REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

MARIO BONA

Corrélation diamètre/longueur et corrélation aire/longueur pour la fibre de laine

Revue de statistique appliquée, tome 6, nº 4 (1958), p. 81-110
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1958__6_4_81_0>

© Société française de statistique, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CORRÉLATION DIAMÈTRE / LONGUEUR ET CORRÉLATION AIRE / LONGUEUR POUR LA FIBRE DE LAINE

par

Mario BONA
École supérieure des textiles de Verviers

SOMMAIRE

1 - INTRODUCTION -

1-1 - Objet du travail
1-2 - Conventions et notations
1-3 - Remarque préliminaire

2 - ETUDE DE LA DIFFERENCE $\rho_a - \rho_d$ -

2-1 - Déduction de la formule
2-2 - Développement
2-3 - Critique

3 - ETUDE DU RAPPORT ρ_a / ρ_d -

3-1 - Déduction de la formule
3-2 - Utilisation

4 - EMPLOI DE L'HYPOTHESE LOG-NORMALE -

4-1 - Définition et applicabilité
4-2 - Calculs généraux
4-3 - Application au cas étudié
4-4 - Discussion

5 - CONCLUSION -

6 - APP. I : CALCUL DE ε -

7 - APP. II : AJUSTEMENT D'UNE LOI LOG-NORMALE A UNE DISTRIBUTION EXPERIMENTALE -

7-1 - Introduction
7-2 - Cas du diamètre

7-3 - Cas de la longueur
7-4 - Conclusion

8 - REMERCIEMENT -

9 - BIBLIOGRAPHIE -

ANNEXES : 4 Tables.

Les fibres textiles, d'origine animale ou végétale, constituent aux différents stades de leur élaboration, des matériaux complexes dont il est difficile de définir la structure et les qualités à l'aide d'un petit nombre de paramètres ; d'où l'intérêt d'essayer de préciser les liaisons qui peuvent exister entre les différentes caractéristiques de ces fibres, liaisons qui peuvent vraisemblablement varier suivant l'état d'avancement de la fabrication industrielle.

Plusieurs auteurs : MM. Breny, Hénon, Monfort se sont déjà attaqués à ce problème, rendu particulièrement complexe en raison de la difficulté à laquelle on se heurte lorsque l'on veut définir correctement les caractéristiques que l'on se propose d'étudier, par exemple la "dimension" transversale d'une fibre.

Sous la direction de Monsieur F. Monfort, les chercheurs travaillant dans les laboratoires de l'Ecole Supérieure des Textiles de Verviers ont voulu préciser dans ce domaine, les notions empiriques généralement admises par l'industrie.

Dans l'étude ci-après Monsieur Mario Bona a étudié théoriquement le problème de la corrélation entre longueur et finesse des fibres de laine, sous le double aspect diamètre/longueur et aire/longueur, et a précisé la liaison qui semble exister entre ces deux corrélations.

1. – INTRODUCTION

1-1 - OBJET DU TRAVAIL -

Il est bien connu que, pour la fibre de laine, il existe une corrélation entre ses dimensions longitudinale et transversale; ce qu'on exprime couramment en disant que la fibre est d'autant plus courte qu'elle est fine, contrairement par exemple à ce qui se produit pour le coton. On a cherché dans ces derniers temps à préciser quelque peu cette notion empirique, en ayant recours à la définition mathématique du coefficient de corrélation entre deux variables; ce qui implique d'abord la définition correcte des grandeurs à mesurer.

Pour ce faire, on peut en première approximation (on reviendra sur cette hypothèse au § 1-3) assimiler une fibre, convenablement tendue à l'état non ondulé, à un cylindre droit. De cette manière, la définition d'une dimension longitudinale n'offre pas d'équivoques; mais, pour caractériser la fibre dans ses dimensions transversales, deux paramètres peuvent entrer en ligne de compte, à savoir le diamètre et l'aire de sa section droite : cette double possibilité géométrique correspond d'ailleurs à un fait d'expérience, car on sait que les méthodes classiques de détermination de la finesse de la laine peuvent se classer en deux

groupes, les méthodes par projection au microscope et les méthodes gravimétriques, qui conduisent respectivement aux deux grandeurs mentionnées.

Il est dès lors logique que le problème de la corrélation finesse/longueur puisse en réalité conduire au calcul de 2 coefficients, à savoir le coefficient de corrélation diamètre/longueur et le coefficient de corrélation aire/longueur, qu'on désignera dans la suite par les symboles ρ_d et ρ_a respectivement.

Cela étant, des mesures faites par Monfort et ses collaborateurs sur différents lots de ruban de peigné, dont on résume les résultats à la table 1-1, ont montré, dans les limites de l'erreur expérimentale (assez larges dans ce cas étant donné la petite taille des échantillons), une remarquable concordance entre les valeurs de ρ_a et ρ_d.

Table 1-1

Lot	Nombre mesures	ρ_a	ρ_d
A	49	0,191	0,190
B	50	0,046	0,057
C	50	0,348	0,339
	109	0,364	0,370
D	50	0,424	0,411
	114	0,477	0,423

Le problème s'est par conséquent posé d'étudier de plus près la question du point de vue théorique pour arriver si possible à une relation entre ρ_a et ρ_d susceptible de justifier a priori les résultats de l'expérience.

D'un autre côté, une étude théorique de cette relation possède aussi un intérêt purement mathématique, dans le cadre du passage de la distribution d'une variable aléatoire à celle de son carré. En cet ordre d'idées, il importe de citer le travail de Breny (réf.3) à propos du coefficient de variation, qui a conduit son auteur à une analyse correcte de l'applicabilité de la formule classique $CV_a = 2CV_d$; il est évident que dans le cas d'un coefficient de corrélation, on ne peut pas s'attendre à une relation de ce type, de simple multiplication, car cela impliquerait la possibilité absurde de trouver $\rho > 1$; mais, toujours sur la base des résultats expérimentaux ci-dessus, il n'est pas déraisonnable de prévoir pour ρ_a et ρ_d une relation simple, et éventuellement leur identité.

Le but de ce travail est précisément d'établir cette relation, et pour ce faire la question sera traitée en partant de l'hypothèse que l'ordre de grandeur des deux corrélations soit le même; cela amènera à étudier la différence $\rho_a - \rho_d$ (1ere méthode - § 2) et le rapport ρ_a / ρ_d (2ème méthode - § 3), en vue d'arriver à évaluer l'erreur commise en assimilant la première à zéro et le deuxième à un; en principe, cette erreur sera fonction de certains paramètres des distributions des variables considérées, qu'on peut estimer plus ou moins aisément à partir d'échantillons expérimentaux: en cette première partie du travail, on discutera les avantages des deux méthodes envisagées, en vue de déterminer laquelle des deux conduit à la formule la plus simple ou à celle dont la vérification expérimentale est la plus aisée.

Dans un paragraphe ultérieur (§ 4), on émettra des hypothèses a priori sur la distribution des variables considérées, hypothèses qui sont d'ailleurs admis-

sibles avec une approximation satisfaisante, comme on l'indiquera; et à partir de celles-ci, on établira une relation purement théorique entre ρ_a et ρ_d, dont on discutera la signification; comme on le verra, il résultera de cette dernière étude qu'on peut poser $\rho_a = \rho_d$ avec une erreur négligeable vis-à-vis de l'erreur d'échantillonnage, ce qui confirme du point de vue théorique les résultats expérimentaux.

Il importe de remarquer dès à présent que ce dernier résultat, obtenu, répétons-le, à partir de quelques hypothèses simples a priori raisonnablement admissibles, constitue la partie la plus intéressante du travail; en effet, comme on le spécifiera plus loin, une tentative de l'établir sur des bases d'expérience est extrêmement pénible, à cause de la longueur et de la difficulté des mesures (on se rappellera à ce sujet que l'étude de la corrélation finesse/longueur suppose de mesurer et peser individuellement chaque fibre, et d'autre part des résultats valables, dont l'intervalle de confiance ne soit pas trop large, ne sont possibles qu'à condition d'examiner au moins mille individus par échantillon).

1-2 - CONVENTIONS ET NOTATIONS -

On aura constamment affaire dans la suite aux distributions théoriques et expérimentales des caractéristiques physiques de la fibre, telles que la longueur l (à l'état non ondulé), le diamètre d et l'aire a de la section droite. On sera amené le plus souvent à considérer ces caractéristiques comme des variables aléatoires dont la loi de probabilité est inconnue ou même fixée a priori. On aura par conséquent recours aux notations classiques de la Statistique, notamment en ce qui concerne les moments d'une distribution. On aura ainsi, x étant la variable et E(x) indiquant son espérance mathématique :

$$\mu'_n = E(x^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx,$$

en supposant pour x une distribution continue avec $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\mu_n = E\{[x - E(x)]^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu'_1)^n f(x)dx$$

En particulier, $\mu'_1 = \bar{x}$ est la moyenne de la distribution

$$\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2 = \sigma^2 \text{ est la variance,}$$

$$\sqrt{\mu_2}/\mu'_1 = CV_x \text{ est le coefficient de variation,}$$

$$\gamma_1 = \mu_3/\sigma^3 \text{ et } \gamma_2 = (\mu_4/\sigma^4) - 3 \text{ sont les coefficients d'asymétrie et d'excès.}$$

Dans la suite, on n'aura pratiquement affaire qu'aux distributions de d et de l et à leur distribution conjointe, les paramètres de la distribution de a pouvant être ramenés en cours des calculs à ceux de la distribution de d (pour les indiquer, si besoin en est, on emploiera explicitement les notations sous la forme d'espérance mathématique). Dès lors, on emploiera des symboles du type μ'_{mo} pour d, μ'_{on} pour l et μ'_{mn} pour leur distribution conjointe.

Cela étant, les coefficients de corrélation ci-dessus sont par définition :

$$\rho_d = \frac{E[(d - \bar{d})(l - \bar{l})]}{\sigma_d \sigma_l} = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}} \quad \text{et} \quad \rho_a = \frac{E[(a - \bar{a})(l - \bar{l})]}{\sigma_a \sigma_l}$$

On désignera enfin les coefficients de variation de d, a et l par les lettres majuscules D, A et L.

1-3 - REMARQUE PRELIMINAIRE -

Dans ce qui va suivre, on aura constamment recours à la relation $a = Kd^2$, considérée comme fondamentale. K représente ici une constante, et on aurait $K = \pi/4$ si la fibre était assimilable à un cylindre circulaire. Or, il importe de bien se rendre compte des implications de cette hypothèse :

1°) En réalité la fibre de laine n'est pas à section circulaire, mais possède une certaine ollipticité. Cela ne constitue pas une difficulté, à condition de définir correctement d, car la connaissance de la valeur numérique de K n'est pas nécessaire, K s'éliminant au cours des calculs. Tout revient simplement à considérer l'aire d'une surface comme proportionnelle au carré d'une de ses dimensions linéaires convenablement choisie, ce qui est en principe correct.

2°) D'autre part, K apparaissant, comme on le verra, sous le signe sommatoire (esp. mathématique), il pourra en sortir, et s'éliminer ainsi dans la suite, à condition d'être constant; or, cela introduit une hypothèse au sujet des fibres de laine, dont il importe de se rendre compte : à savoir, qu'elles ont des sections droites géométriquement semblables. Cela est d'ailleurs admissible en pratique (au moins pour des fibres dont le diamètre est supérieur à 20 microns; réf. 4); et on remarquera qu'une telle approximation est à la base de toute mesure expérimentale du diamètre de la fibre par microscopie (réf. 5).

2. – ÉTUDE DE LA DIFFÉRENCE

2-1 - DEDUCTION DE LA FORMULE -

Comme on l'a dit, on cherchera ici à évaluer l'ordre de grandeur de la différence $\rho_a - \rho_d$ pour voir si elle est éventuellement négligeable; pour ce faire, on commencera par établir une relation explicite entre ces deux quantités. Le calcul s'établit comme suit :

On a d'abord $a = Kd^2$ et par conséquent $E(a^n) = K^n E(d^{2n})$. Dès lors,

$$E\,[(a - \bar{a})\,(1 - \bar{1})] = E\,[a(1 - \bar{1})] - \bar{a}E\,(1 - \bar{1}) =$$

$$= E\,[a(1 - \bar{1})] =$$

$$= KE\,[d^2(1 - \bar{1})]$$

En posant $d = (d - \bar{d}) + \bar{d}$, il vient :

$$E\,[(a - \bar{a})(1 - \bar{1})] = K\{E\,[(d - \bar{d})^2(1 - \bar{1})] + 2\bar{d}E\,[(d - \bar{d})(1 - \bar{1})] + \bar{d}^2\,E(1 - \bar{1})\} =$$

$$= K\{E\,[(d - \bar{d})^2(1 - \bar{1})] + 2\bar{d}E\,[(d - \bar{d})(1 - \bar{1})] =$$

$$= K(\mu_{21} + 2\mu'_{10}\,\mu_{11}) \qquad (2\text{-}1)$$

D'autre part,

$$\sigma_a^2 = E\,[(a - \bar{a})^2] = E(a^2) - [E(a)]^2 = K^2E(d^4) - K^2\,[E(d^2)]^2$$

En posant comme ci-dessus $d = (d - \bar{d}) + \bar{d}$, il vient :

$$\sigma_a^2 = K^2\{E[(d-\bar{d})^4] + 4\bar{d}E[(d-\bar{d})^3] + 6\bar{d}^2E[(d-\bar{d})^2] + 4\bar{d}^3E(d-\bar{d}) + \bar{d}^4\} - K^2\{E[(d-\bar{d})^2] + 2\bar{d}E(d-\bar{d}) + \bar{d}^2\}^2 =$$

$$= K^2 (\mu_{40} + 4\mu'_{10}\,\mu_{30} + 6\mu'^2_{10}\,\mu_{20} + \mu'^4_{10} - \mu^2_{20} - 2\mu'^2_{10}\,\mu_{20} - \mu'^4_{10}) =$$

$$= K (\mu_{40} + 4\mu'_{10}\,\mu_{30} + 4\mu'^2_{10}\,\mu_{20} - \mu^2_{10}) \qquad (2\text{-}2)$$

Des relations (2-1) et (2-2) on tire la valeur de ρ_a :

$$\rho_a = \frac{E[(a - \bar{a})(l - \bar{l})]}{\sigma_a\,\sigma_l} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{02}}}\;\frac{\mu_{21} + 2\mu'_{10}\,\mu_{11}}{[\mu_{40} + 4\mu'_{10}\,\mu_{30} + 4\mu'^2_{10}\,\mu_{20} - \mu^2_{20}]^{1/2}}$$

En divisant numérateur et dénominateur par $2\mu'_{10}\sqrt{\mu_{20}}$, on obtient :

$$\rho_a = \frac{\dfrac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\,\mu_{02}}} + \dfrac{\mu_{21}}{2\mu'_{10}\;\sqrt{\mu_{20}\,\mu_{02}}}}{\left(\dfrac{\mu_{40}}{4\mu'^2_{10}\,\mu_{20}} + \dfrac{\mu_{30}}{\mu'_{10}\,\mu_{20}} + 1 - \dfrac{\mu_{20}}{4\mu'^2_{10}}\right)^{1/2}}$$

En introduisant les coefficients d'asymétrie et d'excès γ_1 et y_z de la distribution de d, définis au § 1-2, le coefficient de variation D, et en posant :

$$\varepsilon = \mu_{21}/2\mu_{20}\,\sqrt{\mu_{02}}$$

il vient finalement :

$$\rho_a = \frac{\dfrac{\mu_{11}}{\mu_{20}\,\mu_{02}} + \varepsilon D}{\left[\dfrac{(3 + \gamma_2)}{4}\,D^2 + \gamma_1 D + 1 - \dfrac{D^2}{4}\right]^{1/2}} =$$

$$= \frac{\rho_d + \varepsilon D}{\left[1 + \gamma_1 D + \dfrac{(\gamma_2 + 2)D^2}{4}\right]^{1/2}} \qquad (2\text{-}3)$$

qui est la relation cherchée.

2-2 - DEVELOPPEMENT -

La formule (2-3) fournit ainsi une relation entre ρ_a et ρ_d en fonction des paramètres des deux distributions de d et de l et en particulier du coefficient de variation D. Or, on sait que ce dernier vaut environ 0,25 et il apparaît interessant de développer l'expression (2-3) en puissances de D, en s'arrêtant par exemple à D^4, qui est déjà de l'ordre de 0,004. Ce développement en série présente aussi l'avantage d'admettre comme premier terme $f(0) = \rho_d$, ce qui rend immédiate la mise de la relation (2-3) sous la forme :

$$\rho_a - \rho_d = 0(D) \qquad (2\text{-}4)$$

permettant d'évaluer l'ordre de grandeur de la différence des deux coefficients de corrélation.

La série de Mc Laurin associée à la fonction $\rho_a = f(D)$ s'écrit :

$$\rho_a = f(0) + f'(0)D + \frac{1f''}{2}(0)D^2 + \frac{1}{6}f'''(0)D^3 + \ldots \qquad (2\text{-}5)$$

et les termes suivants peuvent être négligés devant les premiers. Pour rendre plus aisé le calcul de dérivation, on peut poser :

$$\frac{2+\gamma_2}{4} = m \text{ et en outre } \begin{cases} \rho_d + \varepsilon D = R \\ 1 + \gamma_1 D + mD^2 = P \\ \gamma_1 + 2mD = Q \end{cases}$$

Dès lors $\rho_a = f(D) = RP^{-1/2}$ et on aura

$$\begin{cases} (R^n)' = n\varepsilon R^{n-1} \\ (P^n)' = nP^{n-1}Q \\ (Q^n)' = 2nmQ^{n-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} R(0) = \rho_d \\ P(0) = 1 \\ Q(0) = \gamma_1 \end{cases}$$

Après calcul, on arrive aux relations suivantes :

$$f(0) = \rho_d$$

$$f'(0) = \varepsilon - \frac{1}{2}\gamma_1\rho_d$$

$$f''(0) = \frac{1}{4}\rho_d\,(\gamma_1^2 + 2\gamma_1 - \gamma_2 - 2) - \varepsilon\gamma_1 \qquad (2\text{-}6)$$

$$f'''(0) = -\frac{5}{8}\rho_d\,(\gamma_1^3 + 2\gamma_1^2 - 2\gamma_1 - \gamma_1\gamma_2 - 2\gamma_2 - 4) + \frac{1}{4}\varepsilon\,(7\gamma_1^2 + 2\gamma_1 - 3\gamma_2 - 6)$$

. . . . . .

En substituant les valeurs (2-6) en (2-5) on obtient ainsi une expression approchée de la différence $\rho_a - \rho_d$.

2-3 - CRITIQUE -

Une première remarque à faire au sujet de la relation qu'on vient d'établir, concerne la complexité des expressions (2-6) et notamment l'absence d'une formule de récurrence qui permette le calcul aisé des coefficients du développement. Quant à l'ordre de grandeur pratique de ceux-ci, son évaluation suppose la connaissance de γ_1, γ_2, ε, de même que de ρ_d. Il est évidemment possible en principe, quoique long et malaisé en pratique, de déterminer ces paramètres pour des échantillons; mais si l'on passe de l'échantillon à la population (ici par exemple toutes les fibres d'un lot de laine, d'ailleurs lui-même à considérer comme faisant partie d'une population plus vaste de lots si on veut arriver à des conclusions quelque peu générales), on aura affaire au problème habituel de l'estimation des paramètres inconnus de celle-ci. Or, il ne faut pas oublier qu'une valeur estimée a peu de signification si son intervalle de confiance est trop large; et, d'autre part, pour les moments d'ordre supérieur au 2ème, la taille de l'échantillon nécessaire pour obtenir des estimations suffisamment précises devient très élevée (de l'ordre du millier). Et c'est précisément le cas des coefficients γ_1 et γ_2, qui dépendent de μ_3 et μ_4 ; ce qui, en raison de la complexité et délicatesse de chaque mesure individuelle, conduira à rejeter pratiquement cette première méthode. En conclusion :

1°) La relation (2-4), outre qu'elle ne dépend d'aucune hypothèse a priori sur la distribution de d et de l, offre l'avantage de se présenter sous la forme sans doute suggestive d'un développement en puissances d'une quantité plus petite que l'unité (D = 0,25); ce qui en principe pourrait faire penser que l'ordre de grandeur de la différence $\rho_a - \rho_d$ est petit, à condition toutefois que les coefficients de ce développement ne soient pas trop grands.

2°) Malheureusement, lorsqu'on passe à une vérification expérimentale, on se heurte à des difficultés de principe et pratiques telles qu'elles déconseillent carrément l'emploi de la méthode.

Elle sera donc abandonnée, et on envisagera une solution complètement différente; à titre documentaire, la table 2-4 reporte des estimations de γ_1 et γ_2, tirées de la réf. 3, assez indicatives sur la petitesse des coefficients du développement (2-5). Quant à ε, dont la détermination expérimentale demanderait des mesures longues et peu concluantes, des considérations théoriques qui seront développées au § 6, permettent d'en fixer l'ordre de grandeur à quelques dixièmes. On remarquera enfin que ρ_d est nécessairement plus petit que l'unité.

Table 2-4

(400 mesures par lot)

Lot	γ_1	γ_2
1	0,572	0,00045
2	0,500	1,215
3	0,047	16,32

3. – ÉTUDE DU RAPPORT

3-1 - DÉDUCTION DE LA FORMULE -

On écrira directement le rapport ρ_a/ρ_d sous la forme :

$$\frac{\rho_a}{\rho_d} = \frac{E[(a-\bar{a})(l-\bar{l})]}{E[(d-\bar{d})(l-\bar{l})]} \left(\frac{\sigma_d}{\sigma_a}\right) \qquad (3\text{-}1)$$

σ_l s'éliminant immédiatement. On évaluera séparément les deux facteurs de ce produit :

$$\frac{E[(a-\bar{a})(l-\bar{l})]}{E[(d-\bar{d})(l-\bar{l})]} = \frac{E[a(l-\bar{l})]}{E[d(l-\bar{l})]} =$$

$$= \frac{E(al) - \bar{l}E(a)}{E(dl) - \bar{l}E(d)} =$$

$$= K\,\frac{E(d^2l) - \bar{l}E(d^2)}{E(dl) - \bar{l}E(d)} =$$

$$= K\,\frac{\mu'_{21} - \mu'_{01}\,\mu'_{20}}{\mu'_{11} - \mu'_{01}\,\mu'_{10}} \qquad (3\text{-}2)$$

De même, en se servant de la relation classique

$$\sigma_a^2 = K^2(\mu'_{40} - \mu'^2_{20}) \text{ il vient :}$$

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_a} = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{\mu'_{20} - \mu'^2_{10}}{\mu'_{40} - \mu'^2_{20}}} \qquad (3\text{-}3)$$

On remarquera que par définition :

$$\begin{cases} D^2 = \dfrac{\mu'_{20} - \mu'^2_{10}}{\mu'^2_{10}} \\ A^2 = \dfrac{\mu'_{40} - \mu'^2_{20}}{\mu'^2_{20}} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \mu'_{20} - \mu'^2_{10} = \mu'^2_{10}\ D^2 \\ \mu'_{40} - \mu'^2_{20} = \mu'^2_{20}\ A^2 \end{cases} \qquad (3\text{-}4)$$

En substituant en l'expression (3-3) les valeurs tirées de (3-4), qui offrent l'avantage de se présenter sous forme de carré, on aura :

$$\frac{\sigma_d}{\sigma_a} = \frac{1}{K} \cdot \frac{D}{A} \cdot \frac{\mu'_{10}}{\mu'_{20}} \qquad (3\text{-}5)$$

Des relations (3-1), (3-2) et (3-5) on tire :

$$\frac{\rho_a}{\rho_d} = \frac{D}{A} \cdot \frac{\mu'_{21} - \mu'_{01}\mu'_{20}}{\mu'_{11} - \mu'_{01}\mu'_{10}} \cdot \frac{\mu'_{10}}{\mu'_{20}} \qquad (3\text{-}6)$$

qui est la relation cherchée.

3-2 - UTILISATION -

On remarquera d'abord que dans la relation (3-6) apparaît le rapport D/A, dont la valeur était traditionnellement admise égale à 1/2. Breny a montré (réf. 3) que poser A = 2D constitue en réalité une approximation, et il a donné la relation exacte sous la forme A = 2D [1 + f(D)], où f(D) représente un développement en puissances de D dont les coefficients dépendent encore une fois de paramètres tels que γ_1 et γ_2 ; toutefois, en pratique il a été amené à conclure que la formule A = 2D est suffisamment précise, surtout pour de petites tailles d'échantillons (cas courant en une analyse de corrélation). On pourra donc considérer en première approximation D/A comme une constante numérique.

En second lieu, si l'on compare les relations (2-5) et (3-6), qui sont toutes deux indépendantes d'hypothèses a priori sur les distributions théoriques de d et de l, et se prêtent par conséquent en principe à une vérification expérimentale, trois remarques s'imposent :

1°) La relation (3-6) semble à première vue plus exacte, car il ne s'agit plus d'un développement dont il faut négliger certains termes; cet avantage étant probablement illusoire, car on a introduit une simplification analogue en admettant D/A = 1/2.

2°) Les moments apparaissant à la formule (3-6) sont pris par rapport à l'origine et non pas par rapport à la moyenne, comme c'était le cas pour (2-5) : cela facilite évidemment leur calcul numérique.

3°) En (3-6) il n'y a pas de moments d'ordre supérieur au 2ème, et le problème d'estimation dont on a parlé au § 2-3 est grandement facilité, la taille de l'échantillon nécessaire étant sensiblement réduite.

Ce dernier résultat est fondamental, et il permet de conclure que, pour une vérification expérimentale, (3-6) convient mieux que (2-5). Bien que le but de ce travail, de nature théorique, ne soit pas de fournir cette vérification, on signalera toutefois cette conclusion en vue d'éventuelles recherches ultérieures; à l'avis de l'auteur cependant, l'utilité d'une recherche de ce genre reste discutable devant la comparaison pure et simple (au sens statistique du mot, bien en-

tendu) des coefficients de corrélation eux-mêmes, qui n'offrent pas de difficultés de calcul bien différentes. Dans le cadre de la présente étude, (3-6) servira plutôt comme point de départ à la relation qui sera établie au paragraphe suivant.

4. – EMPLOI DE L'HYPOTHÈSE LOGARITHMO-NORMALE

4-1 - DEFINITION ET APPLICABILITE -

En vue d'éliminer les difficultés pratiques mentionnées plus haut au sujet de la vérification expérimentale d'une relation entre ρ_a et ρ_d, on va dans ce paragraphe émettre l'hypothèse que la distribution de l et de d soit connue a priori. Un tel procédé, outre à l'avantage d'affranchir de toute question d'estimation et de difficulté des calculs y annexes, jouit en principe des propriétés de généralité propres à la méthode déductive, qu'on ne saurait pas demander à une induction du type envisagé jusqu'à présent.

D'autre part, pour ce faire on est obligé d'introduire une hypothèse nouvelle, et les résultats auxquels on arrivera ne seront valables qu'à condition que celle-ci puisse être admise. Or, pour le diamètre et la longueur des fibres de laine à peigne, on dispose des travaux de Hénon et Breny (réf. 6-7-8-9), desquels il résulte qu'on peut raisonnablement admettre que ces caractéristiques, analoguement d'ailleurs à bien d'autres propriétés biométriques, possèdent une distribution logarithmico-normale. Il ne pourrait s'agir ici d'une hypothèse axiomatique, mais, comme son utilisation se fera de toute façon dans les limites de l'erreur expérimentale, l'essentiel est de rester, en l'adoptant, à l'intérieur de celles-ci : on remarquera une fois pour toutes que n'importe quel résultat que l'on puisse obtenir, correspondra toujours à une approximation, et tout revient à voir si elle est suffisamment proche de la réalité pour servir à nos buts.

Cela étant, on admettra dans la suite que ln d et ln l sont distribués en loi de Gauss, en renvoyant aux réf. citées pour la justification de cette hypothèse de calcul. Cette question sera d'ailleurs examinée de plus près à l'Appendice II.

4-2 - CALCULS GENERAUX -

4-2-1 - Cas d'une variable x.

Si x est distribué suivant une loi logarithmo-normale, ln b et c étant la moyenne et l'écart-type de ln x, sa loi de distribution est définie par l'équation :

$$\frac{1}{c\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \ln b}{c}\right)^2\right]dx = 1$$

En posant $\left(\frac{\ln x - \ln b}{c}\right) = z$; $dx = cxdz$; $x^m = b^m\exp(mcz)$; on obtiendra l'équation réduite :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-z^2/2)dz = 1$$

Dès lors, par définition,

$$\mu'_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^m\exp(-z^2/2)dz =$$

$$= \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(mcz - z^2/2)dz =$$

$$= \frac{b^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(z - mc)^2 - \frac{m^2c^2}{2}\right]dz =$$

$$= b^m \exp(m^2c^2/2) \qquad (4\text{-}1)$$

Ainsi :

$$\bar{x} = \mu'_1 = b\ \exp(c^2/2)$$

$$\sigma_x^2 = \mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1 = b^2\ \exp(c^2)\ [\exp(c^2) - 1]$$

$$CV_x^2 = \mu_2/\mu'^2_1 = \exp(c^2) - 1$$

d'où on calcule aisément :

$$c = \sqrt{\ln(1 + CV_x^2)} \qquad (4\text{-}2)$$

$$b = \frac{\bar{x}}{\sqrt{1 + CV_x^2}} \qquad (4\text{-}3)$$

4-2-2 - Cas de deux variables x et y.

Si la distribution conjointe de ln x et ln y est binormale, elle est définie par l'équation :

$$\frac{1}{2\pi cs\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{xy} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x - \ln b}{c}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\rho\left(\frac{\ln x - \ln b}{c}\right)\left(\frac{\ln y - \ln r}{s}\right) + \left(\frac{\ln y - \ln r}{s}\right)^2\right]\right\} dx\ dy = 1$$

les constantes désignant :

$$\begin{cases} \ln b \text{ et } c \text{ la moyenne et l'écart-type de } \ln x, \\ \ln r \text{ et } s \text{ la moyenne et l'écart-type de } \ln y, \\ \rho \text{ le coefficient de corrélation entre } \ln x \text{ et } \ln y. \end{cases}$$

En posant $\begin{cases} \dfrac{\ln x - \ln b}{c} = u;\ dx = cxdu;\ x^m = b^m \exp(mcu) \\ \dfrac{\ln y - \ln r}{s} = v;\ dy = sydv;\ y^n = r^n \exp(nsv) \end{cases}$

on obtiendra l'équation réduite :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - 2\rho uv + v^2)\right] du\ dv = 1$$

Dès lors, par définition,

$$\mu'_{mn} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^m y^n \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - 2\rho uv + v^2)\right] du\ dv =$$

$$= \frac{b^m r^n}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[mcu + nsv - \frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - 2\rho uv + v^2)\right] du\ dv.$$

Afin de séparer les variables, on posera :

$$w = \frac{u - \rho v}{\sqrt{1-\rho^2}} \; ; \quad u = \rho v + w\sqrt{1-\rho^2}; \quad du = \sqrt{1-\rho^2}\, dw. \text{ Il vient :}$$

$$\mu'_{mn} = \frac{b^m r^n}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[mc\rho v + mcw\sqrt{1-\rho^2} + nsv - \frac{1}{2}(w^2+v^2)\right] dw\, dv =$$

$$= b^m r^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(mc\rho v + nsv - \frac{1}{2}v^2) dv . \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(mc\sqrt{1-\rho^2}\, w - \frac{1}{2}w^2)\, dw =$$

$$= b^m r^n I_1 \; I_2 \qquad (4\text{-}4)$$

On évaluera séparément I, et I_2, en posant $\begin{cases} mc\rho + ns = \alpha \\ mc\sqrt{1-\rho^2} = \beta \end{cases}$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\frac{1}{2}(v^2 - 2\alpha v)\}\, dv =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\frac{1}{2}[(w-\alpha)^2 - \alpha^2]\}\, dv =$$

$$= \exp(\alpha^2/2)$$

$$I_2 = \exp(\beta^2/2)$$

En substituant ces valeurs en (4-4), on obtient :

$$\mu'_{mn} = b^m r^n \exp\left[\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right] =$$

$$= b^m r^n \exp\left[\frac{1}{2}(m^2c^2\rho^2 + n^2s^2 + 2mncs\rho + m^2c^2 - m^2c^2\rho^2)\right] =$$

$$= b^m r^n \exp\left[\frac{1}{2}(m^2c^2 + n^2s^2 + 2mn\rho cs)\right] \qquad (4\text{-}5)$$

A titre de vérification, on remarquera que la relation (4-5) contient (4-1) comme cas particulier pour n = 0.

4-3 - APPLICATION AU CAS ETUDIE -

On développera la relation (3-6) :

$$\frac{\rho_a}{\rho_d} = \frac{D}{A} \cdot \frac{\mu'_{21} - \mu'_{01}\mu'_{20}}{\mu'_{11} - \mu'_{01}\mu'_{10}} \cdot \frac{\mu'_{10}}{\mu'_{20}}$$

en employant les formules (4-1) et (4-5) dans le calcul des moments. L'emploi de (3-6) de préférence à d'autres relations est dû à sa forme simple et au fait qu'elle ne contient que des moments pris par rapport à l'origine. On aura séparément, d et l jouant respectivement le rôle de x et y du § 4-2.2. :

$$\mu'_{10}/\mu'_{20} = b\exp(\frac{1}{2}c^2)/b^2\exp(2c^2) = b^{-1}\exp(-\frac{3}{2}c^2) \qquad (4\text{-}6)$$

$$\mu'_{21} - \mu'_{01}\mu'_{20} = b^2 r\left[\exp\frac{1}{2}(4c^2 + s^2 + 4\rho cs)\right] - b^2 r\exp\left[\frac{1}{2}(4c^2 + s^2)\right] =$$

$$= b^2 r\left[\exp\frac{1}{2}(4c^2 + s^2)\right]\left[\exp(2\rho cs) - 1\right]$$

$$\mu'_{11} - \mu'_{01}\mu'_{10} = br \exp\left[\frac{1}{2}(c^2 + s^2 + 2\rho cs)\right] - br \exp\left[\frac{1}{2}(c^2 + s^2)\right] =$$

$$= br \exp\left[\frac{1}{2}(c^2 + s^2)\right]\left[\exp(\rho cs) - 1\right]$$

$$\frac{\mu'_{21} - \mu'_{01}\mu'_{20}}{\mu'_{11} - \mu'_{01}\mu'_{10}} = b \exp\left(\frac{3}{2}c^2\right)\left[\frac{\exp(2\rho cs) - 1}{\exp(\rho cs) - 1}\right] =$$

$$= b \exp\left(\frac{3}{2}c^2\right)\left[\exp(\rho cs) + 1\right] \qquad (4\text{-}7)$$

En substituant les valeurs tirées de (4-6) et (4-7) en (3-6), on obtient :

$$\rho_a/\rho_d = \frac{D}{A}(e^{\rho cs} + 1) \qquad (4\text{-}8)$$

qui est la relation cherchée. On voit que l'emploi de l'hypothèse logarithmo-normale a conduit à une expression de forme extrêmement simple.

4-4 - DISCUSSION -

En vue d'évaluer l'ordre de grandeur pratique du rapport ρ_a/ρ_d, on exprimera d'abord $e^{\rho cs}$ par son développement en série :

$$e^{\rho cs} = 1 + cs\rho + \frac{1}{2}c^2s^2\rho^2 + \frac{1}{6}c^3s^3\rho^3 + \ldots \qquad (4\text{-}9)$$

Or, d'après (4-2) et les notations habituelles, il résulte $c = \sqrt{\ln(1 + D^2)}$ et $s = \sqrt{\ln(1 + L^2)}$; comme on peut admettre en général $D = 0,25$ et $L = 0,45$, un simple calcul numérique donne $cs = 0,24 \times 0,43$: le produit cs est donc de l'ordre de grandeur du dixième. Comme $\rho < 1$, il en suit qu'on peut négliger, dans le développement (4-9), les termes à partir de ρ^2 vis-à-vis des autres et poser par conséquent :

$$e^{\rho cs} = 1 + cs\rho \qquad (4\text{-}10)$$

d'où, pour la valeur du rapport qu'on étudie :

$$\rho_a/\rho_d = \frac{D}{A}(2 + cs\rho) \qquad (4\text{-}11)$$

En admettant $D/A = 1/2$, il résulte immédiatement de cette dernière relation qu'on peut considérer :

$$\rho_a = \rho_d \qquad (4\text{-}12)$$

avec une erreur négligeable, à condition que $cs\rho$ soit suffisamment petit par rapport à 2. Or, ρ étant nécessairement plus petit que l'unité, $cs\rho$ vaut au plus 1/10 et l'erreur relative commise vaut environ $0,1/2 = 5\%$. Mais, au lieu d'admettre $D/A = 1/2$, on peut recourir à la relation plus exacte (en distr. log-normale; réf. 3) $A = 2D\left(1 + \frac{3}{4}D^2\right)$. Dans ce cas, D/A vaut environ 0,48 et par conséquent $\rho_a/\rho_d = 1,008$: l'erreur commise en assimilant ce rapport à l'unité est donc largement inférieure à l'erreur d'échantillonnage, et (4-12) résulte justifiée.

5. – CONCLUSION

Des remarques détaillées sur les différentes méthodes envisagées ayant été faites au cours des paragraphes précédents, on se bornera ici à quelques considérations générales. Les conclusions peuvent se résumer en deux points, et se feront par rapport à l'hypothèse qu'on avait à vérifier au départ, à savoir $\rho_a = \rho_d$:

1°) L'étude de la différence des 2 coefficients conduit à une relation mathématique dont la forme (développement en puissances de D) permet de supposer que l'ordre de grandeur de $\rho_a - \rho_d$ soit négligeable; mais les difficultés inhérentes à la vérification expérimentale ont pratiquement empêché de développer cette méthode.

2°) La relation issue de l'étude du rapport ρ_a/ρ_d, bien que de forme moins indicative, se prête mieux à une évaluation basée sur échantillons, et comme premier résultat de cette étude théorique on retiendra l'indication de (3-6) comme étant la voie la plus simple dans ce but. En second lieu, en admettant une distribution log-normale pour l et d, et dans les limites de validité de cette hypothèse, cette même relation a permis de montrer que $\rho_a = \rho_d$, avec une approximation très satisfaisante (1% environ, bien inférieure à l'erreur d'échantillonnage); ce qui confirme du point de vue théorique les résultats d'analyse cités à la table 1-1.

6. – APPENDICE I - CALCUL DE ε

Par application des formules (4-1) à (4-5), valables en distribution log-normale, il est facile d'obtenir une estimation du coefficient ε de la relation (2-3).

On a $\varepsilon = \dfrac{\mu_{21}}{2\mu_{20}\sqrt{\mu_{02}}}$ et avec les notations du 4-2 il vient :

$$\mu_{21} = E\,[(d-\bar{d})^2(l-\bar{l})] = E(d^2l) - \bar{l}E(d^2) - 2\bar{d}E(dl) + 2\bar{l}\bar{d}E(d) =$$

$$= \mu'_{21} + 2\mu'^2_{10}\,\mu'_{01} - \mu'_{01}\mu'_{20} - 2\mu'_{10}\mu'_{11} =$$

$$= b^2 r \exp\left[\frac{1}{2}(2c^2+s^2)\right]\,[\exp(c^2+2\rho cs)+2-\exp(c^2)-2\exp(\rho cs)] =$$

$$= M.\,b^2 r \exp\left[\frac{1}{2}(2c^2+s^2)\right].$$ D'autre part :

$$\mu_{20} = b^2[\exp(2c^2) - \exp(c^2)] \quad \text{et} \quad \sqrt{\mu_{02}} = r\sqrt{\exp(2s^2) - \exp(s^2)}.$$

Dès lors :

$$\varepsilon = M\frac{e^{c^2}.\,e^{s^2/2}}{2e^{c^2}(e^{c^2}-1)e^{s^2/2}\sqrt{e^{s^2}-1}} = \frac{M}{2D^2L} \quad \text{en vertu de (4-2).}$$

Pour évaluer M, on aura recours à l'expression approchée (4-10) :

$$M = e^{c^2}(1+2\rho cs) + 2 - e^{c^2} - 2(1+\rho cs) =$$

$$= (1+D^2)2\rho cs + 2(-\rho cs) =$$

$$= 2\rho csD^2.$$ D'où finalement :

$$\varepsilon = \rho cs/L$$

Si on admet cs = 1/10 et L = 0,50, comme $\rho < 1$, ε est au plus de l'ordre de 2/10. Il est à remarquer que l'emploi de l'approximation log-normale est dans ce cas tout à fait légitime, car ce qui intéresse ici est s'assurer que l'ordre de grandeur de ε, coefficient d'un développement en puissances de D, ne soit pas trop élevé; pour ce faire, il suffit d'estimer ε en des limites mêmes assez larges.

7. – APPENDICE II - AJUSTEMENT D'UNE LOI LOG-NORMALE A UNE DISTRIBUTION EXPÉRIMENTALE

7-1 - INTRODUCTION -

Afin de pouvoir mieux juger de la validité des hypothèses introduites au § 4, on s'est proposé dans ce paragraphe d'examiner quelques ajustements pratiques de la loi log-normale à des distributions expérimentales. On a estimé opportun d'inclure cette partie du travail sous forme d'Appendice, à titre complémentaire à l'étude principale; le but poursuivi n'étant pas de fournir des conclusions définitives (ce qui aurait demandé un développement bien plus important), mais d'esquisser une première tentative de systématisation de la question, en l'illustrant par un minimum d'exemples, qui puissent toutefois montrer en quelle direction l'étude pourrait être continuée.

Le premier problème qui se pose est évidemment celui du choix de la méthode d'ajustement à employer; à ce sujet, on pourra tout d'abord distinguer les méthodes graphiques et les méthodes analytiques.

7-1. 1. - Méthodes graphiques

Elles représentent une extension au cas d'une distribution log-normale de la méthode classique d'ajustement graphique d'une loi normale par droite de Henry; en voici le principe :

La loi de distribution de ln x étant normale, à 2 paramètres ln b et c (d'après les notations du § 4-2-1), la variable réduite s'écrit :

$$t = \frac{\ln x - \ln b}{c} = \frac{1}{c} \ln \frac{x}{b} = \frac{1}{c \log e} \log \frac{x}{b} \qquad (7\text{-}1)$$

Cette équation est celle d'une droite, à condition de porter en abscisses les valeurs de x sur une échelle logarithmique. D'autre part, la probabilité de trouver une valeur de la variable réduite inférieure ou égale à t s'écrit :

$$F(t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t_i} \exp(-t^2/2)dt \qquad (7\text{-}2)$$

et il est possible, par l'emploi des tables ou en adoptant une échelle graduée en probabilité, de faire correspondre sur le même axe des ordonnées à chaque valeur de t la valeur F(t) ci-dessus. L'ensemble des points (x_i, F_i) forme donc encore une ligne droite, qui s'appelle dans ce cas droite de Gibrat.

Pour le calcul pratique d'un ajustement, il suffit dès lors d'employer un papier gausso-logarithmique et de porter en abscisses les limites supérieures de classe, et en ordonnées les fréquences cumulées partielles, en %, correspondantes (voir exemples aux § 7-2 et 7-3).

Cette méthode, qui a été employée notamment par Hénon (réf. 6) dans le cas du diamètre, convient particulièrement bien, ne nécessitant pas de longs calculs, si les points figuratifs ainsi obtenus s'échelonnent en ligne droite. Elle peut d'autre part être étendue, comme l'a fait remarquer Hénon (réf. 7), au cas d'un diagramme non rectiligne mais présentant une forme en V plus ou moins ouvert : dans ce cas, la distribution est encore log-normale, mais à partir d'une certaine valeur de la variable (ou mieux, comme on le verra au § 7-3, de la fonction de distribution) ses paramètres changent; en d'autres termes, il y aurait ici juxtaposition de 2 distributions.

En conclusion, la méthode graphique, en raison de sa simplicité, est sans doute la première à essayer et peut souvent suffire.

7-1-2 - Méthodes analytiques.

L'ajustement graphique permet des conclusions suffisamment précises dans les deux cas extrêmes, à savoir s'il apparaît à vue très bon ou carrément mauvais; mais dans de nombreux cas intermédiaires, très souvent rencontrés en pratique, il lui manque un critère quantitatif de jugement. Il apparaît dès lors nécessaire d'introduire la méthode classique du test statistique d'un ajustement par le calcul de χ^2 ; mais encore une fois, ce qu'il faut déterminer d'abord est une loi théorique, c'est-à-dire les paramètres de la distribution log-normale qu'on veut ajuster aux données expérimentales.

Pour ce faire, trois voies sont possibles :

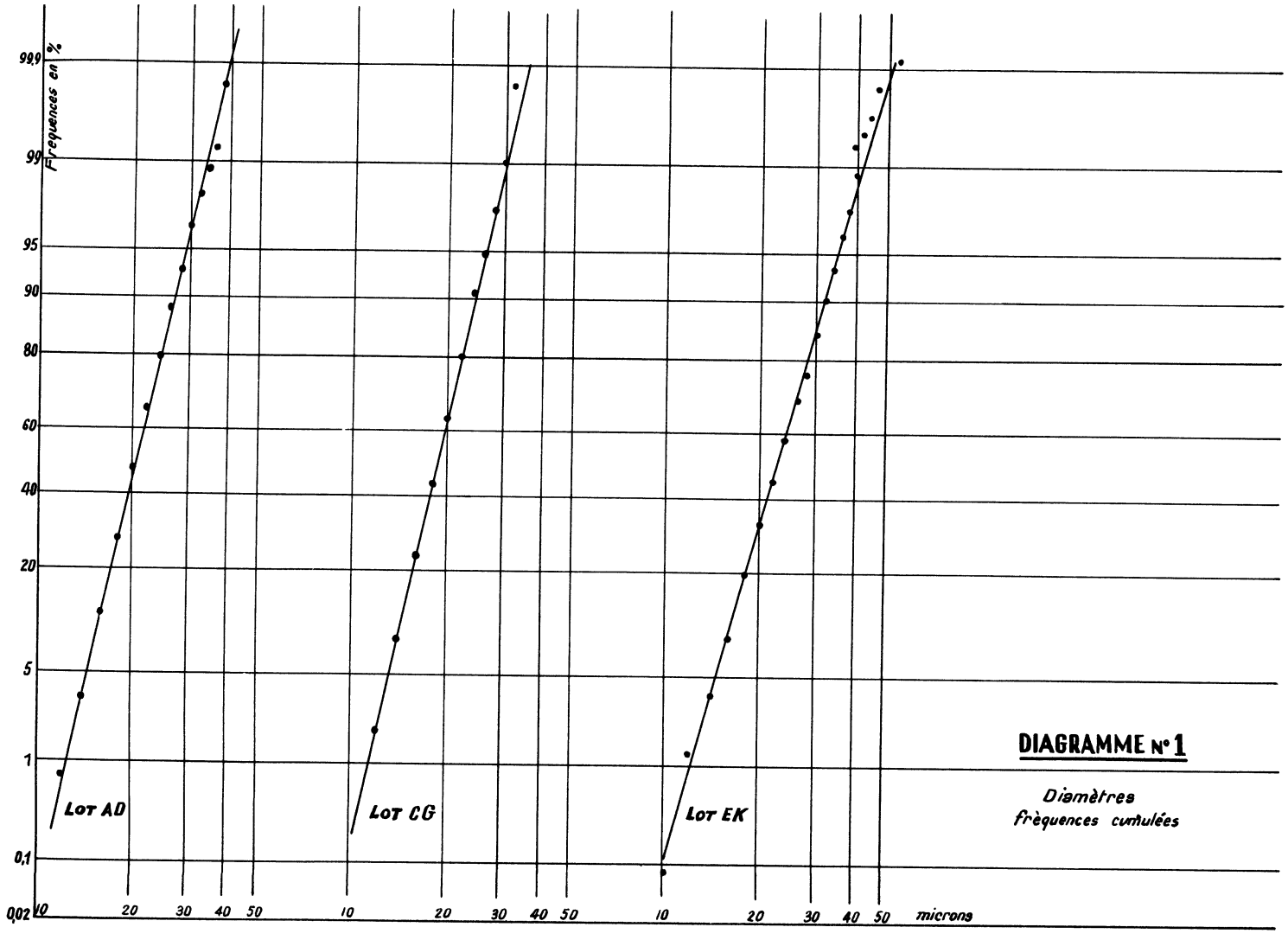
1°) Se laisser guider par un essai préliminaire d'ajustement graphique, en traçant sur papier gausso-logarithmique une droite correspondant à l'allure générale des points expérimentaux (si ce tracé à vue n'apparaît pas possible, l'ajustement n'est même pas à essayer, comme on l'a remarqué plus haut); à partir de cette droite, on peut déterminer les paramètres de la distribution en introduisant la définition de la droite de Gibrat (b est la médiane de la distribution de x, car de (7-1) il vient $b = x$ si $t = 0$; c est aisément déterminable en se fixant un autre point quelconque sur la droite). Cette méthode conduit à la valeur de χ^2 la plus satisfaisante possible(1), compte tenu du recours éventuel à 2 ou même plusieurs droites d'ajustement (diagrammes en V); d'autre part, surtout dans ce dernier cas, elle ne vaut évidemment que pour chaque cas particulier étudié.

2°) Prendre, comme l'a fait Breny (réf. 8-9) la moyenne et la variance expérimentales comme estimations des paramètres de la droite d'ajustement. Avec les notations habituelles, on aura, d'après (4-2) et (4-3) : $c = \sqrt{\ln(1 + CV_x^2)}$; $b = \bar{x}/\sqrt{1 + CV_x^2}$. Cette "méthode des moments" est intéressante, car elle fournit une solution générale du problème; mais pratiquement l'ajustement obtenu, estimé par χ^2, est d'autant moins bon que la courbe des points expérimentaux s'éloigne de la droite idéale : en fait, il est assez dangereux de représenter une distribution de loi mal connue par deux de ses moments.

3°) Avoir recours à la méthode de Davies (citée à la réf. 10), qui tient un peu plus compte de l'allure de la fonction de distribution réelle par l'emploi des quartiles dans le calcul de $\bar{x}_{log}$ et σ_{log}; cette façon de procéder, qui jouit en prin-

---

(1) L'emploi du test χ^2 n'est rigoureusement justifié que si les paramètres sont estimés à l'aide d'une méthode telle que celle du maximum de vraisemblance ou ayant des propriétés analogues au point de vue efficacité. Le test χ^2 n'a, ici, qu'une valeur indicative.


Fréquences en %
99,9
99
95
90
80
60
40
20
5
1
0,1
0,02
10
20
30
40
50
microns
LOT AD
LOT CG
LOT EK
DIAGRAMME N° 1
Diamètres
fréquences cumulées

cipe des mêmes avantages de généralité et de reproductibilité que celle des moments, conduirait probablement à un ajustement un peu plus précis. De plus, Davies suggère un coefficient logarithmique d'asymétrie dont la détermination, bien que peu indicative, peut au moins renseigner rapidement sur la non appartenance d'une distribution donnée à une famille log-normale. Ce même auteur indique enfin un coefficient de correction à ajouter éventuellement aux limites de classe et aux quartiles d'une série expérimentale en vue de la rendre log-normale (ce qui revient en fait à un changement d'origine pour l'axe des abscisses). En résumé, la méthode de Davies peut rendre des services dans des cas particuliers, mais l'utilité de son coefficient de correction reste en fait plutôt douteuse et en tout cas limitée (voir § 7-3).

Les modes d'emploi de ces différentes méthodes, ainsi que des considérations critiques valables pour les cas particuliers étudiés, seront décrits plus en détail au cours des paragraphes qui vont suivre.

7-2 - CAS DU DIAMETRE -

Un ajustement graphique a été essayé à partir de 3 distributions obtenues par le laboratoire Peltzer & Fils à Verviers en 1948 sur du ruban de peigné, en employant la méthode WIRA "de la moyenne" pour la mesure du diamètre (les résultats pour chaque lot ont été cumulés). La table 1 résume les résultats et les calculs

Les points (x_i, y_i) ont été portés sur papier gausso-logarithmique au diagramme 1. Comme on le voit, l'ajustement est très bon, sauf pour les quelques points terminaux, qui d'ailleurs sont peu représentatifs, les dernières classes comportant trop peu de mesures et donnant lieu de ce fait à des intervalles de confiance trop larges; on se rappellera à ce sujet que les classes extrêmes d'une distribution expérimentale sont d'une manière générale à considérer avec précaution. On peut donc conclure que les exemples traités confirment d'une façon très satisfaisante la validité de l'hypothèse log-normale admise pour le diamètre de la fibre de laine au § 4. Cela concorde aussi parfaitement avec les résultats et diagrammes reportés par Hénon à la réf.7; on remarquera toutefois que ce même auteur a signalé une tendance des graphiques à se transformer en V (d'ailleurs extrêmement ouvert) pour des lots de croisé II-III, correspondant à une finesse de 30 microns environ.

A titre documentaire, le diagramme 2 porte, à côté des points figuratifs des fréquences expérimentales, la droite d'ajustement déterminée analytiquement par la méthode des moments, pour le lot EK. A cette occasion, on en rappellera ici brièvement le mode de calcul :

On a $\bar{x} = 23,57$; $CV_x = 0,2707$; $1 + CV_x^2 = 1,0733$. Des relations (4-2) et (4-3), on tire $b = \frac{23,57}{\sqrt{1,0733}} = 22,75$, ce qui fixe un premier point de la droite (médiane: ordonnée 0,50). D'autre part, $c = \sqrt{2,303 \log 1,0733} = 0,266$. Pour déterminer un second point, on aura recours à la relation (7-1); il vient :

$$t = \frac{1}{(0,266 . 0,434)} \log(x/b) = 8,66 \log(x/b).$$

Pour $x = 45,5$, on obtient $t = 2,6069$, d'où $y = F(t) = 0,995$ environ.

Comme on le voit, la droite ainsi tracée correspond d'une manière très satisfaisante à l'allure des points expérimentaux; ce qui montre l'utilité de la

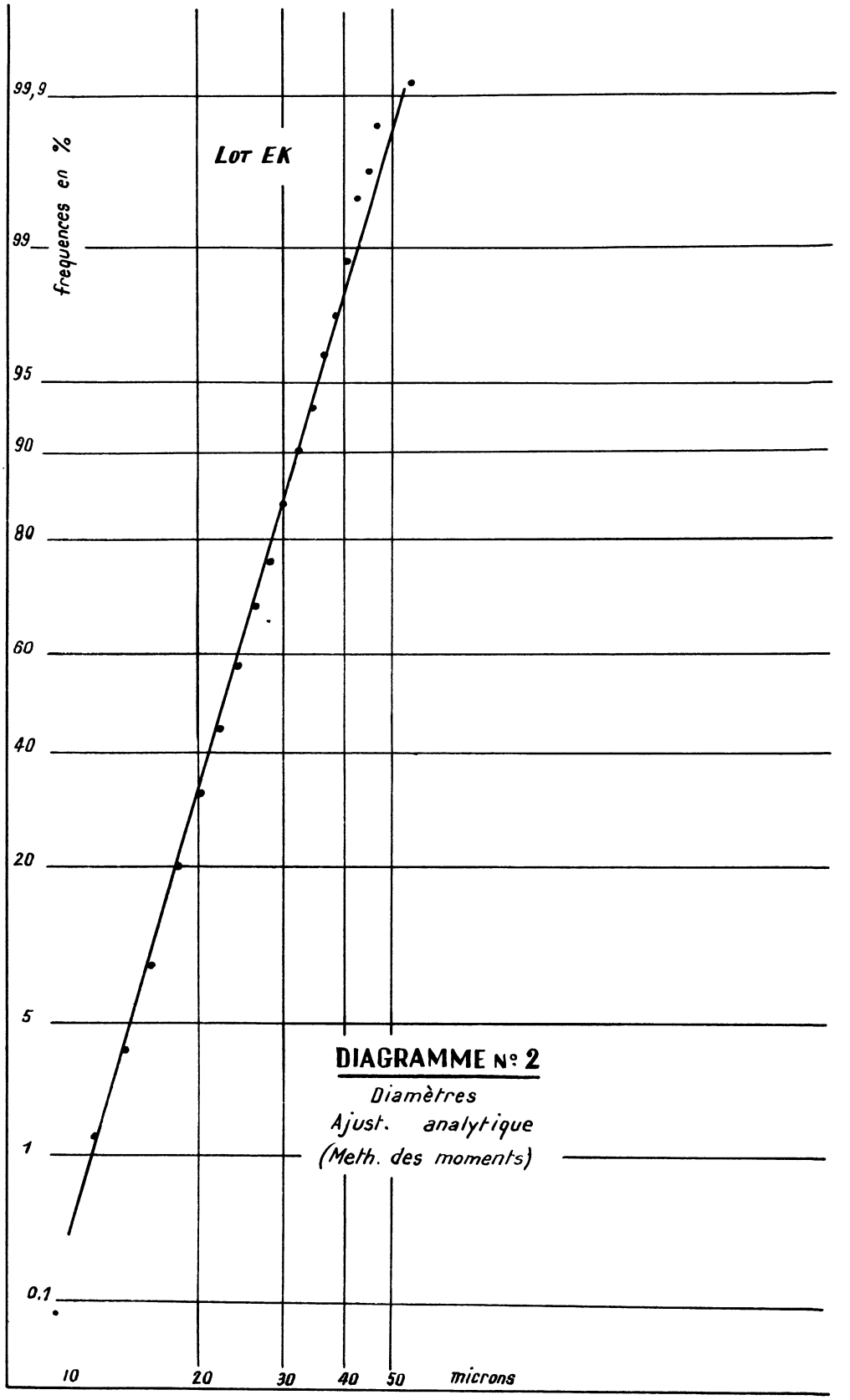


DIAGRAMME N° 2

Diamètres
Ajust. analytique
(Meth. des moments)

méthode des moments quand le diagramme est sensiblement rectiligne.

7-3 - CAS DE LA LONGUEUR -

7-3-1 - Ajustement graphique.

La table 2 reporte les données relatives aux analyses de longueur pour les mêmes lots considérés plus haut, obtenues en employant la méthode WIRA "modifiée"; le diagramme 3, sur papier gausso-logarithmique, représente leur ajustement graphique. Si on compare l'allure de ces courbes à celles du diagramme 1, il apparaît évident que la distribution des longueurs ne peut pas être considérée log-normale au même titre que celle des diamètres; en fait, on se trouve ici en présence d'un des cas d'incertitude mentionnés plus haut, qui nécessitent l'emploi d'une méthode analytique.

Il est cependant à remarquer, en développant les dernières considérations du § 7-1-1, qu'un ajustement graphique pourrait presque certainement suffire, à condition d'employer 2 droites (diagramme en V, tracé en trait plein); et les exemples traités semblent indiquer la 3ème quartile comme point où les paramètres de la distribution changent de valeur.

Ce résultat est susceptible d'intéressants développements, mais on ne peut le signaler ici qu'avec réserve, faute de données expérimentales plus nombreuses. En ce qui concerne les lots envisagés dans la présente étude, il pourrait servir de base à une méthode analytique d'ajustement, comme on l'a dit au 1°) du § 7-1-2; mais le calcul explicite de χ^2 paraît superflu étant donné la très bonne concordance entre points figuratifs et droites en V.

Quant aux procédés analytiques proprement dits, on envisagera séparément la méthode des moments et celle de Davies, pour le lot AD.

7-3-2 - Méthode des moments.

Les paramètres expérimentaux du lot AD étant $\overline{x}$=60,13 mm et CV_x =46,51%, d'où CV_x^2 = 0,2163, on calcule facilement : b = 54,19; log b = 1,7365; c = 0,442 ; 1/(c log e) = 5,213.

Ces données numériques permettent d'abord de tracer la droite d'ajustement (diagramme 4), qui passe par le point (54, 52; 50%) et par un second point déterminé par les relations :

$$x = 109,04 \longrightarrow t = 5,213 . \log 2 = 1,57 \longrightarrow F(t) = 94,18\%$$

Ensuite, il est possible de tester l'ajustement par la méthode de χ^2; le détail des calculs figurant à la table 3, on en relèvera la valeur χ^2 = 166,08, avec 24 - 3 = 21 degrés de liberté. Le seuil de probabilité à 0,1% conduisant à la valeur χ^2 = 46,80, on conclut que l'ajustement ne satisfait nullement; ce qui d'ailleurs apparaissait déjà d'un simple examen visuel du diagramme 4.

Ce résultat n'infirme évidemment pas la méthode des moments en elle-même, mais on restreint l'utilisation aux cas où la distribution expérimentale s'approche beaucoup plus d'une droite théorique.

7-3-3 - Méthode de Davies.

a) En indiquant par Q_1, Q_2, Q_3 les trois quartiles de la distribution expérimentale, le coefficient d'asymétrie de Davies s'écrit :

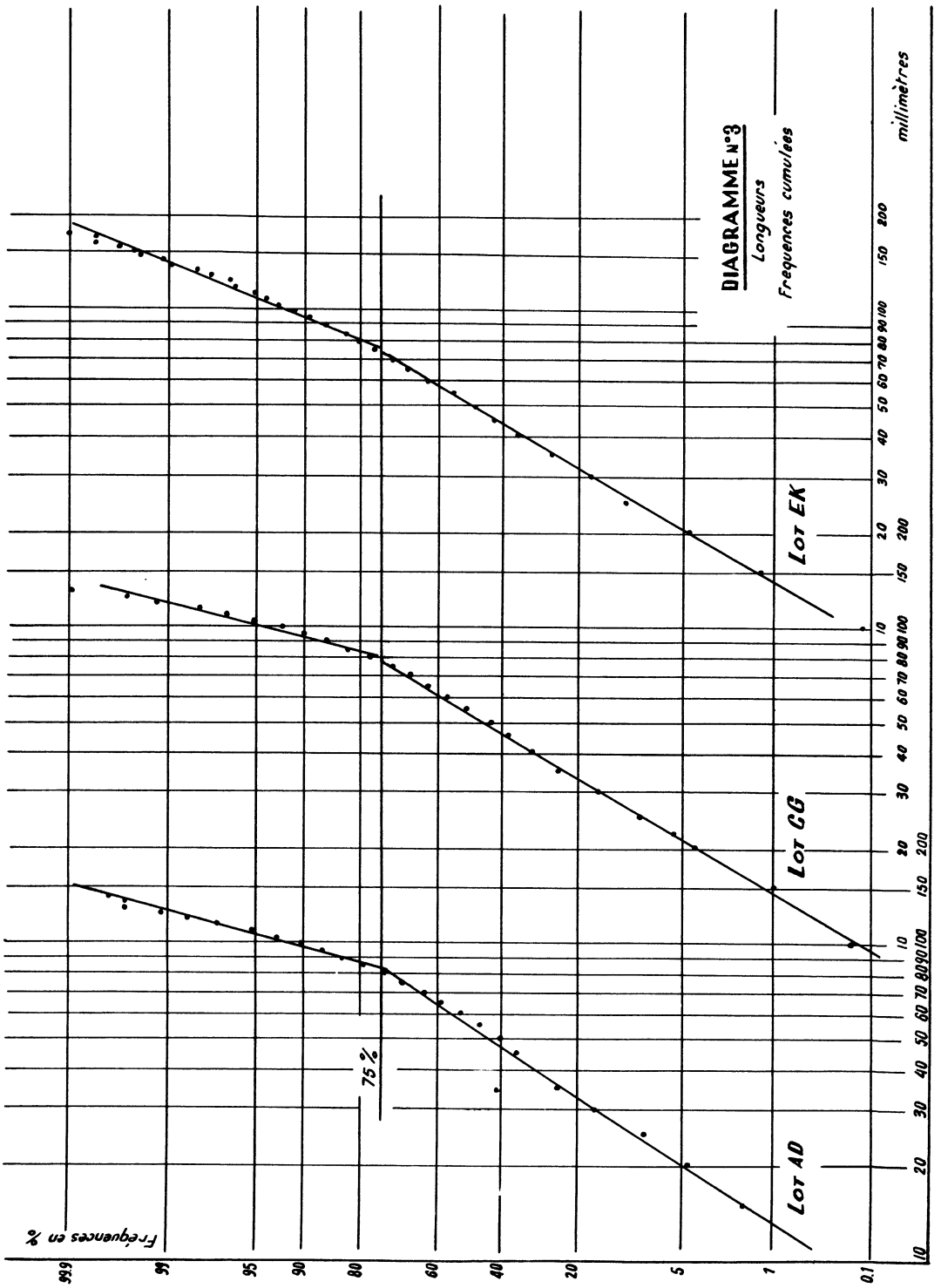
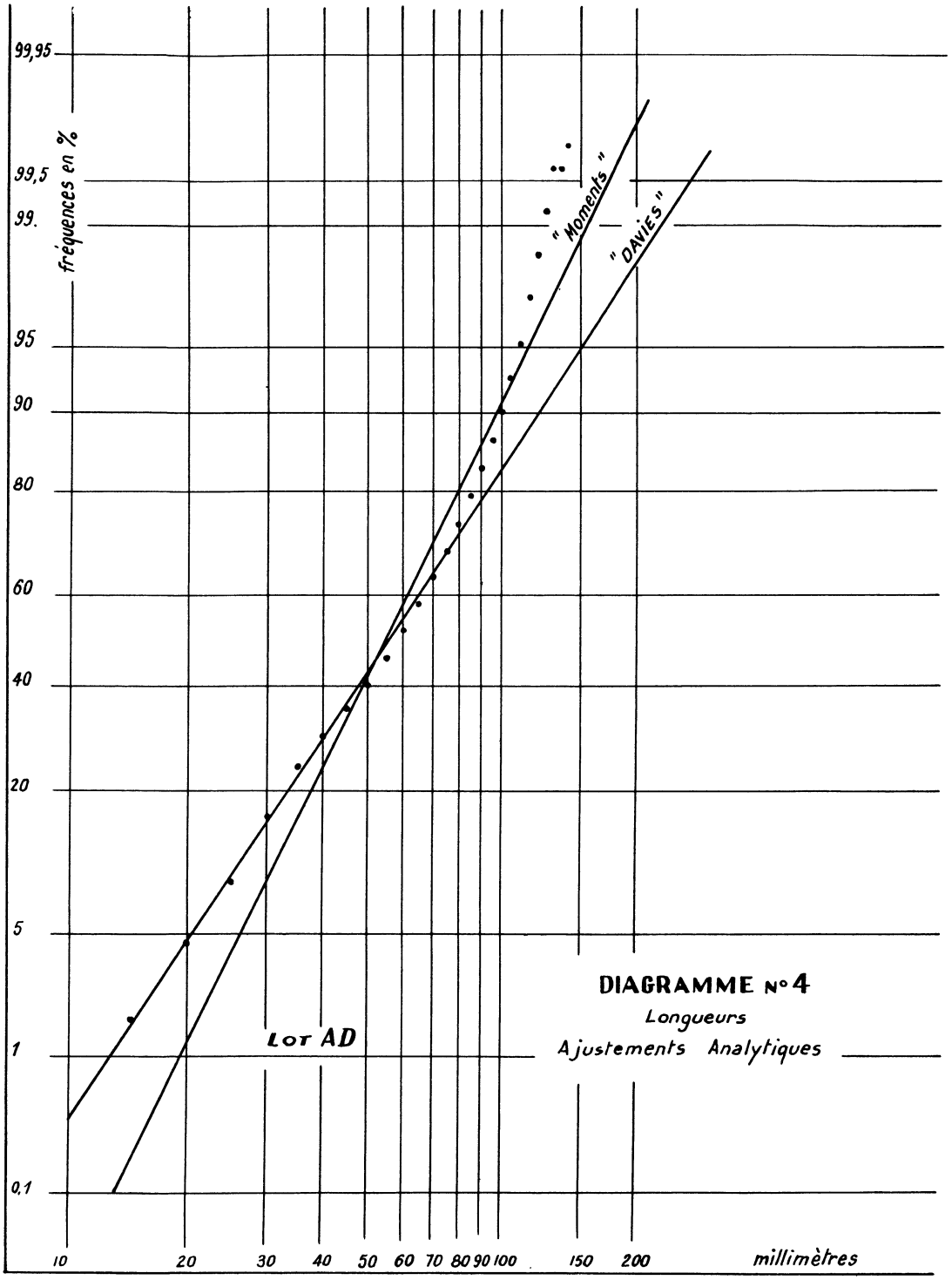


DIAGRAMME N°3
Longueurs
Fréquences cumulées
millimètres
Fréquences en %
LOT AD
LOT GG
LOT EK
75 %
99,9
99
95
90
80
60
40
20
5
1
0,1
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
150
200


99,95
99,5
99.
95
90
80
60
40
20
5
1
0,1
fréquences en %
" Moments "
" DAVIES "
LOT AD
DIAGRAMME N° 4
Longueurs
Ajustements Analytiques
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
150
200
millimètres

$$Sk = \frac{\log Q_1 + \log Q_3 - 2 \log Q_2}{\log Q_3 - \log Q_1} \qquad (7\text{-}3)$$

et cet auteur estime qu'une série pour laquelle Sk < 0,15 (ou peut-être 0,20) pourrait être log-normale. Dans le cas du lot AD, on a :

$$\begin{cases} Q_1 = 35,62 \\ Q_2 = 58,14 \\ Q_3 = 80,87 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log Q_1 = 1,5517 \\ \log Q_2 = 1,7645 \\ \log Q_3 = 1,9078 \end{cases} \qquad (7\text{-}4)$$

et en introduisant ces valeurs en (7-3) on obtient Sk = 0,19, ce qui laisse un doute.

b) On a alors essayé ici aussi le test de χ^2, et on a eu recours aux formules indiquées par Davies pour le calcul de $\overline{x}_{log}$ et σ_{log} (log b et clog e dans les notations habituelles) :

$$\overline{x}_{log} = \frac{\log Q_1 + \log Q_3 + 1,2554 \log Q_2}{3,2554} \qquad (7\text{-}5)$$

$$\sigma_{log} = 0,7413 (\log Q_3 - \log Q_1)$$

Des valeurs (7-4) on tire $\overline{x}_{log} = 1,7431$ et $\sigma_{log} = 0,264$. Les calculs qui en suivent sont reportés à la table 4, et il en résulte $\chi^2 = 67,74$, avec 25 degrés de liberté. Le seuil de probabilité 0,1% conduisant à la valeur $\chi^2 = 52,62$, l'ajustement n'est pas satisfaisant; mais il faut remarquer qu'il est nettement meilleur que celui obtenu par la méthode des moments, ceci étant probablement dû à l'emploi des quartiles, comme on l'avait prévu au 3°) du § 7-1-2.

Il est d'autre part possible d'utiliser les valeurs ci-dessus de $\overline{x}_{log}$ et σ_{log} pour tracer de la manière habituelle la droite correspondant à l'ajustement de Davies (diagramme 4) : on a $\overline{x}_{log} = \log b$, d'où b = 55,35 (premier point : 55,35; 50%), et en posant x = 110,70 on obtient t = log 2/0,264 = 1,14 et F(t) = 87,29%, ce qui fixe un second point. Un simple examen visuel confirme que cette méthode fournit un ajustement qui est très bon jusqu'à la troisième quartile et, bien qu'il devienne insatisfaisant dans la suite, reste meilleur que celui obtenu au moyen des moments de la distribution de l.

c) Davies remarque enfin qu'une distribution asymétrique non log-normale pourrait le devenir en ajoutant aux limites de classe et aux quartiles un coefficient de correction :

$$L = \frac{Q_2^2 - Q_1 Q_3}{Q_1 + Q_3 - 2Q_2} \qquad (7\text{-}6)$$

Dans le cas du lot AD, on aurait L = 499,67/0,21 = 2379,4. Cette valeur extrêmement élevée de L rend tout d'abord illusoire d'essayer un ajustement graphique sur papier gausso-logarithmique, les abscisses devenant trop rapprochées. Quant à la méthode analytique, les quartiles deviennent respectivement : $Q'_1 = 2415,02$; $Q'_2 = 2437,54$; $Q'_3 = 2460,27$, d'où $\overline{x}'_{log} = 3,3869$ et $\sigma'_{log} = 0,006$. Le calcul de χ^2 à partir de ces paramètres ne donne pas un résultat satisfaisant (le χ^2 partiel pour les premières 5 classes est déjà de l'ordre de 60).

Ce qui précède ne signifie pas que la méthode de Davies ne puisse éventuellement être utile pour d'autres cas particuliers (le lot AD possède le diagramme le moins rectiligne parmi ceux qu'on a examiné); mais pour ce fait mê-

me il lui manque une généralité satisfaisante en vue du problème de la distribution des longueurs.

7-4 - CONCLUSION -

7-4-1 - Validité de l'hypothèse log-normale.

1°) Pour le diamètre l'hypothèse log-normale semble convenir avec une approximation très satisfaisante; on pourra de ce fait l'adopter, en gardant pour la distribution théorique les mêmes paramètres qu'on tire de l'analyse statistique de l'échantillon. L'emploi de la méthode de Davies n'est pas nécessaire.

2°) Pour la longueur, l'emploi d'une méthode analytique (des moments ou, de préférence, de Davies) a montré que l'hypothèse log-normale dans sa forme la plus simple n'est en fait pas satisfaisante; on remarquera cependant que les calculs ci-dessus ne valent évidemment que pour l'exemple traité, et que Breny a trouvé pour d'autres lots des valeurs de χ^2 acceptables (réf. 9). En fait, le doute reste, mais l'examen du diagramme 3 semble suggérer que la distribution des longueurs soit bien log-normale, mais qu'elle résulte de 2 distributions séparées (diagrammes en V), ou en d'autres termes que ses paramètres changent à partir d'une certaine valeur de la fonction de distribution (troisième quartile).

7-4-2 - Conséquences.

Si on en revient maintenant au § 4, il semble à première vue que les conclusions partielles qu'on vient de formuler infirment la validité de la relation (4-12). Cependant, il faut remarquer que :

1°) dans la déduction de cette relation (voir formule 3-6), la distribution du diamètre joue un rôle prépondérant.

2°) Comme l'a remarqué Breny (réf. 9), si même admettre une loi log-normale n'est pas correct au point de vue théorique, l'approximation introduite peut probablement suffire lorsque on l'utilise pour des buts d'intégration (calcul des moments), les différences de signe opposé pouvant se compenser. A ce point de vue, l'examen du diagramme 5 (qui correspond au diagramme 4 avec des échelles arithmétiques) est assez indicatif; il en résulte que supposer une distribution log-normale est au moins aussi bon, pour des buts pratiques, qu'adopter une représentation trapézoïdale, comme on le fait souvent.

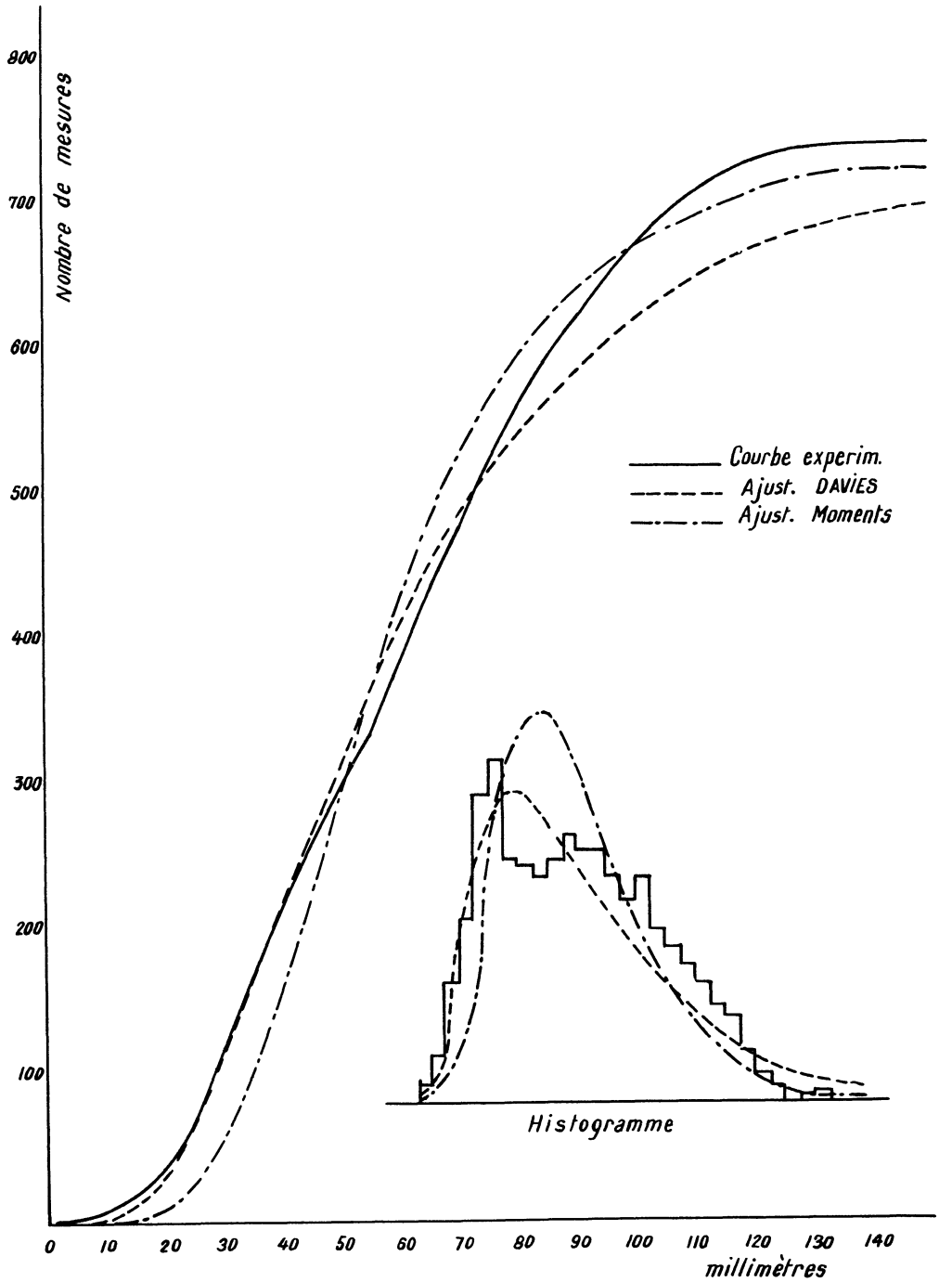
D'une manière générale enfin, il est important de se rendre compte que, alors que le diamètre d'une fibre de laine est en somme une caractéristique physiologique naturelle (ce qui explique la forme de sa distribution, commune à bien d'autres propriétés biométriques), la longueur dépend au contraire beaucoup des traitements que l'homme a fait subir à la matière. Il est donc vraisemblable que le problème général de la corrélation finesse/longueur se subdivise en plusieurs problèmes particuliers, suivant l'état d'avancement de la fabrication industrielle.

Les exemples traités se référant au ruban de peigné (stade auquel la laine a subi l'importante action d'écourtement du battage, du cardage et du peignage), il serait intéressant d'étudier la distribution des longueurs des fibres sur des toisons avant triage. Bien que toute prévision non basée sur des expériences soit dangereuse, il ne serait pas étonnant de trouver à ce stade, qu'on pourrait qualifier de "naturel", une distribution plus proche de la loi log-normale. Comme l'a remarqué Breny (réf. 9), l'emploi de cette hypothèse conduit à une trop faible proportion de fibres très courtes et à une trop forte proportion de fibres fort

DIAGRAMME N°5

LOT AB (Longueurs)

Courbe des fréq. cumulées



longues. Or, ceci pourrait précisément s'expliquer par l'écourtement évoqué ci-dessus.

8. – REMERCIEMENTS

L'auteur remercie M. H. Breny, Dr. Sc., pour l'aide apportée dans la déduction de la relation (2-3), ainsi que pour sa participation à d'utiles échanges de vue. Il remercie aussi la firme Feltzer et Fils de Verviers (Belgique), qui lui a fourni les données analytiques nécessaires au calcul des ajustements.

9. – BIBLIOGRAPHIE

1 - F. MONFORT - Cours de Statistique appliquée aux fibres textiles (Ec. Sup. Text. Verviers -non publié).

2 - A. MOOD - An Introduction to the Theory of Statistics (Mac Graw-Hill. New-York 1950).

3 - H. BRENY - Irregularité de diamètre et irrégularité de section dans les fils et les fibres (Ing. Textile. Verviers 1954).

4 - The measurement of wool fibre ellipticity (Wool Science Review n. 12).

5 - The measurement of wool fibre diameter (Wool Science Review n. 8).

6 - R. HENON - Contribution statistique aux méthodes de classification des finesses de la laine (Journal de la Soc. de Statistique de Paris n. 4-5-6 1952).

7 - R. HENON - Recherche des caractéristiques de finesse d'un peigné théoriquement parfait du point de vue de la régularité de la finesse (Comité Technique de la Féd. Lainière Int. -Rapport n. 8 -Paris, Janvier 1954- non publié).

8 - H. BRENY - Représentation log-normale de la distribution numérique des longueurs des fibres de laine peignée. Application au calcul a priori des courbes variance/longueur (Comité Techn. de la F. L. I. - Rapport n. 12-Londres, Juin 1952 - non publié).

9 - H. BRENY - The calculation of the variance/length curve from the length distribution of fibres-II (Journal of Textile Institute, vol. 44 n. 1-January 1953).

10 - F. L. CROXTON and D. J. COWDEN - Applied General Statistics (Prentico-Hall. New-York 1947).

11 - D. V. LINDLEY and J. C. P. MILLER - Cambridge Elementary Statistical Table -(Cambridge University Press 1953).

ANNEXE

Table 1

Analyse des diamètres - Méth. WIRA "moyenne"

Lim. sup. de classe X_i μ	Lot AD; $\bar{d}$ = 20,82			Lot CG; $\bar{d}$ = 18,95			Lot EK; $\bar{d}$ = 23,57		
	f_i	$\sum_o^i f_i$	$y_i = \frac{\Sigma f_i}{\Sigma f}$ %	f_i	$\sum_o^i f_i$	$y_i = \frac{\Sigma f_i}{\Sigma f}$ %	f_i	$\sum_o^i f_i$	$y_i = \frac{\Sigma f_i}{\Sigma f}$ %
10							1	1	0,08
12	9	9	0,75	23	23	1,92	14	15	1,25
14	30	39	3,25	80	103	8,60	28	43	3,58
16	104	143	11,90	177	280	23,35	63	106	8,84
18	184	327	27,30	237	517	43,15	133	239	19,92
20	245	572	47,70	249	766	63,90	147	386	32,20
22	218	790	65,90	192	958	79,80	147	533	44,50
24	157	947	79,00	129	1087	90,70	157	690	57,50
26	111	1058	88,20	51	1138	94,80	139	829	69,10
28	61	1119	93,20	32	1170	97,50	93	922	76,90
30	38	1157	96,50	19	1189	99,05	95	1017	84,80
32	20	1177	98,10	9	1198	99,83	56	1073	90,10
34	8	1185	98,80	2	1200		48	1121	93,50
36	6	1191	99,25				33	1154	96,20
38	7	1198	99,83				17	1171	97,60
40							15	1186	98,80
42	2	1200					8	1194	99,50
44							2	1196	99,66
46							2	1198	99,83
54							1	1199	99,92
62							1	1200	

Table 2

Analyse des longueurs - Méth. WIRA "modifiée"

Lim.sup. de classes X_i mm.	Lot AD; $\bar{l}$ = 60,13			Lot CG; $\bar{l}$ = 57,78			Lot EK; $\bar{l}$ = 56,42		
	f_i	$\sum_o^i f_i$	$\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f}$ %	f_i	$\sum_o^i f_i$	$\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f}$ %	f_i	$\sum_o^i f_i$	$\frac{\Sigma f_i}{\Sigma f}$ %
10	4	4	0,51	2	2	0,21	1	1	0,12
15	9	13	1,74	7	9	0,95	9	10	1,23
20	21	34	4,56	29	38	4,01	26	36	4,45
25	32	66	8,86	49	87	9,18	56	92	11,35
30	54	120	16,11	61	148	15,61	49	141	17,40
35	59	179	24,03	84	232	24,42	71	212	26,20
40	42	221	29,66	61	293	30,92	73	285	35,20
45	41	262	35,17	63	356	37,52	55	340	42,00
50	39	301	40,40	51	407	43,00	54	394	48,60
55	42	343	46,04	71	478	50,50	52	446	55,10
60	47	390	52,35	61	539	56,80	62	508	62,80
65	44	434	58,25	55	594	62,60	45	553	68,30
70	44	478	64,11	50	644	68,00	33	586	72,40
75	39	517	69,39	42	686	72,40	37	623	77,00
80	35	552	74,09	53	739	77,90	28	651	80,40
85	39	591	79,33	41	780	82,35	22	673	83,10
90	30	621	83,35	41	821	86,70	27	700	86,50
95	27	648	86,98	32	853	89,95	22	722	89,10
100	24	672	90,02	26	879	92,65	18	740	91,30
105	21	693	93,02	23	902	95,20	14	754	93,00
110	17	710	95,32	16	918	96,95	9	763	94,20
115	15	725	97,31	13	931	98,10	8	771	95,20
120	9	734	98,52	10	941	99,20	10	781	96,50
125	5	739	99,19	3	944	99,58	2	783	96,70
130	3	742	99,59	3	947	99,89	8	791	97,70
135	-	742		1	948		4	795	98,20
140	1	743	99,73				5	800	98,90
145	2	745					2	802	99,10
150							2	804	99,45
155							1	805	99,50
160							1	806	99,65
165							1	807	99,80
170									
175							1	808	99,90
180							1	809	

Table 3

Lot AD (longueurs) - Ajustement analytique par la méthode des moments) log b = 1,7365) c = 0,442

X	log X	log X-log b	$t = \frac{\log X - \log b}{c \log e}$	F (t)	ΔF (t)	$f_{th} = 745.\Delta F(t)$		f_{exp}		ft - fe	$(ft - fe)^2$	$\frac{(ft - fe)^2}{ft}$
5	0,6989	- 1,0376	- 5,41	-	-	-				-	-	-
10	1,0000	- 0,7365	- 3,84	0,00006	0,00006	0,45)	2,72	4)	13	10,28	105,68	38,85
15	1761	- 0,5604	- 2,92	00175	0017	1,27)		9)				
20	3010	- 0,4355	- 2,27	0116	0098	7,30		21		13,70	187,69	25,71
25	3979	- 0,3386	- 1,77	0384	0268	19,97		32		12,03	144,72	7,25
30	4771	- 0,2594	- 1,35	0855	0501	37,32		54		16,68	278,22	7,45
35	5441	- 0,1924	- 1,00	1587	0702	52,30		59		6,70	44,89	0,86
40	6021	- 0,1344	- 0,70	2420	0833	62,06		42		20,06	402,40	6,48
45	6532	- 0,0833	- 0,43	3336	0916	68,24		41		27,24	742,02	10,87
50	6990	- 0,0375	- 0,20	4207	0871	64,89		39		25,89	670,29	10,33
55	7404	+ 0,0039	+ 0,02	5080	0873	65,04		42		23,04	530,84	8,16
60	7781	0416	0,22	5871	0791	58,93		47		11,93	142,32	2,42
65	8130	0765	0,40	6554	0683	50,88		44		6,88	47,33	0,93
70	8451	1086	0,57	7157	0603	44,92		44		0,92	0,85	0,02
75	8751	1386	0,72	7642	0485	36,13		39		2,87	8,24	0,23
80	9031	1666	0,87	8078	0436	32,48		35		2,52	6,35	0,20
85	9294	1929	1,01	8438	0360	26,82		39		12,18	148,35	5,53
90	9542	2177	1,13	8708	0270	20,12		30		9,88	97,61	4,85
95	9777	2412	1,26	8962	0254	18,92		27		8,08	65,29	3,45
100	2,0000	2635	1,37	9147	0185	13,78		24		10,22	104,45	7,58
105	0212	2847	1,48	9306	0159	11,85		21		9,15	83,72	7,06
110	0414	3049	1,59	9441	0135	10,06		17		6,94	48,16	4,79
115	0607	3242	1,69	9545	0104	7,75		15		7,25	52,56	6,78
120	0792	3427	1,77	9616	0071	5,29		9		3,71	13,76	2,60
125	0969	3604	1,88	9699	0083	6,18		5		1,18	1,39	0,22
130	1134	3769	1,96	9750	0051	3,80)		3)				
135	1303	3938	2,05	9798	0048	3,58)	12,6	0)	6	6,60	43,56	3,46
140	1461	4096	2,14	9838	0040	2,98)		1)				
145	1614	4249	2,22	9868	0030	2,24)		2)				
											χ^2 =	166,08

Table 4

Lot AD (longueurs) - Ajustement analytique par la méthode de Davies) $\bar{x}$ log = 1,7431) σ log = 0,264

X	log X	log X-$\bar{x}$ log	$t = \frac{\log X - \bar{X} \log}{\sigma \log}$	F(t)	ΔF(t)	f_{tn} = 745° ΔF (t)		f_{exp}		ft - fe	$(ft - fe)^2$	$\frac{(ft - fe)^2}{ft}$
5	0,6989	- 1,0442	- 3,95	0,00006	0,00006	0,04)	1,84	0)	4	2,16	4,67	2,53
10	1,0000	- 0,7431	- 2,81	00248	00242	1,80)		4)				
15	1761	- 0,5670	- 2,15	01578	0133	9,91		9		0,91	0,83	0,08
20	3010	- 0,4421	- 1,67	0475	0317	23,62		21		2,62	6,86	0,29
25	3979	- 0,3452	- 1,30	0968	0493	36,73		32		4,73	22,37	0,60
30	4771	- 0,2660	- 1,01	1562	0594	44,25		54		9,75	95,06	2,14
35	5441	- 0,1990	- 0,75	2266	0704	52,45		59		6,55	42,90	0,81
40	6021	- 0,1410	- 0,53	2981	0715	53,27		42		11,27	127,01	2,38
45	6532	- 0,0899	- 0,34	3669	0688	51,26		41		10,26	105,27	2,05
50	6990	- 0,0411	- 0,17	4325	0656	48,87		39		9,87	97,42	1,95
55	7404	- 0,0027	- 0,01	4959	0634	47,23		42		5,23	27,35	0,58
60	7781	+ 0,0350	+ 0,13	5517	0558	41,57		47		5,43	29,48	0,70
65	8130	0699	0,26	6026	0509	37,92		44		6,08	36,97	0,97
70	8451	1020	0,39	6517	0491	36,58		44		7,42	55,06	1,50
75	8751	1320	0,50	6915	0398	29,65		39		9,35	87,42	2,95
80	9031	1600	0,61	7291	0376	28,01		35		6,99	48,86	1,74
85	9294	1863	0,71	7611	0320	23,84		39		15,16	229,83	9,64
90	9542	2111	0,80	7881	0270	20,11		30		9,89	97.81	4,86
95	9777	2346	0,89	8133	0252	18,77		27		8,23	67,73	3,60
100	2,0000	2569	0,97	8340	0207	15,42		24		8,58	73,62	4,77
105	0212	2781	1,05	8531	0191	14,23		21		6,77	45,83	3,22
110	0414	2983	1,13	8708	0177	13,19		17		3,81	14,52	1,10
115	0607	3176	1,20	8849	0141	10,50		15		4,50	20,25	1,93
120	0792	3361	1,27	8980	0131	9,76		9		0,76	0,58	0,06
125	0969	3538	1,34	9099	0119	9,87		5		3,87	14,98	1,68
130	1134	3703	1,40	9192	0093	6,93		3		3,93	15,44	2,22
135	1303	3872	1,46	9279	0087	6,48		0		6,48	41,99	6,48
140	1461	4030	1,52	9357	0078	5,81		1		4,81	23,14	4,81
145	1614	4183	1,58	9429	0072	5,36		2		3,36	11,29	2,10
											χ^2 = 67,74	