REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M. LEVEAU

Une utilisation de la loi lognormale

Revue de statistique appliquée, tome 5, nº 3 (1957), p. 111-120
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1957__5_3_111_0>

UNE UTILISATION DE LA LOI LOGNORMALE

par

M. LEVEAU

Ingénieur au Corps des Mines

La loi lognormale dont le caractère de généralité s'affirme de jour en jour davantage vient de trouver une nouvelle application. Un essai de prévision à moyen terme du cours des métaux non ferreux, utilisant une chaîne de Markoff pour les logarithmes des prix réels, nous conduit à un problème de sommation de variables lognormales liées.

Au delà du cas particulier envisagé ici, il peut y avoir de nombreux cas où une telle composition additive de variables lognormales est susceptible de se présenter.

A - LA PRÉVISION A MOYEN TERME DES COURS DES MÉTAUX NON FERREUX

Lorsque le gisement est inventorié et que l'on cherche à savoir s'il faut passer à l'exploitation, un des principaux éléments de la décision est constitué par le prix de vente probable du minerai au moment où la mine entrera dans la période de production; c'est-à-dire dans quelques années, quand les travaux d'établissement auront été effectués.

Or, les fluctuations du cours des métaux non ferreux atteignent une telle ampleur que l'investissement de capitaux, souvent considérables, dans une mine métallique, apparait comme un jeu fort risqué dans lequel on ignore même l'importance exacte de l'aléa qu'on supporte.

L'étude statistique des séries temporelles des prix réels - quotient du cours nominal observé par l'indice du coût de la vie - constitue une des voies possibles(1) permettant d'apporter un commencement de réponse aux questions que se pose le mineur :

- A quel cours moyen peut-on raisonnablement s'attendre, sur un certain nombre d'années qui suivent la mise en service de l'exploitation?

- Quelle est la possibilité que ce cours moyen soit inférieur à une fraction donnée du cours actuel?

REPRÉSENTATION DES COURS RÉELS PAR UN SCHÉMA ALÉATOIRE

Nous résumerons rapidement les principaux résultats obtenus, en renvoyant le lecteur à l'article déjà cité de M. E. Ventura pour la partie chiffrée et la discussion du schéma.

Après des essais variés, M. E. Ventura s'est finalement attaché à la variable $\xi = \frac{u_{t+1}}{u_t}$ rapport des cours réels des années t + 1 et t. Cette variable présente l'avantage d'être sans dimensions et correspond, semble-t-il, assez

(1) Pour une étude plus complète des différentes voies possibles, voir l'article de M. E. Ventura, Directeur du Bureau de Documentation Minière, Annales des Mines, mai 1956 et avril 1957.

bien à l'esprit des transactions en bourse des métaux où l'on s'intéresse, non aux variations absolues, mais à des pourcentages de baisse ou de hausse par rapport au cours précédent.

L'étude des corrélations de rangs successifs a montré qu'il était possible de considérer ξ comme une variable indépendante.

Si l'on admet une telle indépendance des valeurs successives de ξ la distribution des ξ étudiée dans le cas du cuivre et du plomb sur les 70 dernières années peut alors s'ajuster de façon très satisfaisante à une distribution gausso-logarithmique.

On peut donc résumer le schéma aléatoire retenu par la relation

$$\boxed{Lu_{t+1} - Lu_t = L\xi} \qquad \text{(A)}$$

Dans laquelle $L\xi$ est une variable normale, indépendante, de moyenne $L\gamma$ et de variance σ^2

Pour le cuivre aux U.S.A. :	$\gamma = 0{,}997$	$\sigma^2 = 0{,}0274$
Pour le plomb aux U.S.A. :	$\gamma = 1{,}002$	$\sigma^2 = 0{,}0185$

PRÉVISION DES COURS FUTURS

Si nous admettons que la relation (A), qui est vérifiée par les périodes 1882 1956, continue à être valable pour les prochaines années, ce qui suppose - et c'est bien là le point le plus délicat - l'indépendance des valeurs successives de ξ, nous pourrons fixer une fourchette indiquant l'importance de l'incertitude sur les cours futurs.

Avec les notations: p = délai nécessaire à la mise en service de l'exploitation
i = nombre d'années que l'on veut prendre en considération après la première année de production

il sera possible de répondre aux questions posées plus haut, si l'on sait effectuer la moyenne arithmétique de variables aléatoires :

$$\frac{S}{i+1} = \frac{1}{i+1}\left[u_{t+p} + u_{t+p+1} + \dots + u_{t+p+i}\right]$$

en s'attachant particulièrement à son espérance mathématique, à sa dispersion, et en cherchant à obtenir, si possible, une borne inférieure (à 95 % de chances par exemple).

Le problème revient finalement à étudier la somme de variables lognormales liées dont les médianes sont en progression géométrique et les variances logarithmiques en progression arithmétique.

En effet, si u_t est donné (cours moyen réel de l'année 1956 si t = 1956) $\frac{u_{t+p}}{u_t}$ est une variable lognormale de médiane γ^p et de variance logarithmique $p\sigma^2$.

C'est ce problème que nous sommes efforcé de résoudre.

B - MÉTHODE DE RÉSOLUTION

Notre étude montrera tout d'abord que l'on peut calculer, par une formule de récurrence, tous les moments de S. Malheureusement, ce résultat satisfaisant en théorie, nous est apparu en pratique comme difficile à utiliser autrement qu'à titre de vérification de la solution approchée proposée finalement :

Examinant plus particulièrement le cas fréquent où σ a une valeur faible, nous montrerons alors que S peut être considéré avec une très bonne approximation comme une variable "pseudo-lognormale" dont nous déterminerons les paramètres.

1) NOTATIONS ET FORMULATIONS GÉNÉRALES

$$S = u_{t+p} + u_{t+p+1} + u_{t+p+2} + \dots + u_{t+p+i}$$

Pour étudier la somme S, nous l'exprimerons en fonction des variables indépendantes ξ en posant

$$u_{t+p+i+1-j} = \xi_j \cdot u_{t+p+i-j} \qquad \text{pour } j = 1, 2, 3, \dots$$

et

$$\zeta_j = \xi_j \cdot (1 + \zeta_{j-1}) \qquad \text{avec } \zeta_0 = 0$$

la somme s'écrit

$$\boxed{S = u_{t+p-1} \cdot \zeta_{i+1}}$$

par la suite, nous introduirons les variables $x_j = L\frac{\xi_j}{\gamma}$ qui, par hypothèse, sont normales et indépendantes (o, σ^2)

ainsi que la variable aléatoire

$$Z_{j+1} = L\frac{\zeta_{j+1}}{\gamma} = x_{j+1} + L(1 + \gamma e^{Z_j})$$

2) SOLUTION GÉNÉRALE OBTENUE PAR LE CALCUL DES MOMENTS DE LA DISTRIBUTION DE $\frac{S}{i+1}$

$$\frac{S}{i+1} = \frac{u_t}{i+1} \cdot \frac{u_{t+p-1}}{u_t} \cdot \zeta_{i+1}$$

$$E\left[\frac{S}{i+1}\right]^r = \frac{u_t^r}{(i+1)^r} \cdot E\left[\frac{u_{t+p-1}}{u_t}\right]^r \cdot E\left[\zeta_{i+1}^r\right]$$

puisque

$$\frac{u_{t+p-1}}{u_t} \qquad \text{et} \qquad \zeta_{i+1}$$

sont indépendantes.

On connaît (1)

$$E\left[\frac{u_{t+p-1}}{u_t}\right]^r = \gamma^{r(p-1)} \cdot e^{\frac{(p-1)\sigma^2 r^2}{2}}$$

(1) On rappelle que, lorsque Ly est normal $(L\gamma', \sigma'^2)$)

$$E(y^r) = \gamma'^r e^{\frac{r^2\sigma'^2}{2}} \quad \text{ici } \gamma' = \gamma^{p-1} \text{ et } \sigma'^2 = (p-1)\sigma^2$$

le problème revient donc au calcul de $E\left[\zeta^r_{i+1}\right]$

or :

$$\zeta_{i+1} = \xi_{i+1} + 1^{(1+\zeta_i)}$$

$$\zeta^r_{i+1} = \xi^r_{i+1} \cdot \sum_{r_i=0}^{r_i=r} C^r_{r_i}\ \zeta^{r_i}$$

les variables étant indépendantes :

$$E\left[\zeta^r_{i+1}\right] = E\left[\xi^r_{i+1}\right] \cdot \sum_{r_i=0}^{r_i=r} C^r_{r_i}\ \cdot E\left[\zeta_i^{r_i}\right]$$

$$E\left[\zeta^r_{i+1}\right] = \gamma^r\ e^{\frac{r^2\sigma^2}{2}} \cdot \sum_{r_i=0}^{r_i=r} C^r_{r_i}\ \cdot E\left[\zeta_i^{r_i}\right]$$

formule de récurrence qui permet de calculer tous les moments puisqu'on connaît (1) le premier terme

Exemple de calcul des termes successifs de E (Z^r) lorsque $\gamma = 1$ en posant $e^{\frac{\sigma^2}{2}} = a$

pour r = 0 $E\left[\zeta^0_{i+1}\right] = E\left[\zeta^0_i\right] = \dots = 1$

r = 1 $E\left[\zeta_{i+1}\right] = a\left\{1 + E\left[\zeta_i\right]\right\}$

r = 2 $E\left[\zeta^2_{i+1}\right] = a^4\left\{1 + 2E\left[\zeta_i\right] + E\left[\zeta^2_i\right]\right\}$

r = 3 $E\left[\zeta^3_{i+1}\right] = a^9\left\{1 + 3E\left[\zeta_i\right] + E\left[\zeta^2_i\right] + E\left[\zeta^3_i\right]\right\}$

r =	0	1	2	3
ζ_0	1	0	0	0
ζ_1	1	a	a^4	a^9
ζ_2	1	$a + a^2$	$a^4(1+2a+a^4)$	$a^9(1+3a+\dots)$
ζ_3	1	$a + a^2 + a^3$	$a^4(1+2a+2a^2+a^4+2a^5+a^8)$	......
ζ_4	1	$a + a^2 + a^3 + a^4$	$a^4(1+2a+2a^2+2a^3+a^4+2a^5+2a^6$ $+a^8+2a^9+a^{12})$	
ζ_5	1	$a+a^2+a^3+a^4+a^5$	$a^4(1+2a+2a^2+2a^3+3a^4+2a^5+2a^6$ $+2a^7+a^8+2a^9+2a^{10}+a^{12}+2a^{13}+a^{16})$	

(1) $\zeta_0 = 0$ soit : $E\left[\zeta_0^{r_0}\right] = 0$ si $r_0 \neq 0$

$E\left[\zeta_0^{r_0}\right] = 1$ si $r_0 = 0$

Calcul du moment du 1er ordre :

$$E\left[\zeta_{i+1}\right] = \frac{a^{i+2} - a}{a - 1}$$

Calcul du moment du 2e ordre :

$$E\left[\zeta_{i+1}^2\right] = a^4 \left\{1 + 2\frac{a^{i+1} - a}{a - 1} + E\left[\zeta_i^2\right]\right\}$$

et, en effectuant :

$$E\left[\zeta_{i+1}^2\right] = \frac{a^4}{a - 1}\left\{- (a+1)\frac{a^{4(i+1)} - 1}{a^4 - 1} + 2\, a^{i+1}\ \frac{a^{3(i+1)} - 1}{a^3 - 1}\right\}$$

<u>Application au cas où i = 4, p = 4</u> et où σ est petit : $e^{\frac{\sigma^2}{2}} = a = 1 + \varepsilon$

$$E\left[\frac{S}{5\,u_t}\right] = \frac{a^3}{5} E\left[\zeta_5\right] = \frac{a^9 - a^4}{5\varepsilon}$$

d'où :

$$E\left[\frac{S}{5\,u_t}\right] = 1 + 6\varepsilon + 16\varepsilon^2 + 25\varepsilon^3 + \dots$$

$$E\left[\frac{S}{5\,u_t}\right]^2 = \frac{a^{12}}{25} E\left[\zeta_5^2\right] = 1 + 22{,}4\,\varepsilon + 248{,}4\,\varepsilon^2 + 1822{,}4\,\varepsilon^3 + \dots$$

soit : variance $\sum^2 = E\left[\frac{S}{5\,u_t}\right]^2 - \left\{E\left[\frac{S}{5\,u_t}\right]\right\}^2 = 10{,}4\,\varepsilon + 180{,}4\,\varepsilon^2 + 1580{,}4\,\varepsilon^3 + \dots$

Si l'on a (cas du cuivre aux U.S.A.)

$$\sigma = 0{,}72 \times 2{,}302 = 0{,}166 \qquad \frac{\sigma^2}{2} = 0{,}0137$$

$$a = 1 + 0{,}0137 + \frac{(0{,}0137)^2}{2} + \dots = 1 + 0{,}0138 \qquad \varepsilon = 0{,}0138$$

$$m = E\left[\frac{S}{5\,u_t}\right] = 1{,}086$$

$$\sum^2 = 0{,}182$$

Comme nous allons le voir maintenant, la loi obtenue est très proche, pou σ faible, d'une loi lognormale : si la loi était rigoureusement lognormale, le valeurs trouvées correspondraient à un écart-type des logarithmes

$$\sigma' = 0{,}376 \qquad \text{avec } \gamma' = 1{,}0029$$

qui donnerait :

95% de chances d'avoir $\frac{S}{5} > 54\%\ u_t$

84% " " " $\frac{S}{5} > 69\%\ u_t$

Il y a encore :

61% de chances d'avoir $\frac{S}{5} > 90\%\ u_t$

3) SOLUTION PARTICULIÈRE DANS LE CAS OU σ EST PETIT

Nous nous proposons de montrer que, si z_j est une variable normale,

$$z_{j+1} = x_{j+1} + L(1 + \gamma e^{z_j})$$

est très voisine aussi d'une variable normale. Comme $z_1 = x_1$ est une variable normale $(0, \sigma^2)$ cette démonstration justifiera la propriété déjà indiquée au début: S est une variable très proche d'une variable lognormale dont nous donnerons les paramètres.

Soit $\Psi(u)$ la fonction caractéristique de $L(1 + \gamma e^{z_j})$

la fonction caractéristique de x_{j+1}, variable normale, est $e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}}$

la fonction caractéristique de ζ_{j+1} sera alors $\varphi(u) = e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}} \cdot \Psi(u)$

Calculons donc $\Psi(u)$ lorsque ζ_j est une variable normale $(L\gamma_j \,;\, s_j^2\sigma^2)$,

nous poserons $y = \dfrac{\zeta_j - L\gamma_j}{s_j\,\sigma}$ variable normale réduite

$$\Psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuL(1+\gamma e^{\zeta_j})}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \qquad \text{avec } \zeta_j = s_j\,\sigma\, y + L\gamma_j$$

Mais comme σ est petit, on peut effectuer un développement limité par rapport à σ, en remplaçant z_j par son expression en fonction de y. On intègre ensuite par rapport à y. Il vient alors, tous calculs faits (1) en introduisant la fonction caractéristique de 2^e espèce :

$$L\varphi(u) = L\Psi(u) - \frac{u^2\sigma^2}{2}$$

$$L\varphi(u) = \left\{L\gamma_{j+1}\right\} \cdot iu - \left\{(s_{j+1}\sigma)^2\right\}\frac{u^2}{2!} - \left\{3\lambda^3(1-\lambda)(s_j\,\sigma)^4\right\}\frac{iu^3}{3!} + O(\sigma^6)$$

$O(\sigma^6)$ désignant un terme de l'ordre de σ^6

$$\lambda = \frac{\gamma\gamma_j}{1+\gamma\gamma_j}$$

$$\gamma_{j+1} = \frac{1}{1-\lambda} + \frac{\lambda}{2}s_j^2\,\sigma^2 + \frac{\lambda(1-5\lambda+s\lambda^2)}{8}s_j^4\,\sigma^4$$

$$s_{j+1}^2 = 1 + \lambda^2\, s_j^2 + \frac{\lambda^2(1-\lambda)(3-5\lambda)}{2}\, s_j^4\,\sigma^2$$

Le coefficient d'assymétrie de K. Pearson est :

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \neq \frac{\lambda^6 s_j^8\,\sigma^8(1-\lambda)^2}{(1+\lambda^2 s_j^2)^3\sigma^6} = \frac{\lambda^6\, s_j^8\,(1-\lambda)^2}{(1+\lambda^2 s_j^2)^3}\,\sigma^2$$

avec les valeurs de l'application numérique on obtient :

$$\beta_1 < \frac{\sigma^2}{8} \neq 3,5\ .\ 10^{-3}$$

L'assymétrie est donc positive mais extrêmement faible.

(1) Les calculs sont donnés en annexe.

Le coefficient d'aplatissement

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3 + \frac{O(\sigma^6)}{O(\sigma^4)} = 3 + O(\sigma^2)$$

et on est donc très voisin de la valeur 3 de la distribution normale.

On a donc démontré que :

La distribution des z_{j+1} est très voisine d'une distribution normale $(L\gamma_{j+1}, s^2_{j+1}\sigma^2)$

En négligeant le terme d'assymétrie qui est positif, on surestime les valeurs négatives de $z_{j+1} - L\gamma_{j+1}$, c'est donc une borne inférieure que l'on obtiendra pour S, en calculant la valeur inférieure de l'intervalle de confiance de LS, supposé normal.

Pratiquement, pour passer de la distribution de z_j, variable normale $(L\gamma_j, s_j^2\sigma^2)$ à celle de z_{j+1}, variable normale $(L\gamma_{j+1}, s^2_{j+1}\sigma^2)$, on pourra utiliser les formules de récurrence obtenues en se limitant au 2[e] ordre

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_{j+1} &= \frac{1}{1-\lambda} + \frac{\lambda}{2} s_j^2\,\sigma^2 \\ s^2_{j+1} &= 1 + \lambda^2\, s_j^2 \\ \text{avec} \quad \lambda &= \frac{\gamma\gamma_j}{1+\gamma\gamma_j} \end{aligned}}$$

Application à la suite des z_j, lorsque $\gamma = 1$ en se limitant au 2[e] ordre avec i = 4

ζ_1	$\gamma_1 = 1$	$s_1^2 = 1$
ζ_2	$\gamma_2 = 2 + \frac{\sigma^2}{4}$	$s_2^2 = \frac{5}{4}$
ζ_3	$\gamma_3 = 3 + \frac{7}{8}\sigma^2$	$s_3^2 = \frac{14}{9}$
ζ_4	$\gamma_4 = 4 + \frac{35}{24}\sigma^2$	$s_4^2 = \frac{30}{16}$
ζ_5	$\gamma_5 = 5 + \frac{53}{24}\sigma^2$	$s_5^2 = \frac{11}{5}$

mais
$$\frac{S}{5\,u_t} = \frac{1}{5}\,\frac{u_{t+p-1}}{u}\,.\,e^{\zeta_{i+1}}$$

d'où :
$$L\frac{S}{5\,u_t} = L\left[\frac{u_{t+p-1}}{u_t}\right] + \zeta_{i+1} - L\,5$$

somme de deux termes indépendants :

une variable normale $\left[L1, (p-1)\sigma^2\right]$ et une variable pseudo-normale

$$\left[L(1+\frac{53}{120}\sigma^2), \frac{11}{5}\sigma^2\right]$$

$L \frac{S}{5\,u_t}$ est donc une variable pseudo-normale $\left[L(1 + \frac{53}{120}\sigma^2)\ ,\left\{\frac{11}{5}+(p-1)\right\}\sigma^2 \right]$

d'où, pour $p = 4$ $\quad L \frac{S}{5\,u_t}$ est une variable $\neq$ normale $[\log \gamma'\ , \sigma'^2]$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \gamma' = 1 + \frac{53}{120}\sigma^2 \\ \sigma' = \sqrt{\frac{26}{5}}\,\sigma \end{cases}$$

Application au cas du cuivre : $\sigma = 0{,}166$ $\qquad \sigma^2 = 2{,}75\ 10^{-2}$

$\sigma' = 0{,}378$

$\gamma' = 1{,}012$

Si l'on rapproche ces chiffres de ceux trouvés page 115 ($\sigma' = 0{,}376$, $\gamma' = 1{,}003$) on voit que la concordance est très satisfaisante.

4) RÉSULTATS OBTENUS

Sous réserve de la validité des hypothèses de départ, nous pouvons donc maintenant répondre au mineur :

Le cours moyen des années qui nous intéressent est une variable aléatoire tirée d'une distribution très voisine d'une distribution lognormale et non d'une distribution normale, comme on l'admet assez volontiers. Si l'écart entre ces deux types de distribution n'apparaît guère, en raison de la faible valeur de la variance logarithmique, au voisinage de la valeur moyenne, il n'en est guère de même lorsqu'on s'en éloigne. En particulier, les fortes valeurs ont plus de chances de se réaliser que dans le cas de la distribution normale.

L'espérance mathématique se situe sensiblement au niveau du cours actuel. La dispersion vient surtout de l'incertitude sur le cours de la première année de production, et le schéma retenu ne prévoit pas une connaissance plus précise de la moyenne de plusieurs années consécutives que celle d'une seule année. Il n'existe aucune action de rappel vers une valeur centrale.

La fourchette obtenue constitue un maximum et on peut affirmer, dans le cas considéré où $p = i = 4$ (cours moyen des années 1960, 61, 62, 63, 64, connaissant les cours de 1956) avec $\gamma = 1$ qu'il existe une probabilité que le cours moyen soit supérieur à $10^{2-y\sigma}\%$ du cours actuel, au moins égale à

$$F(y) = \int_{-\infty}^{Y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

ce qui donne, dans le cas particulier du cuivre : 83 % de chances d'avoir un cours moyen $> 70\%\ u_t$.

Signalons, en terminant, que le schéma a été soumis au calcul par la Compagnie des Machines Bull sur calculateur électronique Gamma en utilisant une méthode par tirage de nombres au hasard simulant des expériences - dite méthode de Monte-Carlo -. Les chiffres obtenus concordent en probabilité avec les résultats indiqués ici.

CONCLUSION

A notre connaissance, les études de séries temporelles n'ont guère fait intervenir la distribution lognormale. Or, il semble bien qu'elle convienne dans un assez grand nombre de cas et, en particulier, dans ceux où l'on cherche à expliquer un mécanisme de cours successifs, où, plutôt que des différences aléatoires en valeur absolue, jouent des différences aléatoires en valeur relative.

Dès lors, il semble qu'il y aurait intérêt, pour tous ceux qui étudient les séries temporelles, à ne pas méconnaître les effets multiplicateurs qui interviennent dans certains phénomènes, et qui justifient le recours à la loi lognormale; de même que, lorsque l'on suppose avoir affaire à des actions additives, il est courant de faire appel à la loi normale : L'une et l'autre sont de très grandes généralités en tant que lois limites.

Les calculs que nous avons présentés permettent d'effectuer l'addition et par suite la moyenne arithmétique, de variables lognormales dont on connaît le mode de génération dans le temps. Le cas particulier, fréquent dans la pratique, où l'on a affaire à une variance logarithmique faible, a fait ici l'objet de développements conduisant à des formules de récurrence facilement applicables.

BIBLIOGRAPHIE

- Annales des Mines - numéros de Mai 1956 et d'Avril 1957 sur le cours des métaux.
- Annales des mines - numéro de Décembre 1955 sur les propriétés de la loi lognormale et son application dans les évaluations de gisement.
- H. Cramer - Mathematical methods of statistics.
- Paul Lévy - Théorie de l'addition des variables aléatoires.
- E. Morice et Chartier - Méthode statistique.

ANNEXE

$$L(1+\gamma e^{z_j}) = L(1+\gamma\gamma_j\, e^{s_j\sigma y}) = L\left\{(1+\gamma\gamma_j)\left[1+\frac{\gamma\gamma_j}{1+\gamma\gamma_j}(e^{s_j\sigma y}-1)\right]\right\}$$

soit, en faisant $\frac{\gamma\gamma}{1+\gamma\gamma_j} = \lambda$, puisque σ est petit :

$$= L(1+\gamma\gamma_j) + \lambda\sigma s_j y + \alpha y^2 + \beta y^3 + \delta y^4 + O(\sigma^5)$$

avec

$$\alpha = \frac{\lambda(1-\lambda)s_j^2}{2!}\cdot\sigma^2$$

$$\beta = \frac{\lambda(1-\lambda)(1-2\lambda)s_j^3}{3!}\cdot\sigma^3$$

$$\delta = \frac{\lambda(1-)(1-6\lambda+6\lambda^2)s_j^4}{4!}$$

que nous porterons dans l'expression de $\Psi(u)$

d'où ;

$$\Psi(u) = e^{iuL(1+\gamma\gamma_j)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{iu\lambda\sigma s_j y + iu\alpha y^2 + iu(\beta y^3+\delta y^4+\ldots)}\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

nous poserons $$v = y\sqrt{1-2iu\alpha} - \frac{iu\lambda\sigma s_j}{\sqrt{1-2iu\alpha}}$$

et nous intégrerons, par rapport à v (justifié par prolongement analytique)

$$\Psi(u) = \frac{e^{iuL(1+\delta\gamma_j) - \frac{(u\lambda\sigma s)^2}{2(1-2iu\alpha)}}}{(1-2iu\alpha)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} (1 + iu\beta y^3 + iu\delta y^4 + \ldots)\, dv$$

$$= e^{iuL(1+\delta\gamma_j) - \frac{u^2(\lambda\sigma s)^2}{2(1-2iu\alpha)} - \frac{1}{2}L(1-2iu\alpha)} \left\{ I - 3\beta\lambda\sigma s_j u^2 + 3iu\delta + O(\sigma^6) \right\}$$

soit :

$$L\Psi(u) = iuL(I+\delta\gamma_j) - \frac{u^2(\lambda\sigma s_j)^2}{2(1-2iu\alpha)} - \frac{1}{2}L(I-2iu\alpha) - 3\beta\lambda\sigma s_j u^2 + 3iu\delta + O\sigma^6)$$

comme

$$L\varphi(u) = -\frac{u^2\sigma^2}{2} + L\Psi(u)$$

$$L\varphi(u) = -\frac{u^2\sigma^2}{2} + iu\left\{L(1+\delta\gamma_j) + 3\delta + \alpha\right\} - \frac{u^2}{2}\left\{(\lambda\sigma s_j)^2 + 6\beta\lambda\sigma s_j + 2\alpha^2\right\}$$
$$- iu^3\left\{(\lambda s_j\sigma)^2\alpha\right\} + O(\sigma^6)$$

puisque : $$(1-2iu\alpha)^{-1} = 1 - 2iu\alpha + O(\sigma^4)$$

et $$-\frac{1}{2}L(1-2iu\alpha) = iu\alpha - u^2\alpha^2 + O(\sigma^6)$$

d'où finalement :

$$L\varphi(u) = iu\left\{L\left[\gamma_{j+1}\right]\right\} - \frac{u}{2!}\left\{s_{j+1}^2\sigma^2\right\} - \frac{iu^3}{3!}\left\{3\lambda^3 s_j^4\sigma^4(1-\lambda)\right\} + O(\sigma^6)$$

avec :

$$\begin{cases} \gamma_{j+1} = I + \delta\gamma_j\left\{1 + \frac{1-\lambda}{2}(\sigma s_j)^2 + \frac{1-\lambda}{8}(1-5\lambda+5\lambda)(\sigma s_j)^4\right\} \\ s_{j+1}^2 = 1 + \lambda^2 s_j^2 + \frac{\lambda^2(1-\lambda)(3-5\lambda)}{2} s_j^4\sigma^2 \end{cases}$$