REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

GUY D'HERBEMONT

Quelques applications des méthodes statistiques à l'Institut de soudure

Revue de statistique appliquée, tome 6, nº 1 (1958), p. 37-53
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1958__6_1_37_0>

© Société française de statistique, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

QUELQUES APPLICATIONS DES MÉTHODES STATISTIQUES A L'INSTITUT DE SOUDURE [1]

par

GUY D'HERBEMONT

Ancien élève de l'Ecole polytechnique
Ingénieur E.S.S.A.
Chef de service à l'Institut de soudure

Les principales applications des méthodes statistiques que nous avons eu l'occasion de promouvoir jusqu'à présent à l'Institut de Soudure, appartiennent au domaine de la recherche.

La plus grande partie de cet exposé sera consacré à deux programmes d'étude ayant porté, l'un, sur le décapage à la flamme oxyacétylénique, l'autre sur les électrodes de soudage à l'arc à forte pénétration.

Deux autres applications des plans expérimentaux sont en cours actuellement. La première est relative au réglage optimum, en soudage par points des aciers, avec mise en oeuvre de sept facteurs de réglage. La seconde application concerne une étude sensitométrique d'émulsions radiographiques, en fonction de la nature et de l'intensité de la source radioactive utilisée, du temps de pose, de la distance source-film, et de l'épaisseur de l'acier examiné.

Ces divers programmes nous ont conduit à former des calculateurs compétents et à élaborer à leur intention des directives écrites précises. Il a donc fallu se pencher sur les méthodes de calcul elles-mêmes et j'évoquerai à la fin de cet exposé les conclusions auxquelles nous sommes parvenus.

Avant de développer ces sujets, citons encore quelques cas où les méthodes statistiques ont été appliquées avec fruit dans le domaine du soudage :

- Une étude de la répartition des résistances au cisaillement de points de soudure par résistance, exécutés à la suite les uns des autres, sur divers métaux, et avec diverses machines à souder. Cette étude a confirmé que l'hypothèse gaussienne peut être retenue, au moins en première approximation, pour le contrôle en fabrication.

- L'utilisation du test "t" et du test de Darmois pour comparer les résiliences moyennes obtenues avec des éprouvettes en acier déposé par soudage à l'arc électrique, en utilisant divers types d'électrodes, avant et apres dégazage (2).

- Une étude de l'efficacité de diverses règles de recette utilisées pour la qualification de machines à souder par points. Cette étude a permis de choisir en connaissance de cause la règle à adopter pour l'élaboration d'un cahier des charges.

---

(1) Communication présentée aux Journées d'Etude et de Discussion du Centre de Formation (Juillet 1957).

(2) Cf. communication de MM. M. Moneyron et D. Séférian à l'Assemblée Annuelle 1957 de l'Institut International de la Soudure : "Contribution à l'Etude de l'influence de l'Hydrogène sur la résilience du métal déposé en soudage électrique à l'arc avec électrodes enrobées."

- Une utilisation du coefficient de corrélation de rang de Spearman, pour comparer divers modes de classement de groupes convertisseurs de soudage à l'arc. Ceci a permis de rechercher un lien entre l'aptitude pratique à l'emploi déterminée d'après un classement subjectif, et diverses combinaisons de caractéristiques électriques.

A - APPLICATION AU DÉCALAMINAGE A LA FLAMME OXYACÉTYLÉNIQUE

a) Le problème posé

Un nouveau procédé a été mis au point récemment pour éliminer la couche de calamine en surface des produits laminés courants, en vue de leur soudage par points. Ce procédé consiste en un chauffage exécuté à l'aide d'un brûleur oxyacétylénique, suivi d'un refroidissement immédiat par arrosage à l'eau, selon une technique s'apparentant à la trempe superficielle.

Sans faire appel aux méthodes statistiques, l'auteur du procédé a d'abord recherché les conditions optima de réglage sur des tôles de 2 mm d'épaisseur. Il a fait varier deux facteurs seulement : le débit de gaz et la vitesse d'avance du brûleur arroseur. La propriété étudiée était la résistance électrique de contact, qui, pour pouvoir souder dans des conditions convenables, doit être inférieure à environ mille microhms, dans les conditions particulières de la mesure qui est faite.

Plus de 300 éprouvettes ont été traitées, sur lesquelles on a effectué environ 1 500 mesures de résistance, avant et après décapage.

Les résultats se sont traduits par une courbe, donnant la vitesse à respecter, en fonction du débit de gaz, pour obtenir une résistance de mille microhms. Cette courbe s'est trouvée pratiquement rectiligne avec une pente positive, sauf pour les faibles débits.

Le programme de recherche prévoyait encore l'étude du décapage des tôles de 4 mm d'épaisseur. C'est à cette occasion que l'on a proposé l'application des méthodes statistiques.

Voici les arguments qui ont permis de montrer qu'il y avait intérêt à faire appel à ces méthodes :

1 - On pouvait obtenir les mêmes renseignements que pour les tôles de 2 mm, avec beaucoup moins d'essais.

2 - On pouvait inclure, dans la recherche, l'étude simultanée de l'influence d'un plus grand nombre de facteurs.

3 - Il était possible d'appliquer une méthode rationnelle pour rechercher un réglage optimum.

b) Programme d'essai

Sept facteurs ont été introduits dans le programme. Ce sont :

A - le débit de gaz,
B - la vitesse d'avance,
C - le débit d'eau,
D - le rapport de consommation (débit O^2/débit C^2H^2)
E - la distance flamme (pointe des dards) - jet d'eau,
F - la distance dard-surface de la tôle,
G - la nature de la calamine.

Les études antérieures ayant montré que la résistance de contact était approximativement proportionnelle à sa dispersion on a choisi comme variable $r = \log R$.

Le problème posé consistait, en somme, à explorer la surface inconnue :

$$r\,(AB \ldots F) = \log 1\,000 = 3\ ,$$

en se dirigeant dans le sens des prix de revient P décroissants.

En principe, une fois l'hypersurface $r = 3$ atteinte, dans l'espace à six dimensions constituées par les six paramètres de réglage, il suffit de suivre sur celle-ci la direction de la projection du gradient de P. Soit, en acceptant de dévier légèrement sur le plan tangent, la direction :

$$W = \overrightarrow{\text{grad}}\ P - \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\ P\ .\ \overrightarrow{\text{grad}}\ r}{(\overrightarrow{\text{grad}}\ r)^2}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ r$$

Le gradient de P étant connu a priori, il s'agissait donc de choisir un plan expérimental réduit permettant de connaître la position et l'orientation de l'hyperplan tangent à l'hypersurface $r = 3$.

Nous avons choisi, comme plan d'expérimentation locale, un plan du type $2^7 = 128$ essais, réduit à 16 essais en utilisant comme groupe fondamental de réduction celui qui comporte les 3 éléments générateurs suivants :

- ABCD
- CDEF
- BDFG

Il en résulte que 7 degrés de liberté permettent d'évaluer les actions simples des sept facteurs. Toutes les interactions doubles sont confondues trois à trois et correspondent à sept autres degrés de liberté. Il subsiste encore un degré de liberté résiduel.

Le plan comporte alors les 16 éléments du groupe engendré par :

(1), abcd, cdef, bdfg, abcdefg.

Une telle façon de procéder est certes un peu dangereuse en principe, mais le plan n'étant destiné qu'à évaluer approximativement une direction, dont la définition était déjà, en un sens, conventionnelle, on a estimé que le risque encouru était sans gravité. Ce risque portait d'ailleurs principalement sur les possibilités d'interaction entre trois facteurs ou plus.

c) Réalisation pratique

Le premier plan de 16 essais répétés une fois, soit 32 essais, a montré que l'erreur expérimentale était anormalement élevée.

On s'est donc préoccupé de contrôler avec plus de précision les paramètres de réglage et diverses améliorations ont été apportées aux dispositifs d'essai.

Les niveaux des facteurs ayant été modifiés dans le sens d'une diminution du prix de revient, on procéda à une seconde série de 16 x 2 essais. L'analyse de variance apparaît au tableau I.

L'influence du débit d'eau pouvait donc être considéré comme négligeable pour les niveaux étudiés. Par ailleurs, le rapport de consommation, qui avait une influence importante, a dû être écarté du programme; les meilleurs résultats correspondaient en effet à des flammes oxydantes dont le réglage précis ne peut être obtenu dans la pratique industrielle.

TABLEAU 1

Source de variations	Somme des carrés	Degrés de liberté	Quotient
Rapport de consommation	97.903	1	
Vitesse d'avance	68.635	1	
Distance dard-eau	29.161	1	
Débit de Gaz	26.335	1	
Calamine	12.960	1	
Autres actions et interactions	43.540	10	4.354
Résidus	43.014	16	2.688
Total	321.548	31	

Un nouveau plan d'expérimentation locale a donc été établi et les essais ont été disposés selon un plan factoriel complet. Les niveaux de vitesse, de débit et de distance dard-eau ayant été modifiés dans la direction indiquée par les résultats du plan précédent, voici l'analyse de variance obtenue pour l'une des deux calamines étudiées:

TABLEAU 2

Source de variations	Somme des carrés	Degrés de liberté	Quotient
Vitesse d'avance	26.790	1	26.790
Débit de Gaz	3.491	2	1.745
Vitesse x Débit	2.554	2	1.277
Résidu	1.114	6	186
Total	33.949	11	

On en a conclu, notamment, qu'il n'était plus possible d'agir sur le prix en modifiant la distance dard-eau. Il ne restait donc plus que la possibilité d'accroitre simultanément le débit de gaz et la vitesse d'avance.

Mais des examens micrographiques ont montré que, dans cette direction, les tôles d'acier doux subissaient des effets de trempe. On devait donc considérer que l'optimum cherché était pratiquement atteint.

A l'aide de l'ensemble des essais exécutés, complétés par quelques sondages, il a été finalement choisi un réglage type qui a été expérimenté sur un grand nombre d'échantillons calaminés de provenances très diverses. A l'exception d'un seul cas, où il a été nécessaire de répéter deux fois le traitement, les résistances de contact obtenues ont toujours été inférieures à mille microhms (1).

(1) Un exposé complet sur l'ensemble des essais décrits a été fait récemment devant la société des Ingénieurs Soudeurs, par Monsieur Evrard, qui a mis au point ce procédé de décapage. Cet exposé paraitra dans le numéro d'octobre 1957 de la revue de "Soudage et Techniques connexes".

B - APPLICATION AU SOUDAGE EN FORTE PÉNÉTRATION

A l'occasion d'une étude sur les électrodes de soudage à l'arc électrique (1), il a été reconnu utile de faire appel aux méthodes statistiques.

Il s'agissait de mettre en évidence l'influence des divers paramètres qui agissent sur la pénétration, c'est-à-dire sur la profondeur de la zone de fusion de l'acier sous la surface des tôles.

Le nombre de facteurs que l'on pouvait retenir a priori était très important, si bien que, après avoir décidé de reporter l'étude d'un certain nombre d'entre eux, le programme comportait encore la mise en oeuvre des facteurs suivants :

1 - Type d'électrode (nature de l'enrobage) T
2 - Diamètre de l'âme Δ
3 - Intensité de soudage I
4 - Vitesse d'avance V
5 - Ecartement des tôles L
6 - Inclinaison des tôles ω
7 - Inclinaison de l'électrode φ
8 - Tension à l'arc U (par variation de longueur d'arc).

Nous noterons la pénétration par P.

Un expérimentateur Suédois avait déjà poursuivi une étude partielle sur le sujet et proposé une formule du type :

$$P = A\, I^a V^b \Delta^c U^d$$

où a, b, c et d sont des constantes universelles, A caractérisant le type d'électrode.

Il s'agissait en premier lieu de vérifier cette formule, pour un ensemble de cas aussi variés que possible. Si la formule pouvait être reconnue valable, il apparaissait en effet clairement que l'étude proposée ne nécessiterait qu'un nombre relativement réduit d'essais.

On dressa donc le plan suivant qui mettait en oeuvre 4 types d'électrodes, 4 niveaux d'intensité et de vitesse et deux niveaux de diamètre et de tension à l'arc (Tableau 3).

Ce plan dérive du plan factoriel complet : 4x4x4x2x2, que l'on a considéré comme un plan comportant 8 facteurs (que nous désignerons provisoirement par A, B,... H), et à deux niveaux. Si l'on réduit ce plan à 32 essais par le groupe d'éléments générateurs ACE, BDF et ADG, on constate que si l'action simple de l'intensité est représentée par A, B et AB, l'action simple de la vitesse par C, D et CD, l'action du type d'électrode par E, F et EF, l'action simple du diamètre G, et l'action simple de la tension par H ; aucune de ces actions n'est confondue avec une autre. Par ailleurs, toutes les autres interactions doivent être supposées nulles si l'on prend soin de choisir comme variables les logarithmes ; car, dans ces conditions, la formule qui constitue l'hypothèse à tester devient une formule linéaire, purement additive.

Pour le choix des niveaux, il s'est présenté une difficulté. Les diverses électrodes ne pouvaient fonctionner aux mêmes valeurs d'intensité et de vitesse. On a donc tracé en fonction de log I et de log V, les régions utiles dans chaque cas, puis on a cherché quel était le plus grand parallélogramme inscrit superposable à lui-même par une translation d'une région à l'autre. Les directions des

(1) Ces essais ont été l'objet d'une communication de Monsieur A. Gaubert et d'une communication de l'auteur devant la Société des Ingénieurs Soudeurs. (Cf. Soudage et Techniques Connexes - Janvier 1958).

TABLEAU 3

		Intensité 1	2	3	4
Vitesse	1	$T_1 D_1$	$T_2 D_2$	$T_3 D_1$	$T_4 D_2$
	2	$T_2 D_1$	$T_1 D_2$	$T_4 D_1$	$T_3 D_2$
	3	$T_3 D_2$	$T_4 D_1$	$T_1 D_2$	$T_2 D_1$
	4	$T_4 D_2$	$T_3 D_1$	$T_2 D_2$	$T_1 D_1$
Répété pour 2 tensions U_1 et $U_2 = 1,1\ U_1$					

TABLEAU 4

Source de variations		Somme des carrés	ddl	Quotient	F
Intensité	linéaire	377 913,6	1		++
	quadratique	338	1		
	cubique	176,4	1		
Vitesse	linéaire	29 160	1		+++
	quadratique	3 042	1		
	cubique	7 290	1		++
Tension		3 362	1		
Type d'électrode		553 392	3	184 464	+++
Diamètre		85 698	1		+++
Résidus d'interactions		31 180	20	1 559	
Résidus de duplication		40 160	32	1 255	
	Total	1 131 712	63		

+++ $> F_{0,001}$ ++ $> F_{0,05}$
Analyse de : $12,5\sqrt{2}$ log. (p mm)

côtés de ce parallélogramme étant prises pour axes, on en a déduit un changement de variables linéaires, laissant invariant le type de formule à tester, et donnant les valeurs réelles d'intensité et de vitesse en fonction des numéros de niveaux.

Les résultats de l'analyse de variance sont donnés au tableau 4. Ils ont conduit aux conclusions suivantes :

1 - Le résidu expérimental est élevé. Il correspond à une erreur d'environ 26 % sur la pénétration (il a été procédé à une répétition pour être sûr que cette évaluation n'était pas faussée par des interactions). Les dépôts avaient cependant été exécutés avec une machine entièrement automatique. On a déduit de ce fait qu'il fallait contrôler avec plus de précision les réglages de la machine, et qu'il fallait peut-être soupçonner que l'écart-type n'était pas proportionnel à la pénétration.

2 - Malgré cet écart-type probablement surévalué, la courbure de la loi de variation en fonction de la vitesse est significative en se basant sur le niveau 0,1.

3 - Les valeurs trouvées pour les constantes a,b,c et d sont très différentes de celles proposées par l'expérimentateur antérieur.

On a donc estimé que la formule proposée pouvait être mise sérieusement en doute et qu'il convenait d'éprouver une formule plus complexe. Il fallait pouvoir mettre en évidence certaines interactions sans que l'on puisse savoir a priori lesquelles.

Un plan complet à trois niveaux et pour quatre types d'électrodes seulement aurait comporté $4 \times 3^7 = 8.748$ essais. Un tel plan, réduit au 1/9 avec une duplication, aurait nécessité encore 1.944 essais, ce qui, à raison de 4 à 5 kilos d'acier par éprouvette, aurait conduit à dépenser plus de 8 tonnes de tôles.

On estimait d'ailleurs que les observations faites au fur et à mesure des essais conduiraient à des modifications dans les dispositifs et les conditions de réglage, ce qui ne rendait pas souhaitable d'affecter tout l'acier dont nous disposions à un seul programme, aussi bien conçu soit-il.

On décida donc de procéder par étapes, en se contentant au besoin de résultats partiels.

a) Recherche de l'influence conjointe de l'intensité et de la vitesse

La première étape consista à faire varier les facteurs considérés comme les plus importants : intensité, vitesse et type d'électrode ; les autres facteurs étant maintenus à un niveau constant correspondant à la pratique courante.

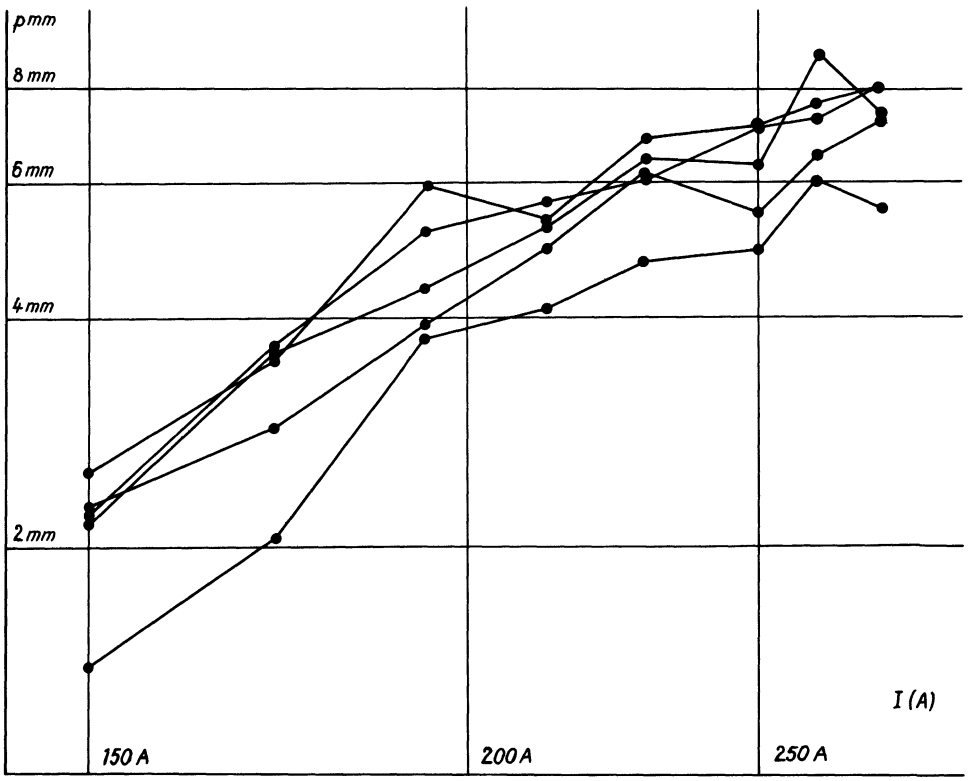

Fig. 1

Pour rechercher la forme de la loi log P = f (log I, log V), on mit en oeuvre un plan factoriel complet à 5 niveaux de vitesse et 8 niveaux d'intensité. Les essais ont été répétés une fois pour le premier type d'électrode examiné.

Les expérimentateurs, avec lesquels je collaborais, se sentirent aussitôt dans un domaine qui leur était familier. Ils pensaient que le concours d'un statisticien n'était pas indispensable pour interpréter des essais obtenus en combinant entre eux les niveaux de toutes les façons possibles. On pouvait espérer en effet que les moyennes des deux essais allaient s'aligner sagement sur de "bonnes" courbes log P = f (log I), dont la position dépendrait de la vitesse V.

Mais il a fallu renoncer à cette illusion. Et voici, par exemple, les résultats qui m'ont été présentés pour le type d'électrode T2 (fig. 1): "que pouvait tirer le statisticien d'un tel imbroglio?"

A cette occasion, je constatais donc une nouvelle fois que l'intérêt de l'opération très simple, à peine "statistique", qui consiste à effectuer les moyennes de lignes et les moyennes de colonnes n'était pas encore suffisamment connu des expérimentateurs classiques, malgré leur tendance habituelle à admettre spontanément l'hypothèse d'additivité.

Quoi qu'il en soit, voici les résultats des moyennes marginales, sous forme de graphique, et l'analyse de variance montrant que l'interaction entre facteurs est négligeable (fig. 2, 3 et tableau 5). On peut conclure que les formules du type log P = log A + a log I + b log V ne sont pas satisfaisantes. Elles ne sont à la rigueur acceptables que dans un domaine limité de vitesses et d'intensité, qui permette de confondre les courbes avec leur tangente. De plus, les comparaisons faites avec les résultats obtenus pour les autres électrodes ont montré que les constantes a et b dépendent du type considéré.

TABLEAU 5

Source de variations	Somme des carrés	ddl	Quotient
Intensité	24 917	7	3 559
Vitesse	3 762	4	940
I × V	26	28	0,9
Résidu	1 968	40	49
Total	30 673	79	

Toutefois, comme pour le plan décrit précédemment, le résidu apparaît anormalement élevé. On constate aussi que les erreurs fortes semblent relatives aux faibles valeurs de la pénétration. Dans ces conditions, on pouvait se demander si ceci ne provenait pas de l'utilisation des coordonnées logarithmiques.

Si l'on analyse les résultats à partir des valeurs de la pénétration exprimée directement en millimètres, voici la forme prise par les fonctions P = f(I) et P = f(V) telles qu'elles résultent des moyennes marginales (fig. 4 et 5). L'analyse de variance (Tableau 6) montre que l'interaction est toujours négligeable, mais l'anomalie relative au résidu a disparu.

Ceci, joint aux observations faites pour les autres types d'électrodes, a conduit à éliminer l'emploi des logarithmes et les formules du type proposé antérieurement.

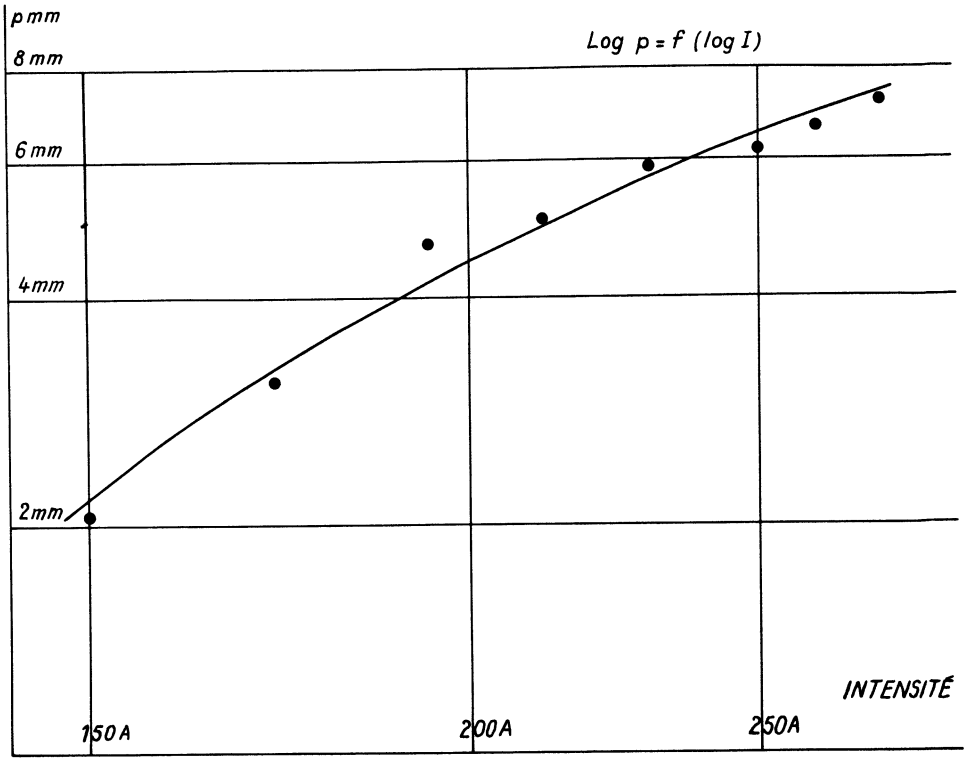
p mm
8 mm
6 mm
4mm
2mm
Log p = f (log I)
INTENSITÉ
150 A
200A
250A

Fig. 2

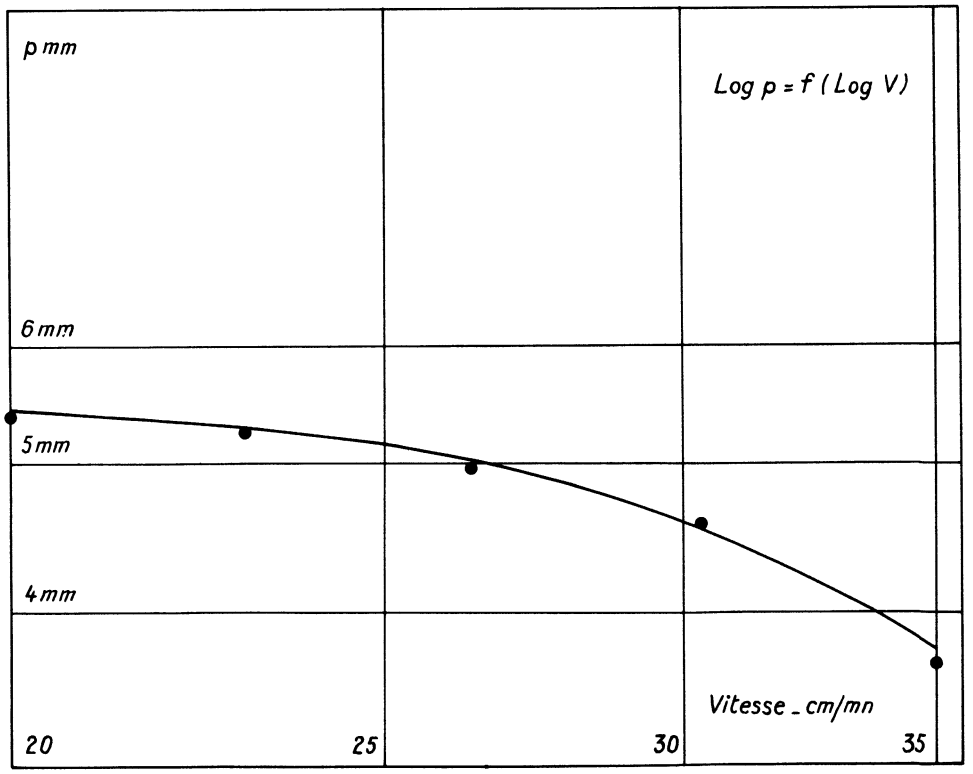
p mm
6 mm
5mm
4mm
Log p = f (Log V)
Vitesse - cm/mn
20
25
30
35

Fig. 3

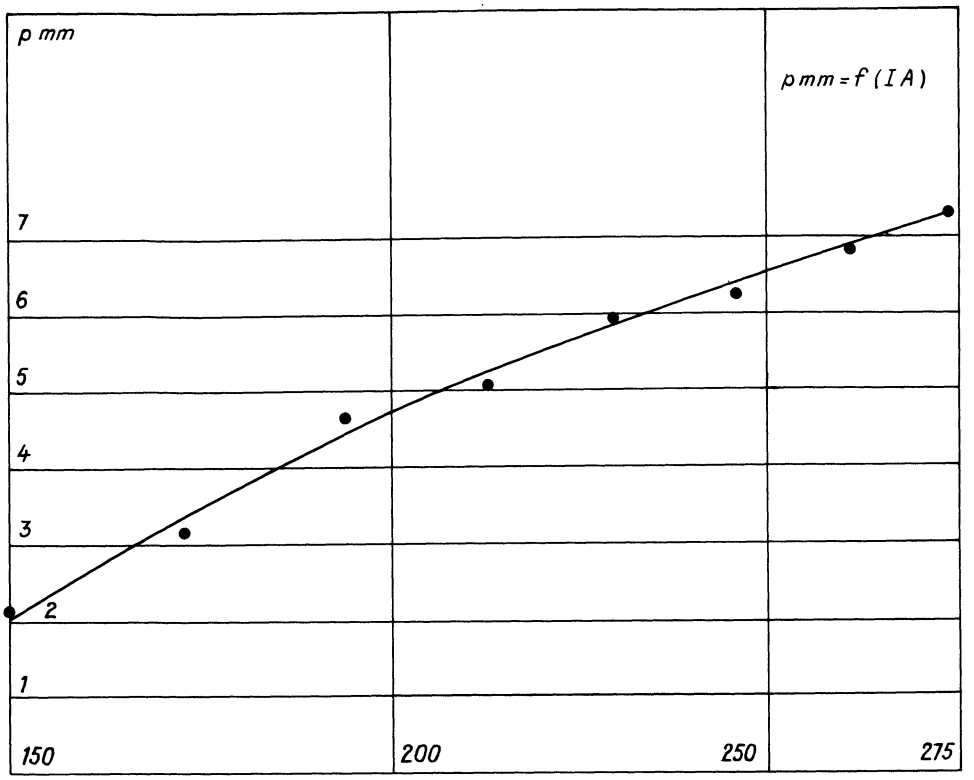
p mm
pmm = f (I A)
7
6
5
4
3
2
1
150
200
250
275

Fig. 4

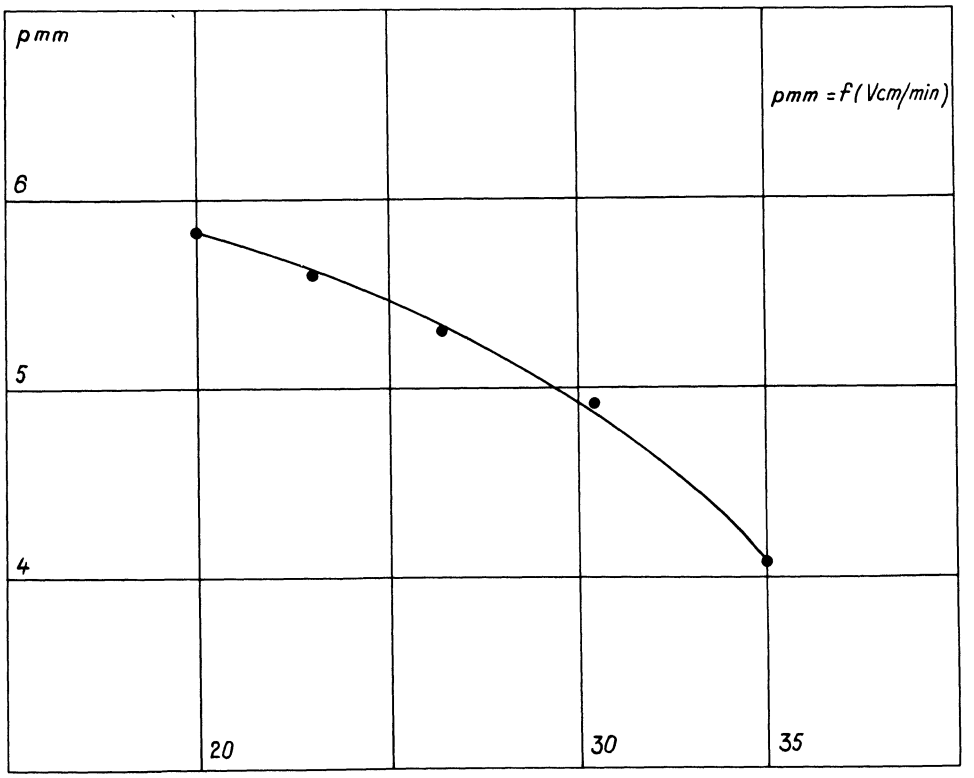
pmm
pmm = f (Vcm/min)
6
5
4
20
30
35

Fig. 5

Il n'en reste pas moins cependant que la courbure des lois de variation est toujours plus ou moins significative selon le type d'électrode. Toutefois, si on limite l'emploi des formules à un domaine convenable de vitesse et d'intensité, correspondant d'ailleurs à la pratique industrielle, on peut admettre que la pénétration donnée par une électrode est de la forme

$$P = a + b I + c V ,$$

a, b, c étant des coefficients caractéristiques de l'électrode.

TABLEAU 6

Source de variations	Somme des carrés	ddl	Quotient
Vitesse	263 426	4	65 857
Intensité	1 783 511	7	254.787
V × I	54 654	28	1 951
Résidus	90 840	40	2 271
Total	2 192 431	79	

Analyse de : $10 \sqrt{80}$ p mm

Ces coefficients ont été déterminés pour chacun des types étudiés au moyen de plans complets sans duplication.

b) Etude du rôle des autres facteurs

Quelques plans d'expérience ont été consacrés à la recherche de l'influence du diamètre. Il en a été conclu finalement que deux électrodes de même type, selon la désignation du fournisseur, mais de diamètre différent devaient être considérées comme deux êtres distincts. Ceci apparait d'ailleurs logique, car, notamment, le diamètre de l'âme d'une électrode et la composition de son enrobage ne suffisent pas à la déterminer. L'épaisseur de l'enrobage doit certainement jouer un rôle. Or, nous n'avions pas la possibilité de faire varier cette épaisseur.

Admettant que le plan d'expérience initial avait donné des informations suffisantes sur le rôle de la tension à l'arc, il restait encore à étudier :

L - écartement des tôles
ω - inclinaison des tôles sur l'horizontale
φ - inclinaison de l'électrode.

En vue de cette étude pour un type d'électrode donné, de diamètre donné il a été réalisé un plan d'expérience préliminaire du type $2^5 = 32$ essais comportant les 5 facteurs I, V, L, ω et φ, chacun étant pris à deux niveaux. Ces niveaux ont d'ailleurs été choisis en fonction d'observations faites au cours d'essais précédents. Il s'agissait là principalement de se rendre compte de l'importance d'interactions éventuelles.

Voici l'analyse de variance qui a été obtenue : (Tableau 7) (1).

(1) Cette figure définit également les notations que nous utiliserons jusqu'à la fin de cet exposé, pour désigner l'influence des cinq facteurs considérés.

TABLEAU 7

Source de variations (Tous ddl = 1)	Somme des carrés
A = Intensité	1 664,64
B = Vitesse	169,00
C = Incl. de la tôle	51,84
D = Incl. de l'électrode	0,00
E = Ecartement	2 480,04
AB	1,96
AC	0,00
AD	2,56
AE	6,76
BC	11,56
BD	11,56
BE	10,24
CD	4,00
CE	0,04
DE	0,04
ABC	0,04
ABD	0,04
ABE	0,64
ACD	0,64
ACE	0,36
ADE	0,04
BCD	0,36
BCE	1,44
BDE	0,16
CDE	1,96
ABCD	9,00
ABCE	10,24
ABDE	0,00
ACDE	4,84
BCDE	0,00
ABCDE	2,56
TOTAL (31 ddl)	4 446,56

En toute rigueur un tel tableau est difficile à interpréter, du fait par exemple que $F_{0,1}$ est égal à 39,9 pour deux nombres de degrés de liberté égaux respectivement à 1. On a finalement décidé de retenir la répartition suivante qui suggère l'existence d'interactions AE, BC, BD, BE (Tableau 8), en remarquant que le résidu conduit à un écart-type de l'erreur d'expérience, tout à fait raisonnable par rapport à ce que les plans précédents avaient montré.

Il s'agissait à ce moment d'examiner avec plus de détail l'influence des quatre facteurs B, C, D et E.

Dans ce but, on a exécuté les essais définis par un plan comportant trois niveaux pour chacun des quatre facteurs ; mais au lieu des $3^4 = 81$ essais, on a décidé de réduire ce plan au tiers en n'évaluant pas l'interaction BCDE. Ceci revenait à construire ce plan comme s'il ne comportait que trois facteurs B,C,D

dont nous noterons les indices de niveaux par i, j et k. L'indice de niveau du dernier facteur E est alors pris égal à :

$$l = 2i + 2j + 2k \pmod{3}$$

TABLEAU 8

Source de variations	Somme des carrés	Degrés de liberté	Quotient
A = intensité	1 665	1	++++
B = vitesse	169	1	++++
C = incl. tôle	52	1	++++
D = incl. électrode	0	1	
E = écartement	2 480	1	++++
AE	7	1	+
BC	12	1	++
BD	12	1	++
BE	10	1	++
Résidu	38	22	1,7
TOTAL	4 445	31	

$+ > F_{0,1}$ $\quad ++ > F_{0,05}$ $\quad ++++ \ggg F_{0,001}$

TABLEAU 9

			I = BCDE		
1	$\underline{B}$	=	$BC^2D^2E^2$	=	CDE
2	$\underline{C}$	=	BC^2DE	=	BDE
3	$\underline{BC}$	=	BCD^2E^2	=	DE
4	$\underline{BC^2}$	=	BD^2E^2	=	CD^2E^2
5	$\underline{D}$	=	BCD^2E	=	BCE
6	$\underline{BD}$	=	BC^2DE	=	CE
7	CDs	=	BC^2D^2Es	=	$\underline{BE_{2s}}$
8	BCDs	=	$BCDE^2$	=	$\underline{E_{2s}}$
9 r	BC^2D	=	BDE^2	=	CE^2
10	$\underline{BD^2}$	=	BC^2E^2	=	CDE
11 r	CD^2	=	BC^2E	=	BD^2E
12 r	BCD^2	=	BCE^2	=	DE^2
13	BC^2D^2s	=	$\underline{BE^2_{2s}}$	=	CDE^2_{2s}

Les relations de liaison peuvent s'écrire, dans ces conditions, comme indiqué au Tableau 9, sur lequel les interactions et actions à évaluer sont soulignées. Il reste trois lignes du tableau 9, soit 6 degrés de liberté, pour évaluer l'écart-type de l'erreur.

Les résultats de l'analyse de variance sont donnés au Tableau 10. Il en résulte que les interactions dont on avait supposé l'existence sont, en réalité, négligeables et que l'influence de l'inclinaison de l'électrode est pratiquement nulle.

Ceci a permis une interprétation numérique très simple des phénomènes.

Pour ne pas allonger démesurément cet exposé, nous dirons seulement que l'étude s'est poursuivie en appliquant aux divers types d'électrodes un plan étudié par Fisher et qui a été utilisé par Tippett (1). Ce plan met en oeuvre cinq facteurs, chacun avec cinq niveaux, et comporte 25 essais seulement. Il a été utilisé ici avec succès pour donner une vue d'ensemble du comportement des diverses électrodes.

TABLEAU 10

Source de variations	Somme des carrés	ddl	Quotient
B Vitesse	13 784	2	6 892 x
C Inclinaison des tôles	10 088	2	5 044 x
D Inclinaison de l'électrode	662	2	331 -
E Ecartement	168 506	2	84 253 x
B x C	2 572	4	643 -
B x D	1 900	4	475 -
B x E	2 842	4	710 -
RÉSIDU	2 976	6	496
TOTAL	203 330	26	

(En variable $x = 10\sqrt{27}\,\rho$ mm) x $> F_{0,01}$ - $< F_{0,1}$

C - MISE AU POINT DE MÉTHODES DE CALCUL

L'expérience acquise, en ce qui concerne les calculs numériques des plans d'essais, nous a permis de mettre au point une méthode de calcul qui semble particulièrement rapide et systématique. Cette méthode est basée sur des considérations arithmétiques et, dans certains cas sur les possibilités des machines à calculer dont nous disposons.

(1) Cf. Kempthorne "Design and analysis of experiments", page 415.

Classiquement, la plupart des plans expérimentaux, sauf ceux du type 2^n (n facteurs à 2 niveaux), s'interprètent grâce à une présentation des résultats sous forme de tableaux rectangulaires ou carrés, d'autant plus nombreux que le nombre des facteurs est élevé.

Sur chacun de ces tableaux on totalise chaque ligne et chaque colonne et, dans le cas des plans réduits, **divers types de diagonales.**

Si l'expérience comporte plus de deux ou trois facteurs, les transcriptions de chiffres, le tracé des tableaux, l'intitulé des colonnes et des lignes prennent un temps important. De plus, le schéma de succession **des opérations** est relativement complexe et comporte une part d'arbitraire.

Il en résulte notamment qu'il est difficile de rechercher les erreurs et de corriger toutes les conséquences qui en découlent.

Or, en fait, la plupart des calculs qui précèdent l'analyse de la variance consistent à appliquer à la liste des résultats, prise dans un ordre convenable, une ou plusieurs matrices ou tableaux de coefficients, dont tous les éléments sont le plus souvent nuls ou égaux à un.

L'application de telles matrices à une liste de nombres revient à faire une succession d'additions, dans un certain ordre, en choisissant convenablement les valeurs à totaliser. C'est l'ordre des opérations et le choix des nombres qui rendent le calcul délicat.

La présentation classique sous forme de tableaux a pour premier but de vaincre ce genre de difficultés, mais elle a également un autre but qui n'est pas toujours clairement compris.

Si l'on exécute brutalement les calculs : $E = M R$, donnant les estimations cherchées E, en appliquant la matrice M aux résultats R, le nombre d'opérations à faire qui est égal au nombre d'éléments non nuls de la matrice M, est très élevé. Or, en procédant par tableaux successifs, on est conduit à une économie sensible. La constitution de tableaux condensés successifs revient en effet à appliquer successivement plusieurs matrices plus simples, dont le produit est M, mais dont la somme des éléments est bien inférieure au nombre d'opérations contenues dans cette dernière.

Ces observations **permettent d'aboutir** à une conclusion importante, car les deux arguments qui semblent justifier l'emploi de la méthode usuelle, malgré les inconvénients manifestes qu'elle comporte, peuvent servir de base pour trouver d'autres méthodes plus économiques et ne présentant pas les mêmes inconvénients.

Ces méthodes sont basées sur la recherche de matrices élémentaires simples, dont le produit donne M et telles que le nombre d'opérations qui en résulte soit le plus faible possible.

C'est dans cette direction qu'il semble que nous ayons pu obtenir des résultats intéressants. Il a été notamment possible de trouver des matrices carrées m, valables pour tous les plans mettant en oeuvre un nombre de facteurs quelconque comportant le même nombre de niveaux : p^r (p, nombre premier, r, nombre entier), soit 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, etc...

Ceci généralise la méthode classique de calcul par colonnes, des plans comportant plusieurs facteurs à deux niveaux. On sait que la méthode la plus rapide consiste alors à partir des résultats, mis en colonne dans l'ordre normal, et à calculer, dans l'ordre, une nouvelle colonne dont la première moitié est constituée par les sommes de lignes successives prises deux à deux et dont la seconde moitié est constituée de la même façon, par les différences deux à deux.

De cette seconde colonne on déduit de la même façon une troisième et ainsi de suite jusqu'à avoir constitué autant de colonnes que de facteurs. Les estimations cherchées sont dans l'ordre normal, les nombres de la dernière colonne obtenue.

Voici, par exemple, comment se transpose la méthode pour le plan 3^4 réduit au 1/3 que nous avons cité précédemment :

a) Les 27 résultats sont placés en colonne dans l'ordre normal,

b) De ces 27 résultats on déduit une nouvelle liste de 27 nombres, chacun d'eux étant pris trois fois, dans un ordre très simple, pour constituer 27 sommes de trois nombres, disposées en colonne,

c) La même opération appliquée à cette seconde colonne donne l'action A et toutes les interactions du type A X Y (soit 27 valeurs liées par 9 relations).

d) La même opération encore, mais appliquée cette fois aux 9 totaux des résultats pris trois par trois, donne directement l'action B et toutes les interactions du type B X (soit 9 valeurs liées par trois relations),

e) Trois totaux, trois par trois, obtenus à l'aide de la liste des 9 totaux utilisée en d), donne l'action de C (trois valeurs liées par une relation),

f) Il ne reste plus qu'à élever au carré les expressions obtenues, dans l'ordre, à les additionner à la suite trois par trois en soustrayant le terme correctif constant, pour obtenir les 13 lignes du tableau d'analyse de variance qu'il est facile d'intituler directement, en recopiant à la suite les désignations énumérées sur la figure 14.

On voit que si l'on dispose, comme c'est notre cas, d'une machine à calculer imprimante à bande, les intitulés des éléments d'analyse de variance sont les seules transcriptions manuscrites à faire.

Pour ceux qui désireraient utiliser cette méthode de calcul, indiquons brièvement comment sont constituées les matrices m pour les plans à q niveaux ($q = p^r$) comportant q^n essais (la matrice ne dépend pas des réductions opérées).

Il suffit d'établir la matrice carrée de côté q^2 qui donne les q^2 expressions du type AX, relatives à un plan à deux facteurs comportant q^2 essais. On découpe cette matrice en q tranches verticales égales. La première tranche est répétée q^{n-2} fois le long de sa diagonale descendante, puis, en repartant du haut, la seconde tranche, etc, de façon à constituer un carré de côté q^n.

Signalons, pour terminer, qu'une méthode "par colonnes", supprimant complètement l'emploi de tableaux rectangulaires est applicable aux plans factoriels complets, comportant un nombre quelconque de niveaux. Cette méthode parait avantageuse notamment lorsque l'on dispose d'une machine à calculer imprimante, à bande.

Au cours de cet exposé, nous avons abordé l'aspect purement technique des problèmes évoqués. Mais il est un point important que j'ai laissé dans l'ombre et à propos duquel je voudrais conclure.

Les applications auxquelles nous avons procédé ont nécessité, dans la plupart des cas, la collaboration étroite de deux personnes également responsables : l'homme de l'Art et le statisticien.

Le fait est certes fréquent en notre époque de spécialisation, mais il prend à mon avis une importance particulière pour les problèmes qui se rattachent aux plans d'expérience.

C'est qu'ici, en effet, l'oeuvre toute entière, l'expérience, depuis sa conception (choix des facteurs, élaboration des programmes) jusqu'à sa présentation finale (conclusions et réserves à formuler) nécessite l'intervention simultanée des deux personnes en cause.

Il faut que l'une se mêle sans cesse de ce qui semble concerner exclusivement l'autre. Ainsi le statisticien doit observer les dispositifs et le déroulement des essais, pour suggérer des améliorations éventuelles, tandis que l'homme de l'art doit s'interroger sur la validité et la signification des tests d'hypothèses.

Je crois que ceci n'est réellement possible que dans un climat de confiance et d'objectivité. C'est en tous cas dans ces conditions que nous avons pu conduire nos études à l'Institut de Soudure.