REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M. FORESTIER

Sur le choix des plans d'échantillonnage

Revue de statistique appliquée, tome 6, nº 2 (1958), p. 73-82
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1958__6_2_73_0>

© Société française de statistique, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LE CHOIX DES PLANS D'ÉCHANTILLONNAGE

par

M. FORESTIER

Ingénieur à la Société Lip

Nous appliquons depuis de nombreuses années à la Société LIP les plans d'échantillonnage du S. R. G. (Statistical Research Group, Columbia University). Ils nous ont déjà rendu de grands services.

L'utilisation de ces plans a été exposée de façon fort complète par M. Colin dans la Revue de Statistique appliquée (vol. I, n°1 - 2 - 3 - 4 - Vol. II, n°1).

Rappelons qu'ils sont basés sur l'AQL et l'efficacité. L'AQL est choisi égal au pourcentage maximum de défectueux admissible. L'efficacité croit en fonction de l'effectif du lot et de l'importance des défauts recherchés (cinq niveaux d'efficacité sont prévus pour un effectif donné).

Avec un tel système, on est quasiment certain de ne pas retourner au fournisseur des lots qui contiennent un pourcentage de défectueux inférieur au pourcentage maximum fixé. On ne craint pratiquement pas de réclamations de sa part lors du retour d'une livraison. C'est un gros avantage.

Par contre, on pourra accepter des lots qui contiennent un pourcentage de défectueux nettement supérieur à l'AQL.

Exemple :

Le plan défini pour un prélèvement de 225 pièces, un nombre d'acceptation égal à 5 et un nombre de refus égal à 6, correspond au niveau le plus efficace pour un lot de 1. 000 pièces; son AQL est de 1,2%, 1,2 est en principe le pourcentage maximum de défectueux possible. Or, ce plan donne encore les probabilités 0, 50 d'accepter un lot qui contient 2, 5% de défectueux et 0, 10 d'accepter un lot qui en contient 4%.

Cet état de choses est gênant, en particulier dans le cas suivant : celui de la réception de pièces détachées de mécanique entrant dans le montage d'un même appareil, où de nombreuses cotes interviennent dans chacune des fonctions à réaliser et où un certain nombre d'entre elles sont exécutées avec des dispersions très voisines des tolérances. Les ennuis de montage ne sont pas alors exclus, ces ennuis consistent en un certain pourcentage de pièces qui ne peuvent suivre le circuit normal de montage.

Nous avons donc été amenés à envisager d'autres ensembles de plans d'échantillonnage dont le choix se fasse à partir d'autres données que l'AQL et l'efficacité.

---

(1) Communication présentée aux Journées d'Etude et de Discussion du Centre de Formation (Juillet 1957).

1. - PLANS D'ÉCHANTILLONNAGE BASÉS SUR LA QUALITÉ INDIVIDUELLE DE CHAQUE LOT

1-1 - Nous nous plaçons dans le cas du contrôle de pièces détachées. Le pourcentage de défectueuses habituellement fabriqué est égal à a_0 et le pourcentage maximum de défectueuses admissible au montage est égal à b_0.

Le plan d'échantillonnage adapté à une telle situation est à notre avis, celui qui donnera pour a_0 la probabilité 0,95 d'accepter le lot, et pour b_0, la probabilité 0,05 ou 0,10 d'accepter le lot. Autrement dit, le plan qui aura a_0 pour AQL et b_0 pour L. T.

Ceci suppose évidemment $a_0 < b_0$ sinon le tri du lot est nécessaire .

Dès lors, on peut concevoir un ensemble de plan d'échantillonnage présenté sous forme de tableau à double entrée, les 2 entrées étant a_0 et b_0. Un travail est à faire à notre avis dans ce sens. Nous proposons la progression ci-dessous pour les valeurs de a_0 comme pour celles de b_0 (les nombres indiqués sont des pourcentages) :

de 0,1 à 1 :	avec la raison	0,1
de 1 à 2 :	"	0,2
de 2 à 5 :	"	0,5
de 5 à 10 :	"	1
de 10 à 20 :	"	2
de 20 à 50 :	"	5

Avantages :

A - Plus le pourcentage de défectueux habituellement fabriqué a_0 est faible ble, et plus le pourcentage de défectueux admissible b_0 est grand, plus l'efficacité du plan d'échantillonnage utilisé est faible et moins le contrôle est coûteux. Au contraire, plus a_0 est grand et b_0 petit, plus l'efficacité du plan d'échantillonnage utilisé est grande et plus le contrôle est coûteux. En suivant l'évolution des valeurs de a_0 et de b_0 on est certain d'adapter toujours le coût du contrôle à une situation donnée.

B - Le montage est pratiquement couvert contre tout ennui. La probabilité d'accepter un lot qui contient plus de b_0 % de défectueux est inférieure à 0,10.

C - Il n'y a pratiquement pas de refus de lot tant que la fabrication ne se dérègle pas.

Si la fabrication se dérègle et produit un pourcentage de défectueux "c" supérieur à a_0 mais inférieur à b_0, une certaine proportion de lots est refusée Cela met en évidence le déréglage et permet de redresser la situation avant que la proportion maximum de défectueux admissible b_0, ne soit atteinte.

1-2 - Si ce dernier point constitue un gros avantage vis-à-vis de l'utilisateur, il constitue un gros inconvénient vis-à-vis du fournisseur, puisque des lots contenant un pourcentage de défectueux inférieur au pourcentage maximum annoncé lui sont refusés.

On peut contourner cette difficulté, en appliquant à tout lot refusé un second plan d'échantillonnage qui décidera en définitive de son acceptation ou de son refus. Précisons que ceci n'a rien à voir avec l'échantillonnage double habituel. Chacun des deux plans peut être simple, double, multiple ou progressif, et le

second plan ne tient aucun compte du nombre de défectueux trouvé au cours du premier.

Si on appelle alors x le pourcentage réel et inconnu de défectueux contenu dans un lot, p (x) l'équation de la courbe d'efficacité du premier plan, q(x) l'équation de la courbe d'efficacité du second, et r(x) l'équation de la courbe d'efficacité du critère d'acceptation défini par l'ensemble des deux plans, on a :

$$r(x) = p(x) + [1 - p(x)]\,q(x)^{(1)}$$

On choisit q(x) de façon à ce que r(x) soit une courbe de forte efficacité, dont l'AQL ou le pourcentage d'indifférence soit égal à b_0. Aucun ennui n'est plus alors à craindre du côté du fournisseur(2).

Voir l'exemple figure 1.

La définition du plan de courbe q(x) (taille de l'échantillon, nombre d'acceptation et de refus) comme celle du plan de courbe p(x) peut être donnée par le même tableau à double entrée.

Remarque -

Dans le cas de petits lots, la méthode que nous venons de décrire s'applique difficilement parce qu'elle conduit à des prélèvements importants par rapport à l'effectif du lot et que :

- l'hypothèse de non exhaustivité des prélèvements n'est plus alors satisfaite, l'allure de la courbe d'efficacité en est modifié.

- le coût du contrôle devient trop élevé.

Exemple : Effectif du lot : 1. 000 pièces :

a_0 = AQL = 1% $\qquad$ b_0 = LT = 3%

Première épreuve :

taille de l'échantillon : 450 - Nombre d'acceptation : 9 - Nombre de refus : 10.

Il faut donc accepter des risques supplémentaires, sans changer l'esprit de la méthode décrite. Cela est possible en se basant non plus sur la qualité individuelle de chaque lot, mais pour une même pièce, sur la qualité moyenne de l'ensemble des lots contrôlés.

2. - PLANS D'ÉCHANTILLONNAGE BASÉS SUR LA QUALITÉ DE L'ENSEMBLE DES LOTS CONTROLÉS

2-1 - DETERMINATION DE LA COURBE D'EFFICACITE EN PARTANT DE LA PROPORTION MOYENNE DE DEFECTUEUSES -

Précisons que cette proportion moyenne de défectueuses est celle d'un grand nombre de lots contrôlés, les lots refusés par le plan d'échantillonnage ayant été triés et les défectueux éliminés.

- Soient -x la proportion de défectueuses contenues dans un lot ;
- P(x) la courbe d'efficacité du plan d'échantillonnage choisi.

---

(1) Ceci est une approximation. En toute rigueur, les évènements "Refus du lot à la première épreuve" et "Acceptation du lot à la deuxième épreuve" ne sont pas indépendants.

(2) Par contre cela augmente un peu les risques du montage.

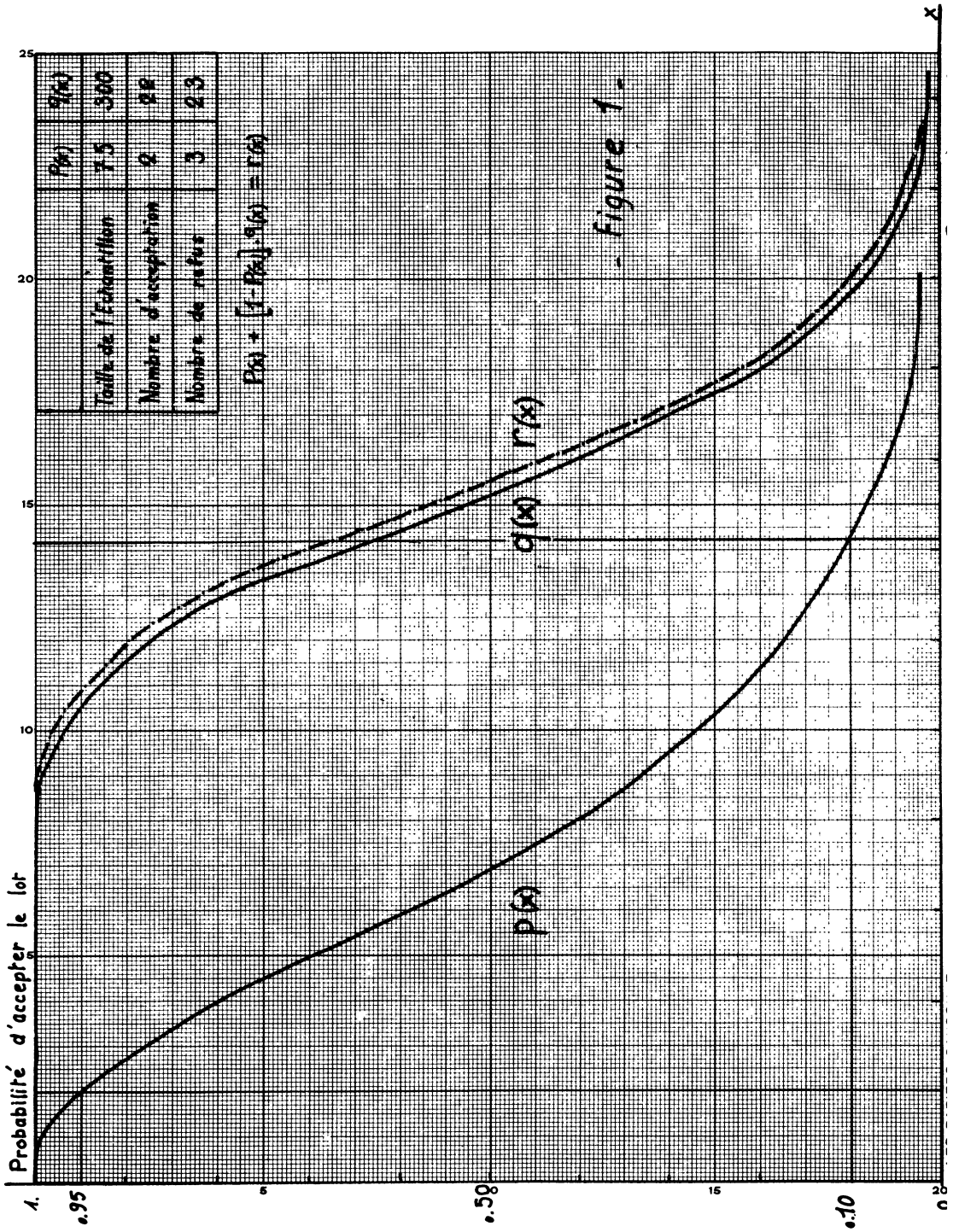
Probabilité d'accepter le lot
1.
.95
.50
.10
0
5
10
15
20
25
x
p(x)
q(x)
r(x)
Figure 1
Taille de l'échantillon
Nombre d'acceptation
Nombre de refus
p(x)
q(x)
7.5
3.00
2
2.8
3
2.3
p(x) + [1 - p(x)].q(x) = r(x)

Figure 1

Le tableau ci-dessous résume alors la situation, pour un seul lot, étant entendu qu'il sera trié s'il est refusé.

	Acceptation du lot	Refus du lot
Probabilité	$P(x)$	$1 - P(x)$
Proportion de défectueuses acceptées sur pièces présentées	x	0
Proportion de pièces acceptées sur pièces présentées.	1	$1 - x$

Pour un ensemble de lots qui contiennent la même proportion x de défectueux.

- La probabilité pour qu'une pièce défectueuse soit livrée au montage est :

$$P(x).\,x + [(1 - P(x)].\,0 = x.\,P(x)$$

- La probabilité pour qu'une pièce quelconque soit livrée au montage est :

$$P(x).\,1 + [1 - P(x)].\,(1 - x) =$$

$$= P(x) + 1 - x - P(x) + x.\,P(x) = (1 - x) + x.\,P(x)$$

Appelons y la probabilité pour qu'une pièce livrée au montage soit défectueuse.

On a : $x.\,p(x) = [(1 - x) + x\,P(x)].\,y$

et $y = \boxed{\dfrac{x\,.\,P(x)}{1 - x + x.\,P(x)}}$

Sur l'ensemble des lots qui contiennent une proportion x de défectueux, y sera à peu près égal à la proportion de défectueux livrés au montage. Il faut donc :

$y \geqslant a$ Pour ne pas gêner inutilement la fabrication.

$y \leqslant b$ Pour ne pas perturber le montage en lui livrant une proportion moyenne de défectueux supérieure à b.

Ces 2 inégalités doivent être vérifiées quel que soit x.

Résolution de $y \geqslant a$.

$$\frac{x.\,P(x)}{1 - x + x.\,P(x)} \geqslant a$$

Le dénominateur de la quantité du premier membre est positif.

$$x.\,P(x) \geqslant a(1 - x) + ax\,P(x)$$

$$\text{ou } P(x) \geqslant \left(\frac{a}{1 - a}\right) \frac{1 - x}{x} = \alpha\,(x)$$

$\alpha(x)$ est une hyperbole équilatère qui ne nous intéresse que lorsque $0 \leqslant P(x) \leqslant 1$ ou $a \leqslant x \leqslant 1$.

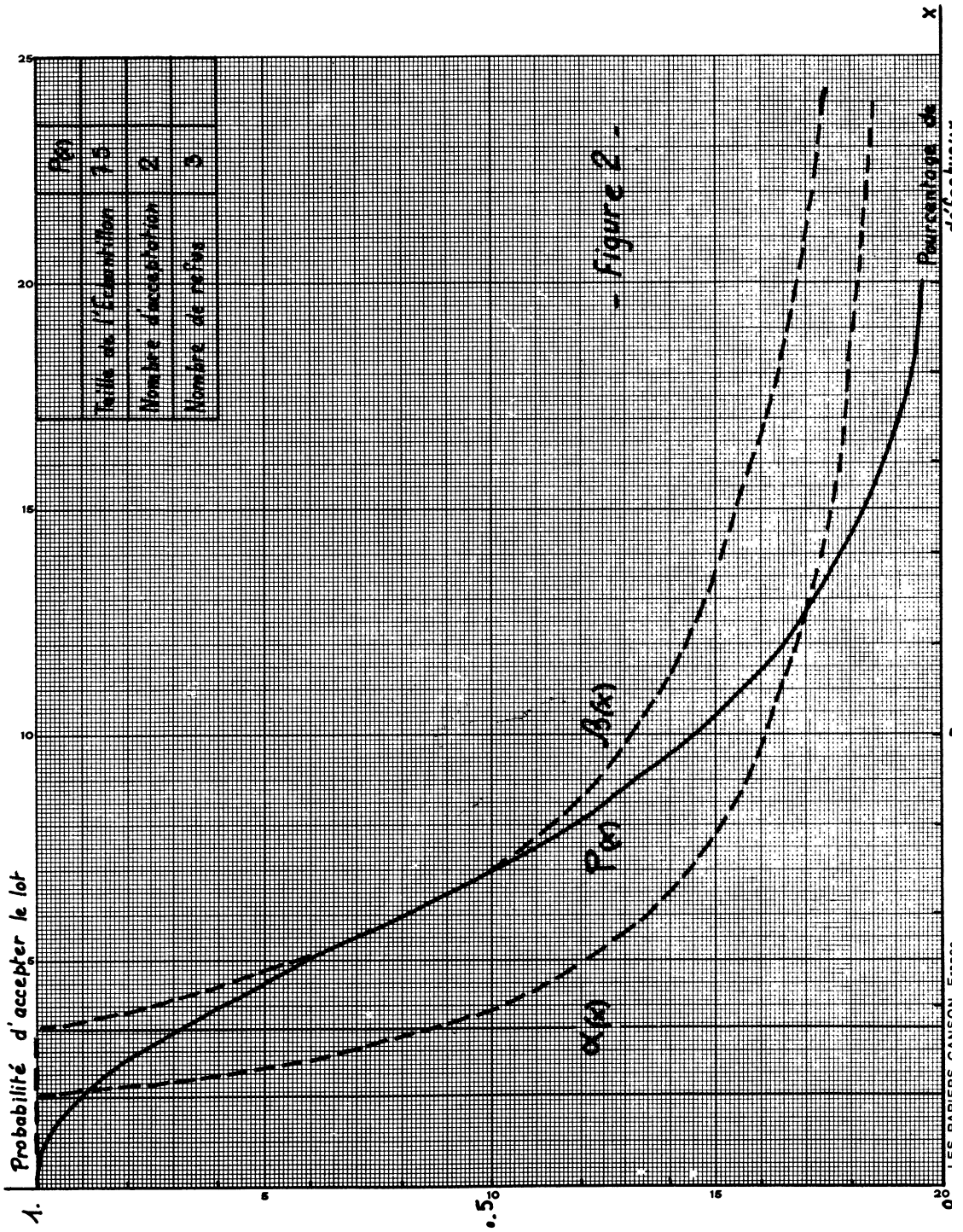
Taille de l'échantillon 75
Nombre d'acceptation 2
Nombre de refus 3
Figure 2
Probabilité d'accepter le lot
Pourcentage de défectueux
β(x)
P(x)
α(x)
1.
.5
0
5
10
15
20
25
x

Figure 2

Résolution de $y < b$.

$$\frac{x.\,P(x)}{1 - x + x.\,P(x)} \leqslant b \qquad \text{d'où}$$

$$P(x) \leqslant \left(\frac{b}{1 - b}\right) . \frac{1 - x}{x} = \beta\,(x)$$

$\beta(x)$ est une hyperbole équilatère qui ne nous intéresse que sur l'intervalle (b, 1) de x.

Conclusion (voir Figure 2).

La courbe d'efficacité cherchée P(x) doit donc être comprise entre les courbes $\alpha\,(x)$ et $\beta\,(x)$.

Remarques :

- En pratique, l'AQL de p(x) est choisi égal à "a".

- p(x) coupe $\alpha\,(x)$ pour des valeurs élevées de x, cela n'a pas grande importance, car ces valeurs sont rarement rencontrées.

- pour réduire au maximum le coût du contrôle, on s'arrange pour que p(x) soit tangent à $\beta\,(x)$. La proportion moyenne maximum de défectueux que donne alors le plan p(x) est "b"; l'AOQL de ce plan est b.

2-2 - Ici encore la présentation d'un ensemble de plans d'échantillonnage sous forme de tableau à double entrée présente un grand intérêt, les deux entrées étant cette fois l'AQL "a" et l'AOQL "b".

La gamme de pourcentage proposée pour l'AQL et le L. T. dans le premier cas où l'on se base sur la qualité individuelle de chaque lot, convient également ici.

- Les avantages signalés pour le premier cas trouvent ici leurs analogues .

Une seconde épreuve pratiquée exactement de la même manière, trouve également ici son intérêt, la courbe d'efficacité résultant de l'ensemble des deux épreuves devant cette fois coïncider le plus possible de la courbe d'efficacité limite supérieure $\beta\,(x)$. Nous n'avons pu ici obtenir de résultats satisfaisants, que lorsque la première épreuve est un plan Z, c'est-à-dire, un plan dont le nombre de refus est l'unité (voir figure 3). Des recherches sont à faire dans les autres cas.

2-3 - REMARQUES -

Allure de la courbe de qualité moyenne correspondant à la courbe d'efficacité :

$$\beta(x) = 1 \text{ lorsque } x < b$$

$$\text{et} \qquad \beta(x) = \frac{b}{1 - b} . \frac{1 - x}{x} \text{ lorsque } x > b$$

Pour $x < b$, tous les lots sont acceptés, la proportion moyenne de défectueux livrés au montage est x, la courbe de qualité moyenne suit la première bissectrice.

Pour $x > b$, la courbe de qualité moyenne est la parallèle à Ox d'ordonnée b.

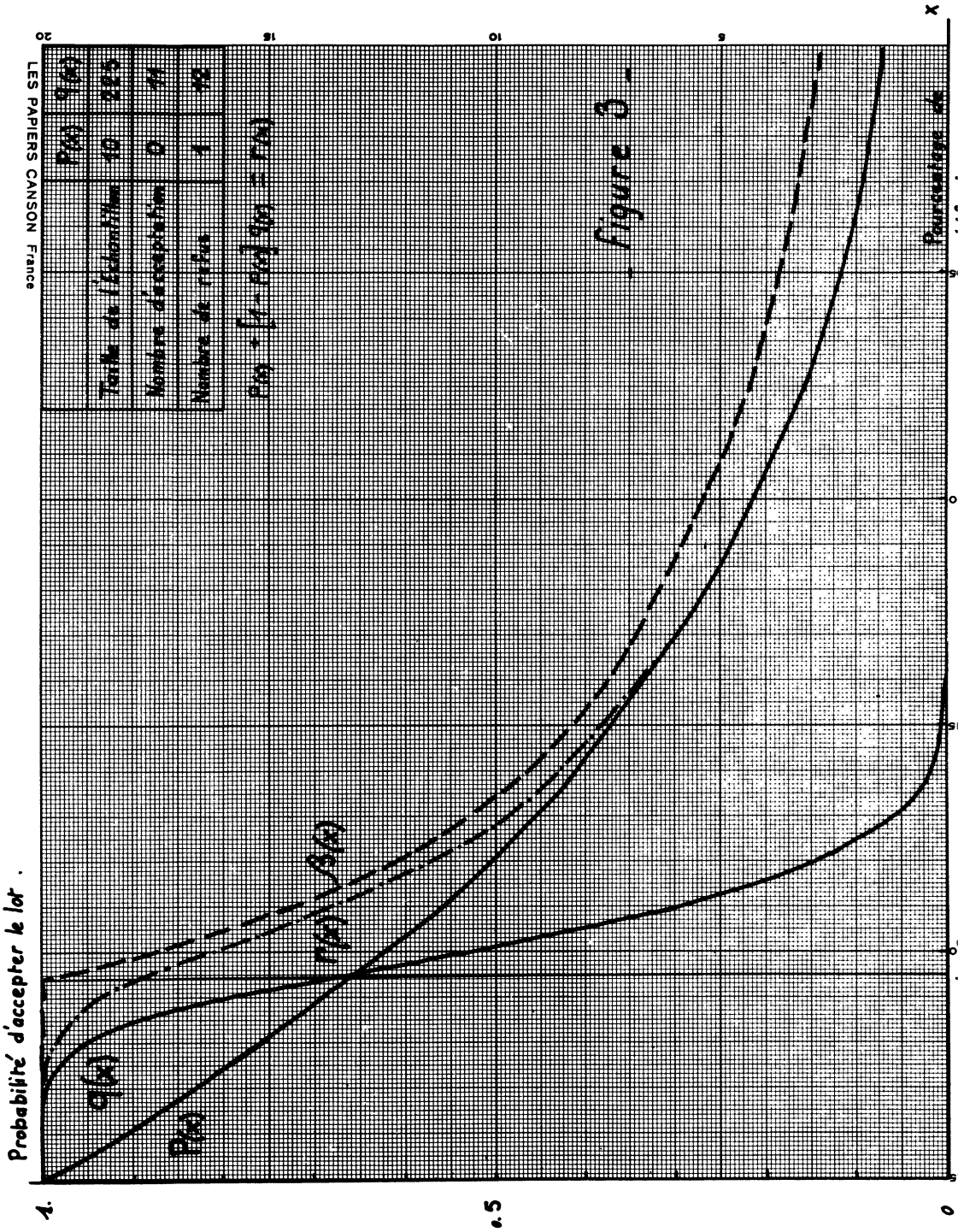
Probabilité d'accepter le lot.
1.
0.5
0
20
15
10
5
x
Pourcentage de
LES PAPIERS CANSON France
Figure 3
Taille de l'échantillon 10 225
Nombre d'acceptation 0 14
Nombre de rejets 1 18
P(A) q(A)
P(A) = [1 - P(A)] q(A) = F(A)
α(x)
β(x)
P(A)
β(A)

Figure 3

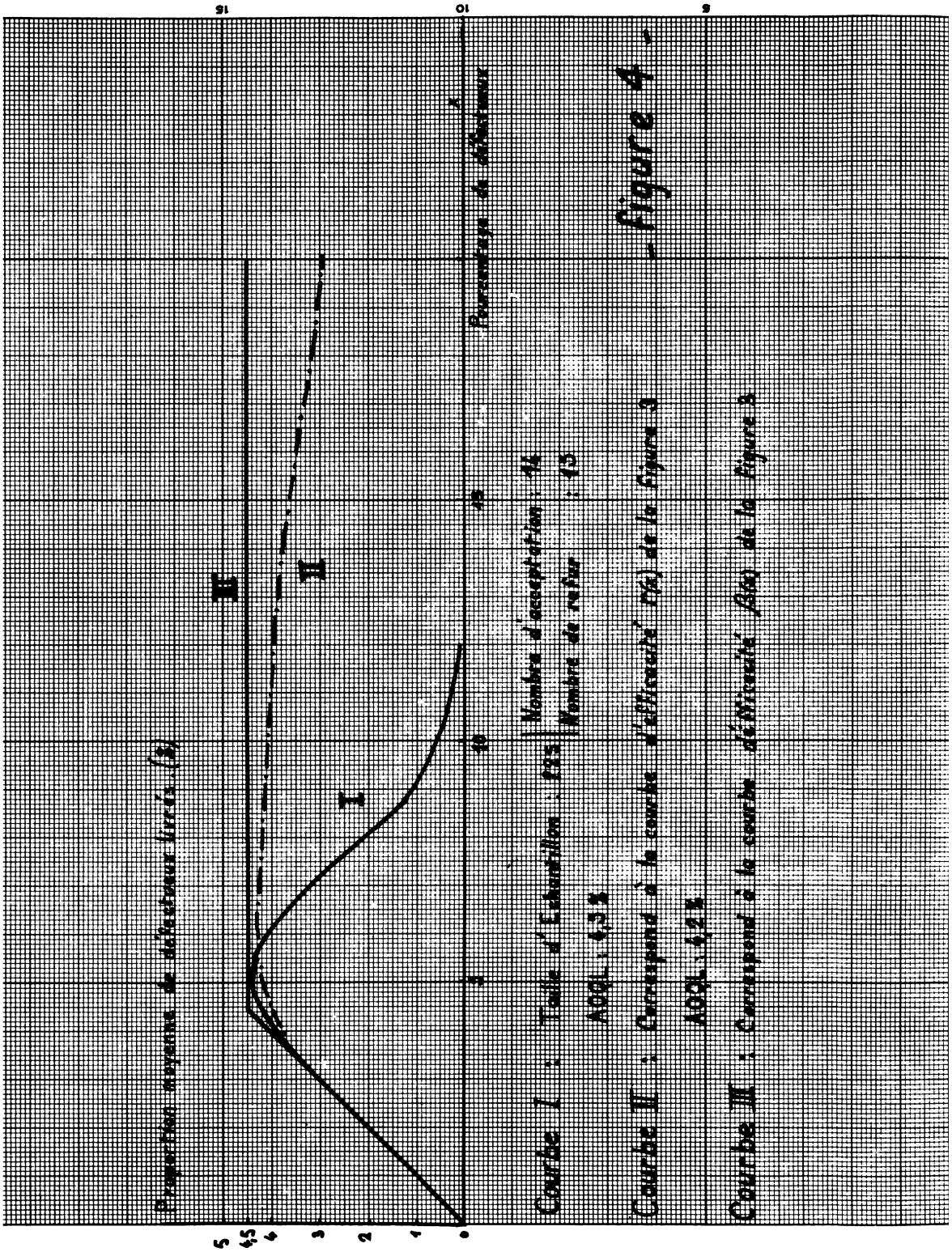
Proportion moyenne de défecteur trouvés (%)
Pourcentage de défectueux
Courbe I : Taille d'échantillon : 125 | Nombre d'acceptation : 44
AQL : 1,5 % | Nombre de refus : 45
Courbe II : Correspond à la courbe d'efficacité (%) de la figure 3
AQL : 4,2 %
Courbe III : Correspond à la courbe d'efficacité (%) de la figure 3
figure 4

Figure 4

Tout plan dont la courbe d'efficacité est tangente à $\beta(x)$ a une courbe de qualité moyenne tangente à la droite d'ordonnée b. Plus cette courbe d'efficacité est longtemps proche de $\beta(x)$, plus la courbe de qualité moyenne reste longtemps proche de la droite d'ordonnée b; avec de tels plans la notion de qualité moyenne prend tout son sens car l'AOQL est alors à peu près constamment atteint dès que x dépasse b, et non plus dans un petit intervalle comme avec les plans habituels (voir fig. 4).

Conclusion

Une présentation de deux ensembles de plans d'échantillonnage sous forme de tableau à double entrée est sûrement intéressante pour de nombreux cas.

Pour le premier ensemble, qui vise la qualité individuelle de chaque lot, les entrées du tableau sont l'AQL et le L. T. Pour le second plan qui vise la qualité moyenne de l'ensemble des lots, les entrées du tableau sont l'AQL et l'AOQL.

Ces tableaux indiquent deux épreuves. La seconde, qu'on applique que lorsque la première a donné le refus, permet de ne retourner un lot que lorsque c'est vraiment devenu nécessaire.

Les avantages du système sont les suivants :

- Coût du contrôle minimum étant donné les pourcentages de défectueux fabriqué et admissible.
- Les pourcentages maxi de défectueux admis, sont des valeurs bien connues, choisies à volonté, qui sont effectivement atteintes et rarement dépassés, lorsque le pourcentage de rebuts fabriqué les avoisine ou les dépasse.
- Les refus de lots se font avec peu de risques pour le fournisseur, donc pratiquement sans contestations de sa part.
- Les déréglages de la fabrication sont décelés par les refus à la première épreuve, c'est-à-dire, dans la plupart des cas, avant que le pourcentage maximum de défectueux admissible ne soit atteint.

Pour ma part, j'estime qu'il y a là un travail intéressant à faire, dont je ne puis malheureusement présenter qu'une ébauche incomplète et sûrement perfectible. Je demande à mes collègues chargés d'appliquer les méthodes statistiques en usine ou chargés d'un service de contrôle réception, de dire s'ils partagent mon point de vue.