative.

IV. E - *RESUME DES RESULTATS DES ANALYSES DE VARIANCE* -

1/ Le facteur "position de la bande" n'a pas d'effet significatif.

2/ L'interaction des facteurs "position" et "qualité des briques" n'a pas d'effet significatif.

3/ Les résistances à l'usure des quatre réfractaires diffèrent entre elles de façon significative par rapport à la résiduelle (a). Lorsqu'on compare leurs différences à la résiduelle (c), elles ne sont significativement différentes que dans un cas, ce qui n'est pas étonnant vu la grande différence entre les variances résiduelles (a) et (c).

---

(1) Pour la signification des symboles A, B, C, D, voir la note (2) du tableau 3.

Ce résultat expérimental confirme ce que nous avions annoncé dans la 1ère partie : les comparaisons faisant intervenir la variance entre fours sont beaucoup moins sensibles que celles faisant intervenir la variance entre bandes placées dans un même four. On peut affirmer sans crainte que si l'on avait comparé les quatre réfractaires en construisant 13 voûtes entières, on aurait eu de grandes chances de ne pas trouver de différences significatives entre leurs résistances à l'usure.

Pour comparer les effets des combustibles et des tonnages, il n'est évidemment pas possible d'utiliser une résiduelle d'un type différent de (c).

L'effet du combustible n'est jamais significatif. L'effet du tonnage est significatif dans deux cas sur trois. Ceci peut s'expliquer, peut-être, par les différences de tonnages qui sont plus accusées dans le groupe 1 et dans le groupe 2 avec le four 3 que dans le groupe 2 avec le four 7 où l'effet du tonnage n'est pas significatif (on a vu, dans la 1ère partie que les classes du tonnage du groupe 1 sont bien distinctes et que le tonnage du four 3 est très supérieur à celui du four 7).

Remarque.

Malgré la présence de deux effets significatifs (nature du réfractaire, tonnage du four), la variance résiduelle (c) représente une part importante de la variance totale.

Les différences entre les taux d'usure dans les différents fours ne paraissent pourtant pas pouvoir être mieux expliquées en faisant intervenir d'autres facteurs.

L'indice suivant : Production par coulée et par mètre carré de surface de bain, n'est pas en meilleure corrélation avec l'usure que la capacité du four.

V - ESTIMATIONS DES LOGARITHMES DES TAUX D'USURE -

Les logarithmes des taux d'usure peuvent être estimés conformément à la méthode exposée dans le paragraphe 5. d. de la Première Partie.

L'estimation de l'effet r_j dû à la brique j est donnée par

$$\hat{r}_j = \frac{D_{j\cdot} - D_{\cdot j}}{8}$$

Cette estimation peut être accompagnée de l'intervalle de confiance :

$$| \hat{r}_j - r_j | < s\, t_p \sqrt{\frac{3}{32}},$$

où t_p désigne le seuil de confiance de la variable t de Student-Fisher.

Les résultats de chacun des trois groupes de fours permettent d'estimer chaque r_j et de calculer son intervalle de confiance.

La longueur de ce demi-intervalle est indiquée dans la première ligne du tableau 8. Les estimations des r_j figurent sur les lignes suivantes.

Ces résultats sont représentés graphiquement sur la figure 4.

Sans perdre de vue que les estimations obtenues au moyen des trois groupes de fours ne sont pas indépendantes on peut constater qu'elles sont en bon accord les unes avec les autres.

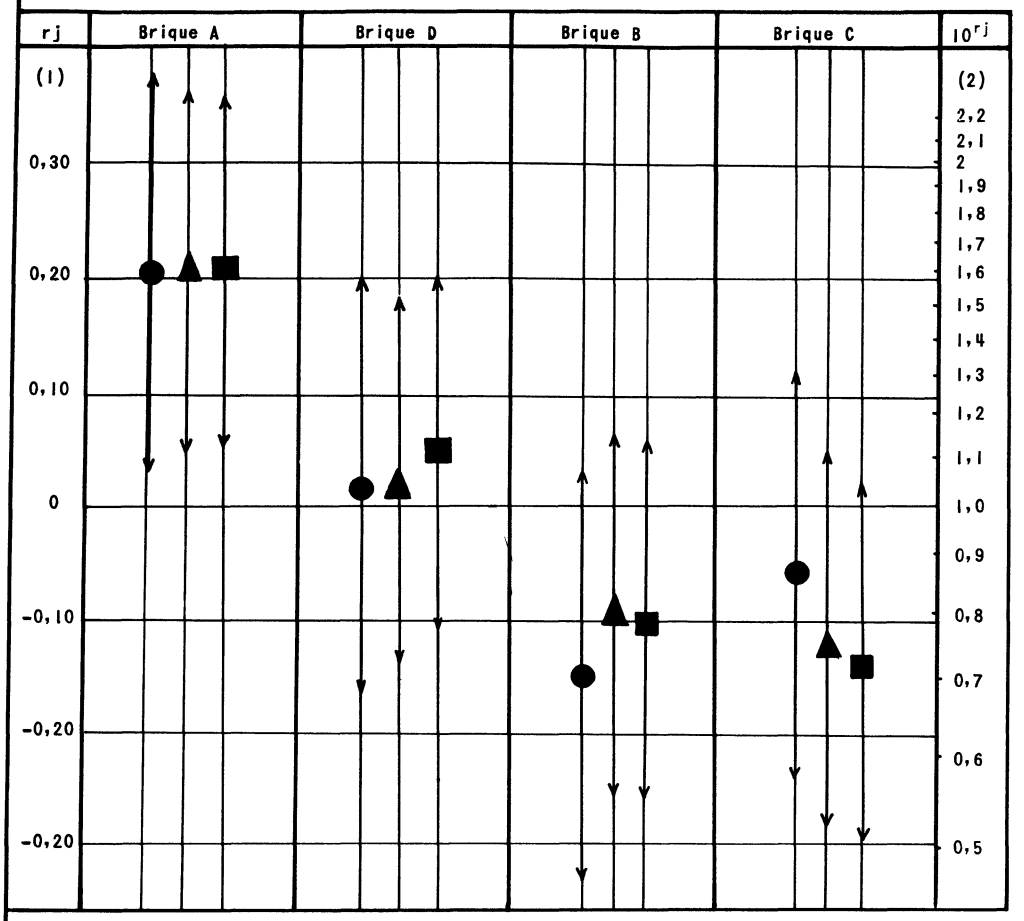


FIGURE 4

Echelle (1) : effet de la qualité de la brique sur le logarithme du taux d'usure. (effet additif).

Echelle (2) : facteur "qualité de la brique" sur le taux d'usure. (facteur multiplicatif).

● Fours du groupe 1

▲ Fours du groupe 2 (avec four 7)

■ Fours du groupe 2 (avec four 3)

Tableau 8

Estimation de l'effet de la qualité de la brique sur le logarithme du taux d'usure lorsqu'on prend la qualité moyenne des 4 briques pour origine

	GROUPE DE FOURS		
	1	2 (avec four 7)	2 (avec four 3)
Demi-intervalle de confiance	0,177	0,159	0,153
Brique A	0,200	0,204	0,204
" B	- 0,147	- 0,095	- 0,106
" C	- 0,064	- 0,127	- 0,143
" D	0,011	0,017	0,045

CONCLUSIONS GENERALES -

L'analyse statistique des résultats d'essais montre que le taux d'usure de la brique A est significativement plus élevé que ceux des briques B,C,D qui, eux, ne sont pas significativement différents les uns des autres.

Le seul autre facteur ayant un effet significatif sur le taux d'usure est le tonnage du four.

L'expérience acquise permet d'ajouter, en vue d'éventuels essais futurs, que :

1/ Le nombre des points de mesure de l'épaisseur doit être suffisant.

2/ La disposition de ces points doit être aussi uniforme que possible.

3/ La précision de la mesure de l'épaisseur ne doit pas être négligée.

4/ Il faut d'abord établir le plan d'essais en fonction de l'objet de l'étude puis choisir les fours qui conviennent à l'exécution de ce plan. Si on se propose de comparer des réfractaires dans plusieurs types de fours, ceux-ci doivent former des catégories aussi distinctes et aussi homogènes que possible. Enfin, les résultats obtenus dans un seul four n'étant nullement probants, il est important que chaque catégorie en comprenne plusieurs.

En effet, si, pour comparer différents réfractaires pour voûtes de fours Martin, il est certes inutile de posséder des résultats très précis, il ne faut pas oublier que la mesure, et même l'appréciation de l'usure d'une voûte sont sujettes à de nombreuses et importantes erreurs qui peuvent facilement fausser le jugement. Les précautions que nous venons d'énumérer nous paraissent à recommander pour éviter cette éventualité.

ANNEXE

JUSTIFICATION DE L'EQUATION D'ANALYSE DE LA VARIANCE UTILISEE AU TABLEAU 8

I - NOTATIONS -

x_{jk} : Taux d'usure (1) de la bande placée en position 1 dans le couple de bandes défini par le couple d'indices j, k (Cf. 5. c. 1., 1ère partie).

y_{jk} : Taux d'usure (1) de la bande placée en position 2 dans le couple de bandes définie par j, k.

p_i (i = 1, 2): Effet dû à la position (centre ou extrémité) dans un demi-four.

b_{1j} : Effet dû à la brique de qualité j lorsqu'elle se trouve en position 1.

b_{2k} : Effet dû à la brique de qualité k lorsqu'elle se trouve en position 2.

f_{jk} : Effet global dû au four.

ε_{jk} : Erreur affectant la différence des usures de bandes situées dans la même moitié d'un four (Erreurs du type a), Cf. 5. d., 1ère partie).

r_j : Effet moyen, dans les positions 1 et 2, de la qualité de la brique j.

s_{ij} : Interaction de la qualité j de la brique et de la position i de la bande.

c_1 : Effet dû au combustible de chauffage du four.

p_t : Effet dû au tonnage du four.

η_{jk} : Erreur sur l'usure de bandes situées dans des fours différents (Erreur du type c), Cf. 5. d., 1ère Partie).

II - EQUATION REPRESENTANT LE TAUX D'USURE -

Le taux d'usure étant fonction de la nature du réfractaire, de sa position dans le four, des caractéristiques du four et étant enfin affecté d'une erreur de type a), notre méthode d'analyse des résultats repose sur la représentation des x_{jk} et y_{jk} par les équations suivantes :

$$x_{jk} = \frac{m}{2} + p_1 + b_{1j} + f_{jk} + \frac{\varepsilon_{jk}}{2} \qquad \text{(A. 1)}$$

$$y_{jk} = \frac{m}{2} + p_2 + b_{2k} + f_{jk} - \frac{\varepsilon_{jk}}{2} \qquad \text{(A. 2)}$$

---

(1) Plus exactement, l'analyse porte sur le logarithme de la pente de la droite représentant l'usure moyenne de la bande en fonction du nombre de coulées (Cf. 2ème Partie, Paragraphes II et III).

avec :

$$\sum_i p_i = \sum_j b_{1j} = \sum_k b_{2k} = \sum_j f_{jk} = \sum_k f_{jk} = 0 \qquad (A.3)$$

De (A. 1), et (A. 2), on tire :

$$x_{jk} - y_{jk} = p_1 - p_2 + b_{1j} - b_{2k} + \varepsilon_{jk} \qquad (A.4)$$

La différence, $x_{jk} - y_{jk} = D_{jk}$, entre les taux d'usure de deux bandes situées dans un demi-four est donc représentée, dans l'équation (A. 4), par la somme d'un effet moyen $p_1 - p_2$, d'un effet dû à la nature de la brique placée en position 1, d'un effet dû à la nature de la brique placée en position 2 et d'une erreur.

Notre plan d'expériences étant factoriel vis-à-vis des deux facteurs : nature de la brique en position 1 et nature de la brique en position 2 (Cf. tableau 1, 1ère Partie), on peut alors décomposer la somme $\sum_{jk} D_{jk}^2$ en termes correspondants respectivement :

1/ A la moyenne générale $p_1 - p_2$:

$$(\sum_{j,k} D_{jk})^2/16 = \frac{D^2}{16}$$

2/ A l'effet brique en position 1, soit, avec les notations adoptées au paragraphe 5. c., 1ère Partie :

$$4 \sum_j (\frac{D_{j.}}{4} - \frac{D}{16})^2 = \frac{1}{4} \sum_j D_{j.}^2 - \frac{D^2}{16}$$

3/ A l'effet brique en position 2, soit :

$$4 \sum_k (\frac{D_{.k}}{4} - \frac{D}{16})^2 = \frac{1}{4} \sum_k D_{.k}^2 - \frac{D^2}{16}$$

4/ A la variance résiduelle, obtenue par différence.

II. A. *CHANGEMENT DE PARAMETRES* -

Il n'est pas possible d'affirmer, a priori, que chacune des quatre qualités de briques résiste, en positions 1 et 2, de la même façon, à l'usure. Cependant, pratiquement, on aimerait savoir si cette hypothèse n'est pas infirmée par les résultats.

On peut la tester en représentant l'effet de la nuance de la brique sur l'usure par la somme d'un effet moyen dans les positions 1 et 2 et d'une interaction entre les qualités de briques et les positions. Posons donc :

$$b_{ij} = r_j + s_{ij} \qquad (A.5)$$

avec :

$$\sum_j r_j = \sum_j s_{ij} = \sum_i s_{ij} = 0 \qquad (A.6)$$

Tout système de r_j et de s_{ij} satisfaisant aux conditions (A. 6) définit un système de b_{ij} satisfaisant aux conditions :

$$\sum_j b_{ij} = 0 \ (i = 1, 2) \qquad (A.7)$$

Un système de coefficients b_{ij} satisfaisant aux conditions (A.7) étant donné, il existe, réciproquement, un système et un seul de coefficients r_j et s_{ij} vérifiant à la fois (A. 5) et (A. 6).

En effet, de (A. 5) et (A. 6), on tire :

$$r_j = \frac{b_{1j} + b_{2j}}{2} \tag{A. 8}$$

$$s_{ij} = b_{ij} - \frac{b_{1j} + b_{2j}}{2} \tag{A. 9}$$

Il existe donc une correspondance biunivoque entre le système des b_{ij}, d'une part, et celui des r_j et des s_{ij}, d'autre part.

En remplaçant les b_{ij} par les r_j et les s_{ij} dans l'équation (A. 4), on obtient alors :

$$D_{jk} = p_1 - p_2 + r_j - r_k + s_{1j} - s_{2k} + \varepsilon_{jk} \tag{A. 10}$$

avec, d'après (A. 8) :

$$r_j - r_k = \frac{b_{1j} + b_{2j} - b_{1k} - b_{2k}}{2} \tag{A. 11}$$

et, d'après (A. 9) :

$$s_{1j} - s_{2k} = \frac{b_{1j} - b_{2k} + b_{1k} - b_{2j}}{2} \tag{A. 12}$$

Représentons l'ensemble des différences D_{jk} par un vecteur dans un espace euclidien réel à 16 dimensions. Dans cet espace, le vecteur de composantes $r_j - r_k$ est orthogonal à celui dont les composantes sont $s_{1j} - s_{2k}$ car :

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} (r_j - r_k)(s_{1j} - s_{2k}) &= 4 \sum_j r_j s_{1j} + 4 \sum_k r_k s_{2k} \\ &= 4 \sum_j r_j (s_{1j} + s_{2j}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part, les coefficients r_j devant satisfaire à la même condition que les b_{1j}, le vecteur de composantes r_j (chacune répétée quatre fois) doit appartenir au même sous-espace vectoriel que celui de composantes b_{1j}. De même, le vecteur de composantes r_k doit appartenir au même sous-espace vectoriel que b_{2k}. Le vecteur de composantes $r_j - r_k$ appartient donc nécessairement au sous-espace vectoriel produit des deux précédents.

On peut montrer de la même façon que le vecteur de composantes s_{1j} et le vecteur de composantes s_{2k} appartiennent respectivement au sous-espace vectoriel de b_{1j} et de b_{2k} et que, par conséquent, le vecteur de composantes $s_{1j} - s_{2k}$ appartient encore au sous-espace vectoriel produit de ces deux sous-espaces.

On déduit de ceci que les vecteurs de composantes $r_j - r_k$ et $s_{1j} - s_{2k}$ qui, nous l'avons vu, sont orthogonaux l'un à l'autre, sont encore orthogonaux à tous les autres éléments de la décomposition orthogonale du vecteur de composantes D_{jk}, c'est-à-dire, au vecteur dont les 16 composantes sont égales à $p_1 - p_2$ et au vecteur représentant l'erreur résiduelle (vecteur appartenant à un sous-espace à 9 dimensions).

Par projection orthogonale du vecteur de composantes D_{jk} sur le sous-espace vectoriel auquel doit appartenir b_{ij}, on sait que l'on obtient un vecteur de composantes $\frac{1}{4} D_{j.} - \frac{1}{16} D$ tandis que par projection sur le sous-espace vectoriel de b_{2k}, on obtient un vecteur de composantes $-(\frac{1}{4} D_{.k} - \frac{1}{16} D)$.

On peut décomposer la somme de ces deux vecteurs comme nous avons décomposé $b_{ij} - b_{2k}$, pour obtenir deux vecteurs orthogonaux dans le sous-espace vectoriel produit de ceux de b_{ij} et $b_{2k.}$. Pour trouver les expressions des composantes de chacune des deux projections de $\frac{1}{4}(D_{j.} - D_{.k})$ sur les deux sous-espaces en question, il suffit de faire subir aux vecteurs de composantes $\frac{1}{4} D_{j.} - \frac{1}{16} D$ et $-\frac{1}{4} D_{.k} + \frac{1}{16} D$ les mêmes transformations linéaires que celles qu'on doit appliquer à b_{1j} et b_{2k} pour obtenir les vecteurs $r_j - r_k$ et $s_{1j} - s_{2k}$, c'est-à-dire, de remplacer dans (A. 11) et (A. 12) :

$$b_{1j} \text{ par } \frac{1}{4} D_{j.} - \frac{D}{16}$$

$$b_{1k} \text{ par } \frac{1}{4} D_{k.} - \frac{D}{16}$$

$$b_{2j} \text{ par } -\frac{1}{4} D_{.j} + \frac{D}{16}$$

et

$$b_{2k} \text{ par } -\frac{1}{4} D_{.k} + \frac{D}{16}$$

Il vient ainsi :

$$\hat{r}_j - \hat{r}_k = \frac{D_{j.} - D_{.j} - D_{k.} + D_{.k}}{8} \qquad \text{(A. 13)}$$

et

$$\hat{s}_{1j} - \hat{s}_{2k} = \frac{D_{.j} + D_{j.} + D_{.k} + D_{k.} - D}{8} \qquad \text{(A. 14)}$$

La somme des carrés correspondant aux r_j étant égale à la norme du vecteur de composantes $\hat{r}_j - \hat{r}_k$, on obtient, pour cette somme de carrés, après simplifications :

$$\sum_{j,k} (\hat{r}_j - \hat{r}_k)^2 = \frac{1}{8} \sum_j (D_{j.} - D_{.j})^2 \qquad \text{(A. 15)}$$

Pour la somme des carrés correspondant à l'interaction s_{ij}, on obtient après les calculs analogues :

$$\sum_{j,k} (\hat{s}_{1,j} - \hat{s}_{2,k})^2 = \frac{1}{8} \sum_j (D_{j.} + D_{.j})^2 - \frac{D^2}{8} \qquad \text{(A. 16)}$$

Des considérations analogues permettent, à partir des équations (A. 8) et (A. 9), de déterminer les estimations des coefficients r_j et s_{ij} en remplaçant respectivement b_{ij} et b_{2k} dans les seconds membres de ces équations $\frac{1}{4} D_{j.} - \frac{1}{16} D$ et $-(\frac{1}{4} D_{.j} - \frac{1}{16} D)$. Il vient ainsi :

$$\left.\begin{aligned} \hat{r}_j &= \frac{D_{j.} - D_{.j}}{8} \\ \hat{s}_{ij} &= \frac{2(D_{j.} + D_{.j}) - D}{16} \\ \hat{s}_{2k} &= \frac{D - 2(D_{k.} + D_{.k})}{16} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A. 17)}$$

II. A - *DECOMPOSITION DU TERME F_{jk} DES EQUATIONS (A.1) ET (A.2)* -

L'effet global dû au four peut être attribué, partie au combustible de chauffage, partie au tonnage du four et le reste à des effets considérés comme aléatoires.

Nous pouvons donc représenter f_{jk} sous la forme suivante (Cf. paragraphe I. Notations) :

$$f_{jk} = c_1 + p_t + \frac{1}{2}\eta_{jk} \qquad \text{(A. 18)}$$

et l'introduire dans les équations (A. 1) et (A. 2). On en déduit :

$$S_{jk} = m + b_{1j} + b_{2k} + c_1 + p_t + \eta_{jk}$$

Les différents combustibles correspondent aux lignes du carré gréco-latin, les tonnages aux colonnes, les effets briques en 1ère position aux lettres latines et les effets briques en 2ème position aux lettres grecques, la décomposition de la somme $\sum_{j,k} S^2_{jk}$ est la décomposition classique qui permet de séparer les sommes de carrés dues aux lignes, aux colonnes, aux deux traitements et à la résiduelle.

Toutefois, comme il n'y a que deux classes de tonnages, la variance entre tonnages n'est pas égale à la variance entre colonnes du carré gréco-latin. L'effet dû au tonnage reste orthogonal aux autres effets car on cherche à le représenter par un vecteur contenu dans le sous-espace vectoriel correspondant aux différences entre colonnes. En conséquence, la somme des carrés correspondant au facteur tonnage a même expression que si cet effet existait seul, soit (Cf. les notations du paragraphe 5. d.) : $\frac{1}{8}\Sigma S_t^2 - \frac{1}{16}S^2$.

La différence entre la somme des carrés entre colonnes et la somme des carrés due au tonnage donnerait, (après division par le nombre de ses degrés de liberté) une estimation de la variance entre fours de même nature que la variance résiduelle si les couples de bandes étaient placés dans des fours distincts. Mais, les demi-fours de même tonnage étant en fait appariés, cette différence ne donne pas une estimation de la variance résiduelle.

La comparaison de ces deux estimations permet, en fait, de tester l'hypothèse que les différences des usures dans les deux moitiés d'un même four sont égales aux différences d'usures de bandes placées dans des fours distincts.

Enfin, les sommes de carrés correspondant aux différences entre briques placées en 1ère position et aux différences entre briques placées en 2ème position peuvent être regroupées et leur somme dissociée en une somme de carrés correspondant à un effet principal et une somme de carrés correspondant à une interaction. Le procédé à appliquer est analogue à celui qui a servi dans le cas de l'analyse de variance de $\sum_{j,k} D^2_{jk}$.