REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. LESAVRE

Un exemple de régression linéaire : étude de la variation de la viscosité d'un verre en fonction de la température

Revue de statistique appliquée, tome 6, nº 3 (1958), p. 23-40

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1958__6_3_23_0>

© Société française de statistique, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UN EXEMPLE DE RÉGRESSION LINÉAIRE : Etude de la variation de la viscosité d'un verre en fonction de la température -1-

J. LESAVRE
Ancien élève de l'Ecole Polytechnique
Ingénieur de Recherches à la Compagnie de Saint-Gobain, Chauny et Cirey

RESUME

La régression, et particulièrement la régression linéaire, est une technique simple, bien connue des statisticiens : elle permet d'ajuster une droite de régression à un ensemble de données expérimentales plus ou moins dispersées. Ici nous l'appliquerons à un problème concret : variation de la viscosité d'un verre de formule courante (verre plat étiré) en fonction de la température.

Chacun sait qu'un problème de ce genre impose pratiquement les deux variables suivantes :

1) - logarithme de la viscosité,

2) - inverse de la température absolue.

En effet dans un certain intervalle, assez étroit, de température on peut admettre une relation linéaire entre ces deux grandeurs.

Dans un intervalle de température plus étendu, certaines données expérimentales conduisaient à première vue à 3 relations linéaires différentes, déterminant 3 zones de température, séparées par 2 températures de transformation, environ +900°C et +1.090°C.

Ce point de vue était assez nouveau pour légitimer une étude critique poussée du sens à donner aux valeurs expérimentales. Aussi a-t-il été demandé au statisticien si les données numériques utilisées justifiaient bien l'existence de ces 2 températures de transition.

Les 3 droites, tracées à vue, peuvent recevoir une expression analytique rigoureuse : ce sont en effet 3 cas classiques de régression linéaire. Puis nous avons fait le calcul de toutes les différences entre valeur expérimentale et valeur calculée. L'examen attentif de ces différences montre qu'elles ne sont pas distribuées au hasard; au contraire le tracé d'une seule courbe s'impose.

Mais, par un changement de variables, dû à Monsieur WATERMAN (Delft, Hollande), en prenant 1/T à une certaine puissance (ici 2,39), il est tout de même possible d'avoir encore une régression linéaire. Cependant les mesures aux températures les plus faibles, viscosités les plus fortes, s'écartent quelque peu de la loi linéaire trouvée expérimentalement.

L'article se termine par quelques considérations sur la précision des mesures de viscosité faites en rotation uniforme ou par retour apériodique, et sur les légères différences qu'on a pu constater entre les 3 échantillons de verre examinés.

INTRODUCTION -

Tout d'abord une première remarque s'impose : tous les physiciens savent que ce type de problème est assez complexe, et que les variables qui permettent la description du phénomène ne sont ni la viscosité (η) ni la température (en °C), mais

1/ le logarithme (décimal) de la viscosité, ($\log \eta$),

2/ l'inverse de la température absolue (1/T)

Il y a de bonnes raisons théoriques qui permettent de penser que le logarithme de la viscosité varie linéairement avec l'inverse de la température absolue. Cela semble se vérifier au moins dans de petits domaines de température. Mais si l'on porte le log. de la viscosité en fonction de 1/T on s'aperçoit bien vite que dans un grand intervalle de températures (+775°C à +1.250°C) la régression ne saurait être unique et linéaire. Pour remédier à cet inconvénient et chercher à conserver cette linéarité, on fait passer par l'ensemble des points expérimentaux 3 segments de droite qui déterminent 3 zones distinctes de température et 2 températures de transformation, environ +900°C et +1.090°C.

L'existence de ces températures de transition aurait des conséquences de grande importance théorique, mais justement ce point de vue est loin d'être général. Il s'agit donc de savoir si les données numériques expérimentales justifient bien l'existence de ces 2 températures de transition.

DONNEES NUMERIQUES DE BASE -

Ces données sont rassemblées dans le tableau I. Il y a donc 3 groupes d'essais, concernant chacun un échantillon de verre. Pour chacun de ces 3 essais nous donnons la température absolue, la quantité 1.000/T, plus commode que 1/T, et le logarithme de la viscosité du verre.

Des lignes horizontales divisent ce tableau en trois parties, correspondant aux trois segments de droite tracés à vue. Le segment A comprend les viscosités faibles correspondant à des températures élevées supérieures à +1.090°C; le segment B comprend les viscosités moyennes correspondant à des températures comprises entre +1.090°C et +900°C; enfin le segment C comprend les viscosités fortes correspondant à des températures inférieures à +900°C.

---

(1) Communication présentée aux Journées d'Etude et de Discussion au Centre de Formation (Juillet 1957).

Tableau n°1

	1er essai			2ème essai			3ème essai		
	T	1000/T	log η	T	1000/T	log η	T	1000/T	log η
A (22)	1523	0,65659	2,745	1491	0,67069	2,890	1468	0,68119	3,000
	1519	65832	2,755	1489,5	67136	2,895	1467	68166	3,000
	1435	69686	3,160	1467	68166	3,005	1441	69396	3,120
	1432	69832	3,175	1468	68119	2,995	1443	69300	3,115
	1371	72939	3,510	1140	69444	3,135	1427	70077	3,200
	1373	72833	3,500	1440	69444	3,135	1423	70274	3,210
				1389,5	71968	3,405	1388,5	72020	3,405
				1389	71994	3,405	1389	71994	3,405
B (28)	1312	0,76219	3,920	1335,5	0,74878	3,740	1347	0,74239	3,660
	1310	76335	3,930	1336,5	74822	3,725	1344,5	74377	3,685
	1279	78186	4,155	1283	77942	4,105	1297	77101	3,995
	1239	80710	4,465	1281,5	78033	4,125	1294	77279	4,010
	1241	80580	4,450	1232	81168	4,540	1288	77639	4,070
	1211,5	82542	4,700	1234	81037	4,515	1336,5	74822	3,710
	1217	82169	4,660	1208	82781	4,730	1238	80775	4,470
	1191	83963	4,900	1210	82644	4,695	1238,5	86718	4,460
	1191	83963	4,890				1206	82918	4,750
							1197	83542	4,825
							1185	84388	4,960
C (22)	1155	0,86580	5,230	1169	0,85543	5,110	1159	0,86281	5,195
	1137,5	87912	5,450	1147	87183	5,335	1159	86281	5,200
	1136,5	87989	5,465	1149	87032	5,330	1125	88888	5,595
	1112,5	89887	5,755	1100	90909	5,930	1125,5	88849	5,585
	1114,5	89726	5,720	1102	90744	5,895	1085	92165	6,100
	1091,5	91617	6,035	1069	93545	6,365	1083	92336	6,145
	1090,5	91701	6,025	1070	93457	6,340			
	1048	95419	6,660						
	1048	95419	6,655						
		26			23			23	

Soit un total de : 72 mesures.

Les trois droites tracées à vue peuvent recevoir chacune leur expression analytique rigoureuse. Le calcul a été indiqué précédemment : on commence par calculer le barycentre des points expérimentaux ($\bar{x}$, $\bar{y}$), puis on calcule le coefficient b de regression linéaire et enfin l'équation de la droite $y - \bar{y} = b\,(x - \bar{x})$.

Nous prenons comme unité des abscisses non pas 1/T, mais 1000/T qui est plus commode.

Droite A : $y = 10{,}521\,385\,06\ x - 4{,}170\,733$

Droite B : $y = 12{,}688\,595\,90\ x - 5{,}770\,786$

Droite C : $y = 15{,}845\,310\,30\ x - 8{,}478\,730$

Pour nous rendre compte si le tracé de ces droites est justifié, nous avons calculé toutes les différences entre la valeur expérimentale et la valeur obtenue par la droite de regression. La différence est positive si la valeur expérimentale surpasse la valeur calculée, elle est négative dans le cas contraire.

Le tableau de ces différences est donné au tableau II. Le long de chaque droite nous avons rangé les différences par températures décroissantes (1000/T et log η vont en croissant).

Tableau n°II

Droite A		Droite B		Droite C	
+0,008		+0,011		+0,035	
-0,001		+ 19		+ 6	
+ 4	+0,002.4	- 13	+0,005.8	+ 7	+0,011.0
+ 2		+ 2		-0,010	
- 1	+ 2.6	+ 10	+ 6.8	+ 18	+ 3.2
+ 4		+ 20		- 1	
+ 4	0,000.0	+ 15	+ 0.8	- 1	+ 2.8
- 1		- 17		+ 2	
- 6	- 3.0	- 24	- 9.8	-0,014	- 6.6
-0,011		- 10		- 10	
- 1	- 4.0	- 13	- 9.2	- 19	- 9.4
- 1		-0,005		- 9	
- 1	- 1.2	+ 6	- 4.0	- 5	- 6.0
- 1		- 3		+ 4	
- 2	- 2.6	- 5	- 4.8	- 3	-0,010.8
- 13		- 14		-0,027	
+0,004	- 1.8	- 8	- 2.2	- 25	- 10.0
+ 1		+ 4		- 7	
+ 1	+ 2.4	+ 12	+ 2.2	+ 11	+ 4.2
- 2		+ 5		+ 22	
+ 8	+0,004.2	- 2	- 1.6	+ 20	+0,020,6
+0,007		-0,020		+ 15	
		- 3	- 5.8		
		0,000			
		- 4	+ 3.8		
		+ 18			
		+ 8	+0,011,2		
		+ 23			
+0,042		+0,153		+0,140	
-0,041		-0,141		0,131	

2,7 2,9 3,1 3,3 3,5 3,7 3,8 4,1 4,3 4,5 4,7 4,9 5,1 5,3 5,5 5,7 5,9 6,1
1250
1200
1150
1100
1050
1000
950
900
850
800 C°
Mesure de Viscosité
1° Interpretation

Fig. 1

Fig. 2

Les colonnes de gauche indiquent les différences, les colonnes de droite indiquent la moyenne mobile basée sur 5 chiffres et faites de 2 en 2 seulement. Cette façon de faire indique clairement que les chiffres expérimentaux ne sont pas rangés au hasard de part et d'autre de la droite optimum calculée : il y a du "creux" au milieu de chaque segment de droite. Cette disposition est particulièrement sensible pour les éléments A et C, et encore très nette pour le segment B. Un schéma annexe met du reste cette courbure restante en évidence.

Il faut donc bien avouer maintenant l'échec de cette tentative : les données expérimentales ne justifient pas le tracé de 3 segments de droite, mais bien le tracé d'une courbe dont la concavité est tournée vers le haut.

Est-il tout de même possible d'avoir une regression linéaire ?

PREMIERE TENTATIVE DE REGRESSION LINEAIRE -

Pour cela il faudrait faire un changement de variable sur l'axe des abscisses. Au lieu de porter en abscisse la quantité 1/T nous allons à la suite de M. WATERMAN (Delft) prendre la quantité $1/T^x$; x est un exposant numérique que l'on va déterminer par approximation.

Pour cela cherchons le coefficient qui permettra d'aligner les barycentres des points formant les segments de droite A, B et C, ce groupage en valant un autre. Rappelons les coordonnées de ces 3 barycentres :

Droite A : $\bar{x}$ = 0,695 212 $\bar{y}$ = 3,143 86

Droite B : $\bar{x}$ = 0,794 926 $\bar{y}$ = 4,315 71

Droite C : $\bar{x}$ = 0,899 756 $\bar{y}$ = 5,778 81

L'exposant x de Waterman qui permet l'alignement de ces 3 points est 2,34. Notez bien que c'est 2,34 et non 2,33 ou 2,35.

La transformation des abscisses nous a permis de tracer un nouveau graphique qui nous a paru assez satisfaisant au premier abord : les points expérimentaux s'alignaient bien, sauf ceux obtenus pour les températures les plus basses.

Nous avons alors décidé de calculer les équations des 3 droites correspondant aux 3 essais sur le verre plat étiré. Dans le nouveau système de coordonnées les équations de ces droites sont les suivantes :

1ère droite : y = 7,796.725.2 (x) - 0,043.551.178

2ème droite : y = 7,813.400.7 (x) - 0,050.272.561

3ème droite : y = 7,761.388.7 (x) - 0,031.902.470

Comme on le voit, les pentes des 3 droites et leurs ordonnées à l'origine sont équivalentes. On peut donc établir l'équation d'une droite moyenne, ce qui veut dire en d'autres termes qu'il n'y aurait pas de différences significatives entre ces 3 essais faits sur 3 échantillons de verre plat étiré. Nous verrons plus loin ce qu'il faut au juste penser de cette question.

On arrive ainsi à l'équation de la droite moyenne :

Droite moyenne : y = 7,790.504.9 (x) - 0,041.908.736

Comme nous l'avons déjà fait pour les segments de droite A, B et C, nous

+45
+40
+35
+30
+25
+20
+15
+10
+5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
Graphique des 72 Différences
avec la droite de régression
1°tentative
D'aprés tableau III

Fig. 3

avons calculé toutes les différences entre les valeurs expérimentales et les valeurs obtenues par cette droite de régression moyenne.

Le tableau de ces 72 différences est donné au tableau III.

Tableau n°III (première régression)

Tableau de toutes les différences rangées par température décroissante exprimées en millième d'unité logarithmique

1ere	+ 7	+8	- 1	-18	+16	-11	-11	+30	71ème
2ème	0	+7	- 3	- 3	+ 3	-30	0	+35	72ème
3ème	+10	+7	- 3	- 5	- 7	-26	+10		
.....	+ 9	+3	+ 5	+ 3	-26	-38	+19		
.....	+ 7	+4	- 7	+14	- 9	- 3	+15		
	+12	-7	-22	+ 3	- 8	-20	- 8		
	+ 7	+1	+ 2	+ 1	-17	-12	- 5		
	+12	-1	+21	- 8	-13	- 8	+13		
	+ 3	-2	+17	- 2	- 3	-15	+32		
	- 2	-5	-11	+ 8	+ 1	-10	+43		
Moyenne	+6,5	+1,5	-0,2	-0,7	-6,3	-17,3	+10,8		

Les différences sont rangées par températures décroissantes (1000/T et log η vont en croissant). On voit tout de suite que là encore nous aboutissons à une impasse : la droite de régression ne convient pas. Du début, presque jusqu'à la fin, les différences passent du positif au négatif avec régularité pour redevenir brusquement positives à l'extrême fin de la droite, du côté des températures faibles. Les différences ne sont donc pas distribuées au hasard de part et d'autre de cette droite moyenne de regression; il faut donc l'abandonner.

Toutefois ces calculs n'ont pas été inutiles, ils mettent en évidence une discontinuité dans le phénomène analysé. D'une façon, hélas arbitraire, nous estimons qu'il faudrait placer cette discontinuité vers +848°C.

DEUXIEME TENTATIVE DE REGRESSION LINEAIRE -

L'existence de cette discontinuité nous interdit l'espoir de trouver une regression linéaire pour l'ensemble des 72 valeurs de viscosité : aussi allons-nous maintenant laisser de côté les douze mesures de viscosité faites à des températures inférieures à +848°C, et nous allons chercher un nouveau changement de variable permettant d'établir une regression linéaire pour les 60 mesures faites à des températures supérieures à +848°C (+1121°K).

Comme précédemment, en alignant 3 points obtenus par groupage on obtient un nouveau coefficient x de Waterman égal à 2,39. Un graphique nous a montré que les points expérimentaux s'alignaient remarquablement bien. Nous avons alors calculé les équations des 3 droites correspondant aux 3 essais sur le verre plat étiré. Dans le nouveau système de coordonnées (puissance 2,39) les équations de ces droites sont les suivantes:

1ère droite (18 points) : $y = 10,826\,238\,(x) + 0,074\,289$

2ème droite 19 points) : $y = 10,821\,183\,(x) + 0,073\,883$

3ème droite (23 points) : $y = 10,809\,880\,(x) + 0,072\,550$

2,7 2,9 3,1 3,3 3,5 3,7 3,9 4,1 4,3 4,5 4,7 4,9 5,1 5,3 5,5 5,7 5,9 6,1
1250
1200
1150
1100
1050
1000
950
900
850
800
C°
Mesure de Viscosité
2° Interpretation
(Methode Waterman) $\log\eta = f(\frac{1}{T^{2,39}})$

Fig. 4

Ces trois droites se fondent, semble-t-il, en une droite moyenne d'équation y = 10,819 100 (x) + 0,0073 574.

Nous avons calculé toutes les différences entre valeurs expérimentales et valeurs obtenues à partir de la droite de regression moyenne.

Le tableau de ces 60 différences est donné au tableau n°IV. A la suite de ces différences nous avons également calculé les 12 différences pour les mesures que nous avions négligées. Il se trouve que ces différences sont toutes positives, ce qui confirme bien notre façon de voir : il y a là une discontinuité. La moyenne mobile sur 5 chiffres consécutifs indique que les écarts sont à première vue statistiquement répartis autour de la droite de régression, sauf justement du côté des températures les plus faibles.

Quelle est la cause de cet écart? Nous ne sommes guère en mesure de le dire voulant rester dans notre rôle de statisticien. Toutefois si l'on se reporte aux documents originaux (non figurés ici) nous pouvons croire que ce léger écart serait dû, sans doute, à l'emploi d'un fil de torsion assez gros et présentant un léger hystérésis.

Maintenant que nous sommes en possession de tous les écarts, il est possible de chercher à vérifier l'hypothèse faite sur la normalité des distributions liées. Pour cela nous avons cherché à tracer une droite de Henry (avec les 60 différences). Cela n'est absolument pas possible : la distribution empirique est bien symétrique, mais elle est beaucoup plus "pointue" que la normale. A partir des valeurs centrales on a un écart-type sui serait de l'ordre de 5 (c'est-à-dire en fait 0,005 sur le logarithme) et de l'ordre de 15, en se basant sur les valeurs extrêmes (voir tableau IV bis).

Un tel type de distribution ne nous surprend pas : il serait en effet plutôt extraordinaire que la précision de la mesure de la viscosité du verre soit constante dans tout l'intervalle en question qui atteint 400°C. Nous allons donc fractionner cet intervalle et étudier la variation de cette précision en fonction de la température. Une méthode très simple, dérivée de l'analyse de variance, va nous permettre la résolution de cette question.

Tableau n°IV (deuxième régression)

Tableau de toutes les différences 60 + 12 rangées par température décroissante exprimées en millième d'unité logarithmique

- 5	+ 2	- 2	-14	+24	0	+ 5	+42
-11	+ 2	- 4	+ 2	+12	-19	+12	+47
+ 1	+ 1	- 3	0	+ 2	-14	+22	
- 1	+ 1	+ 7	+ 8	-16	-27	+32	
- 1	0	- 5	+19	0	+ 8	+28	
-3,4	+1,2	-1,4	+3,0	+4,4	-10,4	+19,8	
+ 4	-11	-20	+10	+ 2	- 9	+ 5	
0	- 1	+ 3	+ 9	- 8	0	+ 8	
+ 5	- 3	+24	0	0	+ 4	+26	
- 3	- 4	+20	+ 5	+10	- 2	+44	
- 8	- 7	- 7	+ 6	+11	+ 2	+55	
-0,2	-5,2	+4,0	+6,0	+3,0	-1,0	+27,6	

Pour les 60 premières différences

Somme des 27 positives : +204

Somme des 25 négatives : -205

avec 8 nulles

Tableau n° IV bis

Tableau des 60 différences rangées pour l'établissement d'une droite de Henry

Cas d'un mélange de deux populations de même moyenne, mais d'écart-type différent.

-27		-4		0		+ 5	
-20	-22,0	-4	-3,6	0	0,0	+ 5	+ 5,3
-19		-3		0		+ 6	
-16		-3		+1		+ 7	
-14	-14,6	-3	-2,6	+1	+1,0	+ 8	+ 7,6
-14		-2		+1		+ 8	
-11		-2		+2		+ 9	
-11	-10,3	-1	-1,3	+2	+2,0	+10	+ 9,6
- 9		-1		+2		+10	
- 8		-1		+2		+11	
- 8	- 7,6	0	-0,3	+2	+2,0	+12	+14,0
- 7		0		+2		+19	
- 7		0		+3		+20	
- 5	-5,6	0	0,0	+4	+3,6	+24	+22,6
- 5		0		+4		+24	

PRECISION DE LA MESURE DE LA VISCOSITE DU VERRE EN FONCTION DE LA TEMPERATURE -

Arbitrairement, nous allons découper les 60 différences en 10 groupes de 6 et, dans chaque colonne, c'est-à-dire dans chaque groupe de 6, nous allons calculer l'écart-type (voir le tableau n°V qui est en même temps un tableau de calcul).

On peut donc constater que l'écart-type varie sensiblement, comme l'indiquait déjà la droite de Henry, de 4,58 à 17,21. Si nous avions eu le moindre doute un test de Snedecor (F) nous aurait renseigné, mais ici ce n'est vraiment pas nécessaire.

On peut dire en gros que pour les 24 premières mesures l'écart-type s'élève à :

4,80 (c'est-à-dire 0,00480)

tandis que pour les 36 mesures qui suivent l'écart-type s'élève à :

11,96 (c'est-à-dire 0,01196)

Tableau n°V

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	- 5	0	+ 1	- 4	- 5	-14	+ 9	+ 2	+10	+8
	-11	+5	+ 1	- 7	-20	+ 2	0	-16	+11	-9
	+ 1	-3	0	- 2	+ 3	0	+ 5	0	0	0
	- 1	-8	-11	- 4	+24	+ 8	+ 6	+ 2	-19	+4
	- 1	+2	- 1	- 3	+20	+19	+24	- 8	-14	-2
	+ 4	+2	- 3	+ 7	- 7	+10	+12	0	-27	+2
X =	-13	-2	-13	-13	+15	+25	+56	-20	-39	+3
$X^2/_6$ =	28,166	0,666	28,166	28,166	37,500	104,166	522,666	66,666	25,350	1,500
Σx_i^2	165	106	133	143	1459	725	862	328	1507	169
$5 S^2$	136,8	105,4	104,8	114,8	1421,5	620,8	339,3	261,3	1481,6	167,5
S^2 =	27,36	21,08	20,96	22,96	284,3	124,2	67,86	52,26	296,3	33,50
S =	5,23	4,59	4,58	4,79	16,86	11,14	8,24	7,23	17,21	5,79

Droite de Henry sur 60 valeurs du tableau IV bis groupées par 3

Fig. 5

Ces 24 premières mesures qui sont plus précises correspondent à peu près aux mesures qui ont servi à établir le segment de droite (A), il y en avait en effet 22. C'est donc vers +1065°C que la précision des mesures change subitement, si l'on se reporte au document original; on voit que cela correspond aux dernières mesures faites en rotation uniforme.

Donc en rotation uniforme le logarithme de la viscosité est connu avec un écart-type de 0,005. Qu'est-ce que cela veut dire? Que la viscosité est connue avec un coefficient de variation de 1,1%, qui nous parait plus qu'honorable pour une mesure physique.

Les dernières mesures faites en rotation uniforme et les mesures faites par retour apériodique donnent pour la détermination de la viscosité un coefficient de variation de 2,8%, ce qui est encore bon.

Enfin, il reste une dernière question qui a été escamotée : a-t-on vraiment le droit d'établir une droite de régression, moyenne des 3 droites établies chacune pour un échantillon de verre plat étiré ?

NON-IDENTITE DES ECHANTILLONS DE VERRE PLAT ETIRE -

Maintenant que nous sommes en possession de toutes les différences entre les valeurs expérimentales et les valeurs estimées à partir de la droite de regression moyenne, nous pouvons classer ces différences en trois groupes correspondant aux 3 verres examinés. (Tableau n°VI ci-après).

Ce tableau VI met en évidence des différences assez nettes entre les 3 échantillons de verre. Il est toutefois assez difficile de conclure de manière indubitable, par exemple, par un test de Student, car on ne sait pas au juste quel écart-type choisir. Il y en a au moins deux.

De toutes façons il semble pourtant raisonnable d'admettre qu'il y a une légère différence entre les 3 verres : ils ont pratiquement le même comportement en fonction de la température, ce qui est remarquable dans une gamme de températures aussi large ,mais le premier essai est toujours un peu plus visqueux que le second, et le troisième un peu moins visqueux que le second. Il y a une différence d'environ 0,5% entre premier et deuxième et d'environ 1,1% entre le deuxième et le troisième. C'est peu, mais nous croyons préférable de le signaler.

En fait, cela remet en question la précision des mesures de viscosité. En réutilisant les données numériques du tableau VI, et par la méthode de la droite de Henry, nous obtenons six déterminations de l'écart-type attribuable à la dispersion de la mesure de la viscosité : 3 déterminations pour la rotation uniforme, et 3 autres pour le retour apériodique.

Pratiquement en rotation uniforme on aboutit à la même valeur de la dispersion : C.V. sur la viscosité = 1,1%. Par retour apériodique on aboutit à une valeur légèrement plus faible de la dispersion : le C.V. s'abaisserait à 2,4% (au lieu de 2,8%).

Tableau VI

1er	2 ème	3 ème
- 5	+ 1	+ 4
-11	- 1	0
+ 1	- 1	- 3
+ 1	+ 5	- 8
- 2	+ 2	0
- 4	+ 2	-11
	- 1	- 3
+24	- 4	- 7
+20		- 3
+19	- 5	+ 7
+10	+ 3	
+ 9	0	-20
+12	+ 8	- 7
+ 2	+ 6	-14
0	+24	+ 2
+10	-16	0
-27	0	+ 5
0	0	+ 2
+ 4	+ 8	- 8
	- 9	+11
		-19
		-14
		- 2
		+ 2
+63/18	+22/19	-86/23
+ 3,50	+ 1,16	- 3,74

en rotation uniforme

écart-type des mesures par droite de Henry :

±4,75, ±3,00, ±6,00

d'où écart-type moyen

de ±4,74

par retour apériodique

écart-type des mesures par droite de Henry :

±10,25, ±9,50, ±11,00

d'où écart-type moyen

de ±10,27

Comme on le voit les différences sont bien peu sensibles.

De même l'existence de ces deux types de dispersion nous interdit en principe d'établir une droite de régression unique pour l'ensemble des mesures. Il faudrait en toute rigueur calculer maintenant une droite de régression pour les mesures précises (celles obtenues en rotation uniforme à l'exception des viscosités obtenues par cette méthode au-dessous de +1065°C) et une droite de régression pour les autres mesures (obtenues en général par retour apériodique).

Ceci est le point de vue du statisticien, mais nous voudrions éviter de tomber dans le byzantinisme. Nous pensons que l'ingénieur peut se contenter de la droite moyenne précédemment établie avec l'exposant de Waterman 2,39; de toutes façons elle différerait très peu des deux segments de droites qu'on serait amené à calculer, eux-même pratiquement confondus.

CONCLUSION -

Tout au long de cette étude nous avons un peu perdu de vue notre idée directrice : il s'agissait avant tout de donner un exemple de regression linéaire. Nous avons pu le faire, grâce à la méthode de Waterman (ici exposant 2,39) et en négligeant les 12 dernières mesures (sur 72).

La légitimité de ce calcul des 3 droites de régression (une pour chaque type de verre plat) est rendue douteuse par le fait que la dispersion liée n'est pas unique. Les mesures de viscosité par retour apériodique ont un coefficient de variation de 2,4%, et les mesures en rotation uniforme ont un C. V. de 1,1%.

La légitimité de l'établissement d'une droite moyenne de régression pour les 3 types de verre étudié est assez douteuse. Les 3 verres semblent se classer ainsi: 1er, 2ème et 3ème, par viscosité décroissante. Mais leur comportement d'ensemble est le même avec la température.

Enfin l'existence d'une discontinuité, vers +850°C, est également douteuse : on peut aussi bien l'attribuer à l'appareillage utilisé.

Nous espérons cependant que toutes ces réserves ne vous feront pas perdre de vue les avantages, bien réels pour le praticien, apportés par l'emploi conjugué de la méthode de Waterman et de la régression linéaire.

NOTE COMPLEMENTAIRE -

Le texte ci-dessus donne l'état de la question en Juillet 1957. Mais depuis nous avons eu en mains de nouveaux résultats numériques en provenance d'un autre laboratoire. Une nouvelle communication a pu être faite sur ce sujet, le 2 Décembre 1957, au cours de la Journée de Conférences Techniques de l'Union Scientifique Continentale du Verre, tenue à la Société Française de Céramique, 44, rue Copernic, Paris.

En voici les conclusions :

1/ Il est impossible de représenter correctement la viscosité d'un verre en utilisant un nombre limité de relations linéaires entre le logarithme de la viscosité et l'inverse de la température absolue.

2/ Il est impossible de trouver une formule unique pour représenter la viscosité d'un verre, si cette viscosité résulte de l'application de deux méthodes différentes, même si elles utilisent le même appareillage. Il faut donc absolument distinguer les mesures faites en rotation uniforme et les mesures faites par retour inverse. La raison de ce fait provient sans doute de ce que les verres ne sont pas des liquides newtoniens.

3/ La précision des mesures est excellente. Elle semble avoir été sous-estimée. On peut atteindre en rotation uniforme un écart-type de 0,001 sur le logarithme décimal de la viscosité, soit 0,23% sur la viscosité elle-même. Par retour inverse on arrive à une précision légèrement inférieure.

4/ Cette précision n'est pourtant pas encore suffisante pour justifier l'une plutôt que l'autre des 3 formules représentatives suivantes :

a) Formule de FULCHER : le logarithme de la viscosité est une fonction du type hyperbole de la température absolue.

b) Formule de WATERMAN : le logarithme de la viscosité est une fonction linéaire de l'inverse de la température absolue, élevé à une certaine puissance non entière.

c) Formule de Statistique Classique : le logarithme de la viscosité est une fonction du type parabole, de l'inverse de la température absolue (développement limité au terme du second degré en $1/T^2$).

Il peut être utile aux théoriciens de savoir qu'actuellement l'expérience est incapable de trancher entre ces trois formules, d'allures mathématiques pourtant assez différentes.

5/ Au point de vue pratique chaque formule a ses avantages et ses inconvénients. La formule de Waterman conduit à des calculs simples, voire élégants. Mais il faut bien avouer que cette élégance manque de rigueur, car l'exposant de Waterman ne peut être que le résultat d'un calcul approximatif.