

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

L. PILLET

L'analyse de la variance et les plans factoriels dans leurs applications à l'étude de la conservation des agrumes

Revue de statistique appliquée, tome 3, n° 3 (1955), p. 39-61

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1955__3_3_39_0

© Société française de statistique, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ANALYSE DE LA VARIANCE ET LES PLANS FACTORIELS

dans leurs applications à l'étude de la conservation des agrumes

par

L. PILLET

Ingénieur I.C.A.M.

Lorsqu'une mère de famille épluche une orange pour l'un de ses enfants, s'imaginet-elle que celle-ci a été cueillie depuis une vingtaine de jours déjà, qu'elle a subi toutes les injures des manipulations, du temps, des transports maritimes et que, malgré tout cela, elle est encore en parfait état de conservation ?

La conservation est un des problèmes majeurs de la profession; de nombreux laboratoires en France, en Espagne, en Amérique... travaillent cette question.

Depuis quelques années, quantité de produits sont présentés, qui s'avèrent d'efficacité très inégale pour assurer la conservation.

Dans ce domaine, les travaux de laboratoire sont insuffisants; ils ne peuvent porter que sur quelques unités et pas souvent sur des marchandises fraîches; il est nécessaire de les compléter par des essais industriels qui impliquent un caractère de masse et des conditions réelles de travail (manutention, traitements divers, etc.) qui ne sont jamais réalisées en laboratoire.

Il a donc paru nécessaire d'engager des essais systématiques de l'ensemble des produits présentés, simples ou complexes, en vue de déterminer le produit susceptible de donner le meilleur résultat au stade industriel et, éventuellement, de les améliorer.

On trouvera, dans les pages qui suivent la description et l'analyse de quelques-uns des essais comparatifs réalisés dans une importante entreprise de conditionnement d'agrumes.

Nous n'avions au départ aucune idée de la façon dont pouvait réagir aux divers traitements la masse qui leur était soumise.

- Les écarts de nombre de fruits pourris des divers lots seraient-ils de quelques unités seulement, auquel cas les méthodes statistiques d'interprétation seraient indispensables pour faire ressortir les tendances systématiques ?

- Seraient-ils, au contraire, d'importance telle que l'interprétation des résultats pourrait s'effectuer à vue, auquel cas les méthodes statistiques interviendraient seulement pour déterminer une précision expérimentale ?

- La précision expérimentale dépendant de l'importance des "résidus" expérimentaux, c'est-à-dire de la variance résiduelle des expériences, de quel ordre de grandeur seraient ces résidus expérimentaux ?

- Les plans expérimentaux demeurant identiques, les résidus expérimentaux seraient-ils comparables d'une expérience à une autre, d'une variété à une autre ?

- De quelle importance les lots soumis aux essais devaient-ils être pour obtenir une précision valable ?

Telles étaient quelques-unes des questions qui se posaient à notre esprit lorsque nos premiers essais furent entrepris.

Un certain nombre d'hypothèses formulées dans le cadre des méthodes statistiques nous dictèrent nos plans expérimentaux.

Le choix d'un plan expérimental est très important ; en effet, l'analyse de la variance repose essentiellement sur la comparaison :

- des variances des écarts liés aux causes contrôlées de variation,
- de la variance résiduelle - "résidus expérimentaux" - ou variance des écarts dûs à toutes les causes non contrôlées de variation.

On peut alors avancer que, dans une analyse de la variance, de tous les postes de celle-ci, le plus important est celui des résidus expérimentaux :

- de la variance résiduelle dépend la précision expérimentale,
- de la précision expérimentale dépend la finesse de l'interprétation.

En effet, des écarts qui n'apparaîtraient pas significatifs de l'action d'une cause contrôlée de variation en présence de résidus trop importants, pourraient devenir significatifs avec des résidus plus réduits ; en d'autres termes, des résidus expérimentaux excessifs, eu égard aux autres variances, peuvent masquer l'effet systématique d'une cause sous contrôle, dont on cherche précisément à déterminer l'effet particulier dans la dispersion des écarts constatés.

Les seuils d'interprétation de 5 chances sur 100 ou 1 chance sur 100 généralement adoptés sont justement sévères pour éviter le risque d'une interprétation erronée.

L'analyse de la variance, suivant le mécanisme de toute analyse, est une décomposition.

Ici, la décomposition est de deux ordres :

- celle qui, sans affecter les résidus expérimentaux, participe à l'analyse d'une cause principale de variations, dans les limites permises par le plan expérimental prévu.

- celle qui participe à l'apuration des résidus expérimentaux ; à chaque stade de cette décomposition correspond un échelon d'apuration des résidus.

Nous englobons dans ces considérations la technique de la covariance en ce qu'elle apporte à l'analyse de la variance.

La seconde peut n'être effectuée que pour les seuls termes sur lesquels on porte son attention.

La première doit exploiter tout ce qui, dans le plan expérimental peut concourir à l'apuration des résidus, donc à l'augmentation de la précision expérimentale et par voie de conséquence à la qualité de l'interprétation statistique.

Tels sont l'esprit et le mécanisme de l'ANALYSE DE LA VARIANCE.

ESSAI N° 1

Au sein d'une masse de fruits aussi homogène que possible furent extraits six lots comprenant chacun, en vue de dépouillements à 10 jours, 20 jours et 30 jours, trois fois 14 échantillons de 100 fruits qui subirent les opérations suivantes :

- Lot T₁, vierge de traitement et de travail,
- Lot T₂, chaîne de travail, aucun traitement,
- Lot A, chaîne de travail et traitement au produit A,
- Lot B, chaîne de travail et traitement au produit B,
- Lot C, chaîne de travail et traitement au produit C,
- Lot D, chaîne de travail et traitement au produit D.

Tous ces lots furent disposés, en suivant une table de nombres au hasard dans une chambre de traitement transformée en chambre d'essai maintenue à une température de 25°C et 80 % d'humidité, conditions sévères.

Les résultats à 10 jours, 20 jours et 30 jours sont consignés dans le tableau

ESSAI N° 1

NOMBRE DE FRUITS POURRIS (sur 100)

Echantillons	10 jours						20 jours						30 jours					
	T1	T2	A	B	C	D	T1	T2	A	B	C	D	T1	T2	A	B	C	D
1	0	2	3	1	3	0	6	4	3	6	2	2	10	20	4	10	10	3
2	3	1	3	2	1	0	3	4	5	0	6	4	7	15	9	4	7	3
3	1	3	4	1	3	0	3	9	4	0	6	2	1	9	10	0	19	6
4	1	3	2	0	3	0	8	3	5	2	4	0	7	10	15	5	16	2
5	8	1	3	1	1	3	1	2	4	5	8	4	12	5	12	5	11	4
6	3	3	3	0	2	2	5	4	10	2	8	1	0	10	4	5	12	3
7	3	4	7	1	2	0	1	7	5	2	8	0	5	2	21	2	11	6
8	4	5	5	1	4	0	3	9	4	0	8	2	10	7	5	4	20	6
9	4	3	3	2	2	2	4	9	5	3	2	0	6	9	10	4	12	1
10	0	6	0	1	2	1	8	2	3	1	5	0	10	11	7	4	17	5
11	5	3	2	2	0	0	8	4	2	2	2	3	7	13	4	7	20	7
12	6	2	5	0	1	1	4	6	8	0	5	0	3	9	7	6	20	7
13	2	3	3	1	5	0	6	4	2	3	1	2	2	16	7	6	8	5
14	0	9	2	1	2	0	1	8	8	0	4	0	4	12	8	4	25	3
Σ	40	48	45	14	31	9	61	75	68	26	69	20	84	148	123	66	208	61
Moy.	2,86	3,43	3,21	1,00	2,21	0,64	4,36	5,36	4,86	1,86	4,92	1,43	6,00	10,57	8,78	4,71	14,85	4,36
%	2,85	3,42	3,2	1,00	2,2	0,64	4,35	5,35	4,85	1,85	4,9	1,4	6,0	10,5	8,8	4,7	14,9	4,35

Comme on le voit les résultats sont très distincts; les lots ont réagi avec une grande sensibilité à l'action des divers traitements.

Un expérimentateur non informé des méthodes statistiques d'interprétation pourrait, à l'aide de certains groupements de résultats et de quelques représentations graphiques éventuellement, comme nous l'avons fait nous-mêmes, tirer des conclusions valables; un esprit scientifique éprouverait néanmoins un certain malaise intellectuel à ne pouvoir déterminer le degré de confiance à accorder à son interprétation empirique et subjective; les méthodes statistiques offrent le moyen de dissiper ce malaise en permettant de mesurer la précision de l'expérience et d'engager plus sûrement des essais ultérieurs.

Ici, en l'absence de résultats antérieurs, il était nécessaire de déterminer dans ce type d'expériences, nous sommes en face d'un caractère QUALITATIF de la variable aléatoire: BON-MAUVAIS (loi binomiale).

Un certain nombre de méthodes permettent l'interprétation des séries à caractère qualitatif à base de test χ^2 ; mais en suivant cette voie:

- nous nous heurtons à certaines impossibilités d'emploi,
- nous nous privons de la richesse de l'analyse de la variance.

Nous avons donc préféré engager l'analyse de la variance bien que nous ne nous trouvions pas non plus dans des conditions idéales d'emploi; en effet les deux grandes conditions nécessaires pour effectuer une analyse de la variance:

- normalité des distributions (qui sous-entend leur symétrie)
- stabilité des variances ou leur "identité statistique", ne sont pas remplies dans notre cas.

Toutefois des auteurs ont proposé des changements de variable de la variable aléatoire d'origine tels que la variable aléatoire transformée satisfasse sensiblement à ces conditions (1).

(1) cf. remarque p.45

Dans le cas d'une distribution binomiale, il a été proposé le changement de variable suivant :

$$y = \arcsin \sqrt{x}$$

x étant une fréquence, c'est-à-dire ici la proportion d'unités pourries dans un échantillon de n observations ; cette transformation, peu efficace aux extrémités, est améliorée en comptant les rapports :

$$x = \frac{o}{n} \quad \text{pour} \quad x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}$$

et $x = \frac{n}{n} \quad \text{pour} \quad x = \left(n - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{n}$

C'est cette transformation que nous avons utilisée dans cet essai et dans quelques autres. Les valeurs de transformation nous ont permis de dresser les tableaux 1a, 1b, 1c ci-après.

ESSAI N° 1 - DONNEES A 10 JOURS TRANSFORMEES -

TABLEAU 1a

Ech.	T1	T2	A	B	C	D	Σ	Σ^2
1	2,8	8,1	10,0	5,7	10,0	2,8	39,4	1.552,36
2	10,0	5,7	10,0	8,1	5,7	2,8	42,3	1.789,29
3	5,7	10,0	11,5	5,7	10,0	2,8	45,7	2.088,49
4	5,7	10,0	8,1	2,8	10,0	2,8	39,4	1.552,36
5	16,4	5,7	10,0	5,7	5,7	10,0	53,5	2.862,25
6	10,0	10,0	10,0	2,8	8,1	8,1	49,0	2.401,00
7	10,0	11,5	15,3	5,7	8,1	2,8	53,4	2.851,56
8	11,5	12,9	12,9	5,7	11,5	2,8	57,3	3.283,29
9	11,5	10,0	10,0	8,1	8,1	8,1	55,8	3.113,64
10	2,8	14,2	2,8	5,7	8,1	5,7	39,3	1.544,49
11	12,9	10,0	8,1	8,1	2,8	2,8	44,7	1.998,09
12	14,2	8,1	12,9	2,8	5,7	5,7	49,4	2.440,36
13	8,1	10,0	10,0	5,7	12,9	2,8	49,5	2.450,25
14	2,8	17,5	8,1	5,7	8,1	2,8	45,0	2.025,00
Σ	124,4	143,7	139,7	78,3	114,8	62,8	663,7	31.952,43
Σ^2	15.475,36	20.649,69	19.516,09	6.130,89	13.179,04	3.943,84	78.894,91	Termes correctifs
								$\frac{663,7^2}{84} =$
								5.244
Eléments de calcul								
Variation totale	6.347 - 5.244					Somme des carrés		
Variation entre traitements	$\frac{78.894,91}{14} - 5.244$					1.103		
Variation entre échantillons	$\frac{31.952,43}{6} - 5.244$					391		
Résidus						81		
						631		

Pour mémoire : Somme des carrés des mesures transformées = 6.347.

ESSAI N° 1 - DONNEES A 20 JOURS TRANSFORMEES
TABLEAU 1b

Ech.	T1	T2	A	B	C	D	Σ	Σ^2
1	14,2	11,5	10,0	14,2	8,1	8,1	66,1	4.369,21
2	10,0	11,5	12,9	2,8	14,2	11,5	62,9	3.956,41
3	10,0	17,5	11,5	2,8	14,2	8,1	64,1	4.108,81
4	16,4	10,0	12,9	8,1	11,5	2,8	61,7	3.806,89
5	5,7	8,1	11,5	12,9	16,4	11,5	66,1	4.369,21
6	12,9	11,5	18,4	8,1	16,4	5,7	73,0	5.329,00
7	5,7	15,3	12,9	8,1	16,4	2,8	61,2	3.745,44
8	10,0	17,5	11,5	2,8	16,4	8,1	66,3	4.395,69
9	11,5	17,5	12,9	10,0	8,1	2,8	62,8	3.943,84
10	16,4	8,1	10,0	5,7	12,9	2,8	55,9	3.124,81
11	16,4	11,5	8,1	8,1	8,1	10,0	62,2	3.868,84
12	11,5	14,2	16,4	2,8	12,9	2,8	60,6	3.672,36
13	14,2	11,5	8,1	10,0	5,7	8,1	57,6	3.317,76
14	5,7	16,4	16,4	2,8	11,5	2,8	55,6	3.091,36
Σ	160,6	182,1	173,5	99,2	172,8	87,9	876,1	55.099,63
Σ^2	25.792,36	33.160,41	30.102,25	9.840,64	29.859,84	7.726,41	136.481,91	Terme correctif $\frac{876,1^2}{84} = 9.137$

Eléments de calcul

Variation totale

$10.743 - 9.137$

Variation entre traitements

$\frac{136.481,91}{14} - 9.137$

Variation entre échantillons

$\frac{55.099,63}{6} - 9.137$

Résidus

Somme des carrés

1.606

612

46

948

Pour mémoire : Somme des carrés des mesures transformées = 10.743.

ESSAI N° 1 - DONNEES A 30 JOURS TRANSFORMEES -
TABLEAU 1c

Ech.	T1	T2	A	B	C	D	Σ	Σ^2
1	18,4	26,6	11,5	18,4	18,4	10,0	103,3	10.670,89
2	15,3	22,8	17,5	11,5	15,3	10,0	92,4	8.537,76
3	5,7	17,5	18,4	2,8	25,8	14,2	84,4	7.123,36
4	15,3	18,4	22,8	12,9	23,6	8,1	101,1	10.221,21
5	20,3	12,9	20,3	12,9	19,4	11,5	97,3	9.467,29
6	2,8	18,4	11,5	12,9	20,3	10,0	75,9	5.760,81
7	12,9	8,1	27,3	8,1	19,4	14,2	90,0	8.100,00
8	18,4	15,3	12,9	11,5	26,6	14,2	98,9	9.781,21
9	14,2	17,5	18,4	11,5	20,3	5,7	87,6	7.673,76
10	18,4	19,4	15,3	11,5	24,4	12,9	101,9	10.383,61
11	15,3	21,1	11,5	15,3	26,6	15,3	105,1	11.046,01
12	10,0	17,5	15,3	14,2	26,6	15,3	98,9	9.781,21
13	8,1	23,6	15,3	14,2	16,4	12,9	90,5	8.190,25
14	11,5	20,3	16,4	11,5	30,0	10,0	99,7	9.940,09
Σ	186,6	259,4	234,4	169,2	313,1	164,3	1.327,0	126.677,46
Σ^2	34.819,56	67.288,36	54.943,36	28.628,64	98.031,61	26.944,49	310.706,02	Terme correctif $\frac{1.327^2}{84} = 20.963$

Eléments de calcul

Variation totale

$23.604 - 20.963$

Variation entre traitements

$\frac{310.706,02}{14} - 20.963$

Variation entre échantillons

$\frac{126.677,46}{6} - 20.963$

Résidus

Somme des carrés

2.641

1.230

150

1.261

Pour mémoire : Somme des carrés des mesures transformées = 23.604.

Ce qui importait ici était de comparer entre eux les résultats à chacun des stades de conservation : 10 jours, 20 jours et 30 jours ; il nous importait peu de considérer l'ensemble et d'aboutir à des interactions JOURS-TRAITEMENTS, ECHANTILLONS-TRAITEMENTS, etc...

Les analyses de variance à 10 jours, 20 jours et 30 jours se présentent ainsi :

ANALYSE DE VARIANCE

A 10 JOURS

Origine des Variations	Somme des carrés	Nombre de degrés de liberté	Variance	TEST F			
				Expé- ri- mental	Théorique		
					0,05	0,01	Signific.
Total	1.103	83					
Traitements	391	5	78,20	8,05	2,37	3,34	S
Echantillons	81	13	6,23	< 1			NS
Résidus expérimentaux	631	65	9,71				

A 20 JOURS

Origine des Variations	Somme des carrés	Nombre de degrés de liberté	Variance	TEST F			
				Expé- ri- mental	Théorique		
					0,05	0,01	Signific.
Total	1.606	83					
Traitements	612	5	102,40	7,02	2,37	3,34	S
Echantillons	46	13	3,53	< 1			NS
Résidus expérimentaux	948	65	14,58				

A 30 JOURS

Origine des Variations	Somme des carrés	Nombre de degrés de liberté	Variance	TEST F			
				Expé- ri- mental	Théorique		
					0,05	0,01	Signifiv.
Total	2.641	83					
Traitements	1.230	5	246,00	12,74	2,37	3,34	S
Echantillons	150	13	11,53	< 1			NS
Résidus expérimentaux	1.261	65	19,31				

On constate que la masse de fruits soumise aux essais était bien homogène (différence non significative entre les échantillons).

La variable résiduelle nous fournit la mesure de la précision expérimentale ;

la plus petite différence significative entre deux moyennes, dans la variable transformée, est $1,96 \sigma_d$, au seuil 0,05.

On a :

$$\text{à 10 jours : } \sigma_{d_{10}} = \sqrt{\frac{2 \times 9,71}{14}} = 1,177$$

$$\text{à 20 jours : } \sigma_{d_{20}} = \sqrt{\frac{2 \times 14,58}{14}} = 1,443$$

$$\text{à 30 jours : } \sigma_{d_{30}} = \sqrt{\frac{2 \times 19,31}{14}} = 1,660$$

d'où les seuils de signification correspondants :

2,31 - 2,83 - 3,25

Dans cet essai, on remarque que la variance résiduelle augmente régulièrement de 10 à 20 et 30 jours ; malgré le changement de variable, la dispersion a encore tendance à croître en même temps que la valeur moyenne.

Un certain nombre d'expériences de ce type, réalisées sur des variétés différentes, à des périodes de maturité différentes, avec des produits de traitement différents, nous permirent de définir les conditions optima à réaliser pour obtenir une précision suffisante ; à savoir : 8 à 10 échantillons de 80 à 100 fruits par lot.

La connaissance de la précision de nos essais fut pour nous d'une utilité immédiate comme on va le voir.

Nous citerons ici deux exemples qui nous ont paru particulièrement typiques :

- identification de deux produits vendus sous des noms commerciaux différents,
- détermination de la loi d'usure des bains de traitement.

ESSAI N° 2

Identification de deux produits vendus sous des noms différents

Un jour, les agents de deux Etablissements de Produits Chimiques nous présentèrent chacun un produit pour le traitement des agrumes ; après examen nous pensions qu'il s'agissait d'un même ammonium quaternaire l'un de qualité brute (produit C) l'autre de qualité raffinée (produit A), vendus sous des noms commerciaux différents.

Or, le premier des deux avait fait l'objet d'essais antérieurs nombreux et s'était avéré désastreux ; si notre opinion était exacte, le second ne devait pas donner de meilleurs résultats.

Certains de notre précision expérimentale, nous engagions un essai dans le but de confirmer notre position ou de confondre les Etablissements en cause.

Cet essai, désigné ici par "ESSAI N°2", comprenait :

- T - lot témoin, chaîne de travail, non traité,
- A - lot traité au produit A et chaîne de travail,
- C - lot traité au produit C et chaîne de travail,
- B - deux lots traités au produit B et chaîne de travail, témoins de la précision expérimentale.

En outre, dans le même présent essai, nous éprouvions l'efficacité d'un produit complexe désigné par D.

Ce produit D a été étudié ultérieurement dans ses constituants par les méthodes factorielles dont il sera question plus loin.

Chaque lot constitué de 2 fois 9 échantillons de 80 fruits à l'exception des lots traités aux produits A et C qui furent prolongés jusqu'à 30 jours et donc pour lesquels il a été prévu trois fois 9 échantillons de 80 fruits.

Les résultats sont consignés dans le tableau "ESSAI N° 2".

ESSAI N° 2 - NOMBRE DE FRUITS POURRIS
(80 fruits par échantillon)

	TEMOIN			A			C			B		B		D	
	10j.	20j.	30j.	10j.	20j.	30j.	10j.	20j.	30j.	10j.	20j.	10j.	20j.	10j.	20j.
1	11	14	40	10	19	53	16	29	47	1	2	1	4	4	3
2	10	23	40	10	35	50	22	24	35	1	7	1	5	0	1
3	10	22	40	15	18	40	18	15	40	1	2	1	5	4	9
4	15	19	31	17	28	37	21	32	47	1	1	2	2	7	4
5	11	18	23	17	23	41	20	26	34	1	1	3	2	1	3
6	14	19	39	13	38	50	17	28	44	4	5	3	3	2	11
7	15	18	31	16	20	39	10	18	44	3	4	2	10	1	7
8	15	20	31	16	26	30	15	30	39	2	3	2	4	2	6
9	11	21	42	9	27	29	24	28	40	1	11	1	3	5	8
Σ	112	174	317	123	234	369	163	230	370	15	36	16	38	26	52
Moy	12,4	19,3	35,2	13,6	26,0	41,0	18,1	25,5	41,1	1,6	4,0	1,7	4,2	2,8	5,7
%	15,5	24,2	44,0	17,0	32,5	51,2	22,6	32,0	51,4	2,0	5,0	2,2	5,7	3,6	7,2

Les deux témoins B de la précision expérimentale rendent remarquablement témoignage.

En ce qui concerne les deux produits A et C, les écarts constatés entre les moyennes, à 10 jours principalement, ont-ils pour origine la différence de pureté des produits ou sont-ils dans les limites de l'identité statistique ; l'analyse de la variance répond affirmativement à la première proposition à 10 jours seulement, à la seconde après 10 jours.

On trouvera ci-après les tableaux de données transformées.
(Tableaux 2a, 2b, 2c).

ESSAI N° 2 - DONNEES A 10 JOURS TRANSFORMEES

TABLEAU 2a

Ech.	TEMOIN	A	C	B	B	D	Σ	Σ ²
1	21,77	20,70	26,57	6,41	6,41	12,91	94,77	8.981,35
2	20,70	20,70	31,63	6,41	6,41	3,20	89,05	7.929,90
3	20,70	25,67	28,32	6,41	6,41	12,91	100,42	10.084,18
4	25,67	27,47	30,83	6,41	9,10	17,20	116,68	13.614,22
5	21,77	27,47	30,00	6,41	11,16	6,41	103,22	10.654,37
6	24,72	23,77	27,47	12,91	11,16	9,10	109,13	11.909,36
7	25,67	26,57	20,70	11,16	9,10	16,41	99,61	9.922,15
8	25,67	26,57	25,67	9,10	9,10	9,10	105,21	11.069,14
9	21,77	19,60	33,20	6,41	6,41	14,48	101,87	10.377,49
Σ	208,44	218,52	254,39	71,63	75,26	91,72	919,96	94.542,16
Moy.	23,16	24,28	28,26	7,96	8,36	10,19		
Σ ²	43.447,23	47.750,99	64.714,27	5.130,85	5.664,07	8.412,56	175.119,97	Terme correctif 919,96 ² 54 15.673

	Eléments de calcul	Somme des carrés
Variation totale	19.935 - 15.673	4.262
Variation entre traitements	$\frac{175.120}{9} - 15.673$	3.784
Variation entre échantillons	$\frac{94.542,16}{6} - 15.673$	84
Résidus	par différence	394

Pour mémoire : Somme des carrés des mesures transformées = 19.935.

ESSAI N° 2 - DONNEES A 20 JOURS TRANSFORMEES

TABLEAU 2b

Ech.	TEMOIN	A	C	B	B	D	Σ	Σ^2
1	24,72	29,16	37,01	12,91	9,10	11,16	124,06	15.390,88
2	32,43	41,41	33,20	14,48	17,20	6,41	145,13	21.062,72
3	31,63	28,32	25,67	14,48	9,10	19,60	128,80	16.589,44
4	29,16	36,26	39,23	9,10	6,41	12,91	133,07	17.707,62
5	28,32	32,43	34,75	9,10	6,41	11,16	122,17	14.925,51
6	29,16	43,40	36,26	11,16	14,48	21,77	156,23	24.407,81
7	28,32	30,00	28,32	20,70	12,91	17,20	137,45	18.892,50
8	30,00	34,75	37,75	12,91	11,16	15,88	142,45	20.292,00
9	30,83	35,51	36,26	11,16	21,77	18,43	153,96	23.703,68
Σ	264,57	311,24	308,45	116,00	108,54	134,52	1.243,32	172.972,16
Moy	29,39	34,58	34,27	12,89	12,06	14,95		
Σ^2	69.997,28	96.870,34	95.141,40	13.456,00	11.780,93	18.095,63	305.341,58	

	Eléments de calcul	Somme des carrés
Variation totale	35.162,427 - 28.627	6.535
Variation entre traitements	$\frac{305.341,58}{9} - 28.627$	5.300
Variation entre échantillons	$\frac{172.972,16}{6} - 28.627$	201
Résidus	par différence	1.034

Terme correctif
 $\frac{1243,32^2}{54} = 28.627$

Pour mémoire : Somme des carrés des mesures transformées = 35.162.

ESSAI N° 2 - DONNEES A 30 JOURS TRANSFORMEES

TABLEAU 2c

Echantillon	Témoin	A	C	Σ	Σ^2
1	45,00	54,48	50,33	149,81	22.443,04
2	45,00	52,23	41,41	138,64	19.221,05
3	45,00	45,00	45,00	135,00	18.225,00
4	38,50	42,85	50,33	131,68	17.339,62
5	32,43	45,71	40,68	118,82	14.118,19
6	44,28	52,23	47,87	144,38	20.845,58
7	38,50	44,28	47,87	130,65	17.069,42
8	38,50	37,75	44,28	120,53	14.527,48
9	46,43	37,01	45,00	128,44	16.496,83
Σ	373,64	411,54	412,77	1.197,95	160.286,21
Moyenne	41,51	45,72	45,86		
Σ^2	139.606,85	169.365,17	170.379,07	479.351,09	

	Eléments de calcul	Somme des carrés
Variation totale	53.850,76 - 53.151	700
Variation entre traitements	$\frac{479.351,09}{9} - 53.151$	110
Variation entre échantillons	$\frac{160.286,21}{3} - 53.151$	278
Résidus	par différence	312

Terme correctif
 $\frac{1.197,95^2}{27} = 53.151$

Pour mémoire : Somme des carrés des mesures transformées = 53.850.

Les analyses de variance se présentent comme suit :

A 10 JOURS

Origine des Variations	Somme des carrés	Nbre de degrés de liberté	Variance	TEST F			
				Expéri- mental	Théorique		
					0,05	0,01	Significatif
Total	4.262	53					
Traitements	3.784	5	756,8	76,83	2,53	3,70	S
Echantillons	84	8	10,5	1,06	2,27	3,17	NS
Résidus expé- rimentaux	394	40	9,85				

A 20 JOURS

Origine des variations	Somme des carrés	Nbre de degrés de liberté	Variance	TEST F			
				Expéri- mental	Théorique		
					0,05	0,01	Significatif
Total	6.535	53					
Traitements	5.300	5	1.060	41,00	2,53	3,70	S
Echantillons	201	8	25,12	< 1			NS
Résidus expé- rimentaux	1.034	40	25,85				

A 30 JOURS

Origine des variations	Somme des carrés	Nbre de degrés de liberté	Variance	TEST F			
				Expéri- mental	Théorique		
					0,05	0,01	Significatif
Total	700	26					
Traitements	110	2	55	2,82	3,68	6,36	NS
Echantillons	278	8	34,75	1,78	2,64	4,00	NS
Résidus expé- rimentaux	312	16	19,50				

A 10 jours, la plus petite différence significative au niveau de 0,05 est :

$$1,96 \sigma_{d_{10}} = 1,96 \sqrt{\frac{2 \times 9,85}{9}} = 2,90$$

Or la différence des moyennes des produits A et C en variable transformée est :

$$28,26 - 24,28 = 3,98$$

De même :

$$1,96 \sigma_{d_{20}} = 1,96 \sqrt{\frac{2 \times 25,85}{9}} = 4,70$$

Or, la différence des moyennes des produits A et C en variable transformée est :

$$34,58 - 34,27 = 0,31$$

Une petite différence entre les deux produits A et C est constatée à 10 jours pour disparaître complètement après 10 jours ce qui tendrait ainsi à prouver que la différence de pureté des deux produits a peu influencé les résultats de cette période.

ESSAI N° 3

LOI D'USURE DES BAINS DE TRAITEMENT

Le produit de traitement utilisé en fin de compte industriellement, à la suite des essais entrepris, est long et difficile à doser chimiquement.

N'est-il donc pas possible, à l'aide d'expérience de ce type, de déterminer la loi d'usure des bains de traitement en produit actif.

Si une loi pouvait être ainsi dégagée, il serait simple de décider la recharge des bains en produit actif après passage d'un tonnage déterminé de marchandises, sans pour autant supprimer l'analyse chimique qui pourrait n'être entreprise qu'à intervalle plus long.

Nous avons donc dans un essai désigné ici par "ESSAI N° 3" constitué trois lots de une fois 10 échantillons de 80 fruits chacun :

- le premier fut traité à l'aide d'un bain frais (0 tonne)
- le second fut traité dans un bain usé par le passage de 100 tonnes de marchandises,
- le troisième fut traité dans un bain usé par la passage de 200 tonnes de marchandises.

Les dépouillements opérés à 15 jours sont consignés dans le tableau :

ESSAI N° 3 - NOMBRE DE FRUITS POURRIS
(sur 80 fruits par échantillon)
DONNEES A 15 JOURS

En unités

Echantillon	USURE DU BAIN		
	0 tonne	100 T	200 T
1	2	6	18
2	10	8	15
3	7	13	25
4	7	14	15
5	9	18	21
6	11	10	16
7	6	7	8
8	7	16	9
9	12	11	17
10	10	13	17
Σ	81	116	161
Moyenne	8,1	11,6	16,1
%	10,125	14,500	20,125

En ‰

USURE DU BAIN		
0 tonne	100 T	200 T
10,025	0,075	0,225
0,125	0,100	0,187
0,087	0,162	0,312
0,087	0,175	0,187
0,112	0,225	0,262
0,137	0,125	0,200
0,075	0,087	0,100
0,087	0,200	0,112
0,150	0,137	0,212
0,125	0,162	0,212
1,010	1,448	2,009
0,101	0,145	0,201

La loi d'usure des bains se dégage clairement ; la précision expérimentale intervient pour définir des limites de sécurité. Nous avons donc entrepris une analyse de la variance pour chercher à les définir.

Nous souhaitons ici définir l'usure des bains par un pourcentage nous avons été conduits de ce fait à utiliser la transformation de la variable aléatoire qualitative d'origine proposée par BLISS :

$$p = \sin^2 \theta \quad p \text{ étant un pourcentage}$$

On obtient ainsi le tableau ci-après (tableau n° 3a).

ESSAI N° 3 - VARIABLES TRANSFORMEES

TABLEAU N° 3a

% transformés par $\sin^2 \theta$ (*)					
Echant.	Usure du Bain			Σ	Σ^2
	0 tonne	100 tonnes	200 tonnes		
1	9,1	15,9	28,3	53,3	2.840,89
2	20,7	18,4	25,6	64,7	4.186,09
3	17,2	23,7	34,0	74,9	5.610,01
4	17,2	24,7	25,6	67,5	4.556,25
5	19,6	28,3	30,8	78,7	6.193,69
6	21,7	20,7	26,6	69,0	4.761,00
7	15,9	17,2	18,4	51,5	2.652,25
8	17,2	26,6	19,6	63,4	4.019,56
9	22,8	21,7	27,4	71,9	5.169,61
10	20,7	23,7	27,4	71,8	5.155,24
Σ	182,1	220,9	263,7	666,7	45.144,59
Σ^2	33.160,41	48.796,81	69.537,69	151.494,91	Terme correctif $\frac{666,7^2}{30} = 14.816$
Eléments de calcul					
Variation totale	15.627,57 - 14.816			Somme des carrés 811	
Variation entre traitements	$\frac{151.494,91}{10} - 14.816$			333	
Variation entre échantillons	$\frac{45.144,59}{3} - 14.816$			232	
Résidus*	par différence			246	

Pour mémoire : Somme des carrés des mesures transformées : = 15.627

L'analyse de la variance est résumée dans le tableau suivant :

Origine des variations	Somme des carrés	Nbre de degrés de liberté	Variance	TEST F			
				Expéri- mental	Théorique		
					0,05	0,01	Significatif
Total	811	29					
Traitements	333	2	166,50	12,18	3,49	5,85	S
Echantillons	232	9	25,77	1,88	2,39	3,46	NS
Résidus expé- rimentaux	246	18	13,66				

(*) D'après table de BLISS

On en déduit que la variance d'une mesure est 13,66, que la variance de la moyenne de 10 mesures est 1,366 et que la précision des pourcentages moyens pourra être estimée à :

$$\sigma_0 = \sqrt{1,366} = 1,169$$

pour le seuil de signification envisagé.

ESSAI N° 4

EXPERIENCE FACTORIELLE

A la suite des résultats de l'essai du produit complexe D relaté dans la 2ème partie : "ESSAI N° 2", nous avons jugé nécessaire d'engager un **essai factoriel dans le but de décomposer le mécanisme d'action de chacun des constituants.**

Une expérience est dite du type "factorielle" quand toutes les combinaisons des divers modes d'intervention des causes de variation considérées sont comprises dans le dispositif expérimental et comportent le même nombre de résultats.

Ici, on peut envisager l'expérience sous deux aspects en partie complémentaires :

- ou bien, considérer que chaque valeur de la variable aléatoire résulte de l'effet de causes non analysées, comme on l'a fait pour ce produit dans l'essai n° 2.

Sous cet aspect, l'analyse de la variance prend sa forme générale ; nous supposons connue la généralisation de l'analyse de la variance ; on en trouvera l'exposé dans l'ouvrage de M. VESSEREAU, cité dans la bibliographie, au chapitre IX.

- ou bien, considérer que ^{chaque} valeur de la variable aléatoire résulte de l'effet simultané des constituants. Ceci permet de pousser plus avant la décomposition en somme de carrés pour les postes auxquels s'attache plus d'un degré de liberté et dans la mesure où le plan expérimental rend cela possible. Mais cette **décomposition supplémentaire, logiquement source d'informations supplémentaires**, n'est possible, pour bénéficier de l'interprétation statistique, qu'au prix de certaines servitudes.

Il ne nous est pas possible, dans le cadre de cet article, de nous étendre sur cette méthode ; nous renvoyons donc le lecteur à l'ouvrage de M. VESSEREAU, cité dans la bibliographie chapitre XI. Il nous paraît cependant souhaitable d'en rappeler sommairement les principes fondamentaux.

Soient $x_0, x_1, x_2, \dots$ les valeurs d'une variable aléatoire de variance σ^2 , qui répondent aux conditions générales de toute analyse de variance et qui entrent en nombre identique n , pour simplifier les calculs, sous les totaux $T_0, T_1, T_2, \dots$ des dites valeurs.

Les combinaisons linéaires cherchées, elles aussi variables aléatoires, sont :

$$F_1 = a_0 T_0 + a_1 T_1 + a_2 T_2 + \dots$$

$$F_2 = b_0 T_0 + b_1 T_1 + b_2 T_2 + \dots$$

.....
.....

Elles ont pour variance :

$$\sigma_{F_1}^2 = n (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots) \sigma^2$$

$$\sigma_{F_2}^2 = n (b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + \dots) \sigma^2$$

Les termes successifs de la décomposition en somme de carrés de $n \sum (\bar{x}_i - \bar{x})^2$ $\bar{x}_i$ étant la moyenne d'un groupe i de valeurs et $\bar{x}$ la moyenne générale de toutes les valeurs considérées sont :

$$\begin{aligned} & \frac{a_0 T_0 + a_1 T_1 + a_2 T_2 + \dots}{n (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots)} \\ & + \frac{b_0 T_0 + b_1 T_1 + b_2 T_2 + \dots}{n (b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + \dots)} \\ & + \frac{\dots}{\dots} \end{aligned}$$

sous réserve que les combinaisons linéaires répondent aux deux conditions suivantes :

1ère condition : la somme algébrique de leurs coefficient doit être nulle :

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + \dots &= 0 \\ b_0 + b_1 + b_2 + \dots &= 0 \\ \dots & \end{aligned}$$

2ème condition : la somme des produits de coefficients doit être nulle :

$$\begin{aligned} a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots &= 0 \\ a_0 c_0 + a_1 c_1 + \dots &= 0 \\ a_0 d_0 + a_1 d_1 + \dots &= 0 \\ \dots & \\ b_0 c_0 + b_1 c_1 + \dots &= 0 \\ b_0 d_0 + b_1 d_1 + \dots &= 0 \\ \dots & \end{aligned}$$

En outre, pour permettre une interprétation simple des résultats, il est souhaitable que :

Les facteurs de variations en cause suivent une progression arithmétique, de raison quelconque, d'origine quelconque, et quelconque d'un facteur à un autre; cette observation prend toute sa valeur lorsque, en possession d'un nombre relativement important de termes de la progression, on cherche à utiliser les méthodes de régression.

Les combinaisons soient telles que leur interprétation soient faciles; il a été, dans ce dessein, établi des comparaisons types auxquelles correspondent des interprétations bien déterminées (cf. VESSEREAU, chapitre XI).

Les comparaisons des combinaisons sont exprimées très élégamment en notation symbolique ; ainsi, la notation symbolique :

$$F_1 = (A_2 - A_0) (B_2 - B_0)$$

relative à l'interaction des effets de deux facteurs A et B à trois doses : A_0, A_1, A_2 ; B_0, B_1, B_2 , et dont le développement est :

$$F_1 = A_2 B_2 - A_0 B_2 - A_2 B_0 + A_0 B_0$$

représente les opérations algébriques à effectuer sur les totaux de la variable aléatoire constatés sous chacune des combinaisons linéaires désignées $A_2 B_2$, $A_0 B_2$, etc avec $a_0 = +1$, $a_1 = -1$, $a_2 = -1$, $a_3 = +1$.

On peut sans difficulté généraliser comme le montrera notre essai dont on a détaillé volontairement les calculs, en combinant entre elles les comparaisons types ; mais il est toujours indispensable de prendre soin de contrôler que :

- les conditions imposées sont bien respectées,
- la somme des degrés de liberté "unité" des termes de la décomposition est égale au nombre total de degrés de liberté qui s'attache au poste analysé ; on évite ainsi les erreurs de calcul et oubli de combinaisons.

Toutefois, il faut noter que dans des cas complexes, il y a souvent intérêt à se contenter de l'interprétation :

- des effets principaux et des interactions du premier ordre,
- ou de telle ou telle hypothèse sur laquelle on fixe son attention ; les autres termes sont alors calculés pour vérifier l'exactitude des calculs et sont regroupés sous un terme global.

Abordons maintenant l'essai factoriel que nous désignons ici par "ESSAI N° 4".

Le produit complexe D était composé de quatre constituants élémentaires O, U, A, S que nous avons étudiés aux dosages suivants :

- produit O à trois doses : O_0, O_6, O_{12}
- produit U à deux doses : U_0, U_3, U_6
- produit A à deux doses : A_0, A_2
- produit S à deux doses : S_0, S_2

les indices indiquent le nombre de gr/litre de produit pur introduit dans les bains d'essais.

Les combinaisons factorielles des facteurs de variation aux dosages indiqués sont celles qui figurent dans tous les tableaux sous les numéros d'ordre 1 à 36.

Chaque combinaison portait, pour ne pas engager un tonnage très important sur 10 échantillons de 10 fruits chacun, au lieu de 80 à 100 unités, souhaitables pour une bonne précision.

Tous les constats furent effectués à 20 jours et consignés dans le tableau "ESSAI N° 4".

ESSAI N° 4
NOMBRE DE FRUITS POURRIS (10 fruits par échantillon)

Echan- tillons	O ₀												O ₆												O ₁₂											
	U ₀				U ₃				U ₆				U ₀				U ₃				U ₆				U ₀				U ₃				U ₆			
	A ₀		A ₂		A ₀		A ₂		A ₀		A ₂		A ₀		A ₂		A ₀		A ₂		A ₀		A ₂		A ₀		A ₂		A ₀		A ₂		A ₀		A ₂	
	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂	S ₀	S ₂		
N° d'ordre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	4	5	6	0	9	5	2	5	6	3	5	7	3	4	1	2	2	3	2	5	3	0	2	3	3	2	3	2	1	4	2	4	3	2	2	3
2	3	7	8	7	6	6	4	6	5	6	7	7	1	4	3	3	4	6	4	6	3	4	5	3	1	2	1	4	5	3	3	2	2	3	3	5
3	5	6	7	5	5	4	2	5	3	5	6	2	2	2	4	4	2	2	3	4	6	3	3	6	1	1	1	2	4	3	5	4	4	3	5	2
4	6	8	5	6	8	2	5	3	4	4	10	5	2	2	2	6	2	2	4	2	4	3	3	4	1	4	2	4	2	8	1	2	1	5	6	1
5	4	5	9	2	5	3	6	5	6	6	2	6	1	4	1	5	3	6	5	8	6	6	5	7	2	2	5	2	2	8	1	2	4	3	5	3
6	4	4	4	6	5	7	5	7	6	5	4	7	4	4	0	3	4	5	2	3	7	4	4	2	5	4	0	2	3	4	4	5	1	4	2	2
7	4	7	6	4	7	6	8	4	6	4	5	5	1	3	3	3	4	5	1	2	3	6	4	4	1	1	0	5	1	3	3	3	2	7	1	4
8	4	6	5	6	7	4	5	6	4	6	4	7	5	9	4	4	5	2	3	4	6	7	5	7	0	1	1	2	0	2	2	5	1	3	7	2
9	5	6	7	6	2	7	4	7	6	8	4	6	3	4	3	4	6	2	4	4	2	2	5	4	1	1	1	1	0	2	2	0	4	3	0	2
10	7	4	7	3	4	7	4	7	9	5	8	7	1	2	2	4	3	7	3	2	2	3	4	5	1	0	1	3	0	4	3	5	3	3	3	1
Σ	46	58	64	45	58	51	45	55	55	52	55	59	23	38	23	38	35	40	31	40	42	38	40	45	16	18	15	27	18	41	26	32	25	36	34	25

Nous avons procédé au changement de variable $y = \arcsin \sqrt{x}$, pour les raisons données dans la première partie. Les résultats figurent au tableau "ESSAI N° 4 (tableau 4a).

La somme des carrés totale est trouvée égale à 63.640 avec 359 degrés de liberté.

ESSAI N° 4 - TABLEAU 4 a

Données transformées

Echantillons	O ₆						U ₆						U ₅						O ₄						U ₆						U ₅						O ₂																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										
	U ₀			U ₅			U ₆			U ₆			U ₃			U ₆			U ₆			U ₃			U ₆			U ₆			U ₃			U ₆			U ₅			O ₂																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																							
	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂	S ₂	S ₀	A ₂	A ₀	S ₀	A ₂

Nous allons montrer comment, partant de cette variation totale, qui ne peut être directement interprétée, le cheminement des décompositions successives permettra d'aboutir à des interprétations détaillées.

I - STADE DE L'ANALYSE : TRAITEMENTS -

A ce stade de l'analyse, le tableau de l'analyse de la variance est le suivant :

Origine des variations	Somme des carrés	Nbre de degrés de liberté	Variance	TEST F			
				Expérimental	Théorique		
					0,05	0,01	Significatif
Total	63.640	359					
Traitements	26.644	35	761	6,66	1,46	1,70	S
Résidus expérimentaux	36.996	324	114,2				

DEUXIEME STADE DE L'ANALYSE :

Les résultats expérimentaux peuvent être apurés d'une autre cause contrôlée de variation : les ECHANTILLONS ; d'où le tableau d'analyse de la variance :

Origine des variations	Somme des carrés	Nbre de degrés de liberté	Variance	TEST F			
				Expérimental	Théorique		
					0,05	0,01	Significatif
Total	63.640	359					
Traitements	26.644	35	761	6,7	1,46	1,70	S
Echantillons	1.430	9	158,8	1,4	1,88	2,41	NS
Résidus expérimentaux	35.566	315	112,9				

Le facteur "échantillons" semble assez arbitraire, les échantillons ne paraissant pas avoir une individualité propre. Après avoir constaté qu'il n'y a pas de différences significatives entre échantillons, il semble indiqué de réunir à nouveau "échantillons" et "résidus", comme dans le premier stade de l'analyse.

TROISIEME STADE DE L'ANALYSE :

Le plan expérimental permet de pousser plus avant l'analyse du poste "traitements" et d'aboutir à l'analyse de la variance suivante :

TABLEAU RECAPITULATIF DE L'ANALYSE DE LA VARIANCE

ESSAI N° 4

(FORME CLASSIQUE GENERALE)

Causes des variations	Somme des carrés	Nbre de degrés de liberté	Variance	TEST F				
				Expéri- mental	Théorique			
					0,05	0,01	Signific.	
TOTAL	63.640	359						
TRAITEMENTS	26.644	35	761	6,66	1,46	1,70	H ^t S	
Effets prin- cipaux	{ O U A S	18.984	2	9.492,00	83,1	3,00	4,61	H ^t S
		1.794	2	897,00	7,9	3,00	4,61	S
		15	1	15,00	-	-	-	NS
		900	1	900,00	7,9	3,84	6,64	S
Inter- action 1er ordre	{ O x U O x A O x S U x A U x S A x S	685	4	171,25	1,5	2,37	3,32	NS
		3	2	1,50				NS
		730	2	365,00	3,2	3,00	4,61	?
		126	2	63,00				N S
		404	2	202,00	1,8	3,00	4,61	NS
		66	1	66,00				NS
Inter- action 2ème ordre	{ O x U x A O x U x S O x A x S U x A x S	162	4	40,50				NS
		561	4	140,25	1,2	2,37	3,32	NS
		288	2	144,00	1,3	3,00	4,61	NS
		66	2	33,00				NS
Inter- action 3e ord.	{ O x U x A x S	1.860	4	465,00	4,1	2,37	3,32	NS
ECHANTILLONS et résidus expérimentaux	1.430 35.566	9 315	114,2					

OBSERVATIONS

1 - Cf. Généralisation analyse variance dans l'ouvrage de M. VESSEREAU "Méthode Statistique en Biologie et en Agronomie" chapitre IX.

2 - On trouvera ci-après, pour quelques-uns des postes de cette analyse, la technique de calcul proposée (ESSAI N° 4, tableau 4b) ; à défaut de cartes perforées, le cadre de ce document fournit une discipline de calcul qui permet de conserver une vue claire de l'avancement de son travail et d'éviter des erreurs.

Ce document permet de tirer des conclusions très intéressantes quant à l'objet même de l'essai.

- la masse soumise aux essais était à peu près homogène (variance "Echantillons").

- les résidus expérimentaux sont importants et la précision mauvaise ; nous nous y attendions puisque volontairement nous avons constitué des échantillons de 10 unités seulement.

- c'est le produit O qui fait tout le travail de conservation.

- le produit U a une action défavorable sur la conservation.

- le produit A, en l'occurrence destiné à l'adoucissement de l'eau, s'avère sans action qui justifie la dépense, au moins dans les conditions de cette expérience.

- le produit S a une action défavorable sur la conservation.

ESSAI N° 4 - TABLEAU 4 b

COMBINAISON		TOTAUX	EFFET PRINCIPAL O			EFFET PRINCIPAL U			EFFET PRINCIPAL A	EFFET PRINCIPAL S	INTERACTION U x S							
N° d'ordre	TYPE																	
1	O ₈ U ₈ A ₂ S ₂	426,92	426,92			426,92			426,92		426,92		426,92					
2	O ₈ U ₈ A ₁ S ₁	497,76	497,76			497,76			497,76		497,76		497,76					
3	O ₈ U ₈ A ₁ S ₂	536,11	536,11			536,11			536,11	536,11	536,11	536,11						
4	O ₈ U ₈ A ₁ S ₁	412,93	412,93			412,93			412,93		412,93		412,93					
5	O ₈ U ₈ A ₂ S ₂	500,13	500,13				500,13		500,13		500,13			500,13				
6	O ₈ U ₈ A ₂ S ₁	455,13	455,13				455,13		455,13		455,13				455,13			
7	O ₈ U ₈ A ₁ S ₂	420,03	420,03			420,03			420,03	420,03	420,03		420,03					
8	O ₈ U ₈ A ₁ S ₁	479,33	479,33			479,33			479,33		479,33				479,33			
9	O ₈ U ₈ A ₂ S ₂	482,10	482,10				482,10	482,10		482,10					482,10			
10	O ₈ U ₈ A ₂ S ₁	462,42	462,42				462,42	462,42		462,42						462,42		
11	O ₈ U ₈ A ₁ S ₂	495,24	495,24				495,24		495,24	495,24	495,24				495,24			
12	O ₈ U ₈ A ₁ S ₁	502,01	502,01				502,01		502,01	502,01	502,01					502,01		
13	O ₈ U ₈ A ₂ S ₂	277,53		277,53		277,53		277,53		277,53		277,53						
14	O ₈ U ₈ A ₂ S ₁	380,65		380,65		380,65		380,65		380,65		380,65		380,65				
15	O ₈ U ₈ A ₁ S ₂	277,17		277,17		277,17		277,17	277,17	277,17	277,17	277,17						
16	O ₈ U ₈ A ₁ S ₁	378,92		378,92		378,92		378,92		378,92		378,92		378,92				
17	O ₈ U ₈ A ₂ S ₂	359,61		359,61		359,61		359,61		359,61		359,61		359,61				
18	O ₈ U ₈ A ₂ S ₁	387,82		387,82		387,82		387,82		387,82		387,82		387,82				
19	O ₈ U ₈ A ₁ S ₂	333,92		333,92		333,92		333,92	333,92	333,92	333,92		333,92					
20	O ₈ U ₈ A ₁ S ₁	389,82		389,82		389,82		389,82		389,82		389,82		389,82				
21	O ₈ U ₈ A ₂ S ₂	401,12		401,12		401,12	401,12	401,12		401,12					401,12			
22	O ₈ U ₈ A ₂ S ₁	372,06		372,06		372,06	372,06	372,06		372,06		372,06				372,06		
23	O ₈ U ₈ A ₁ S ₂	390,70		390,70		390,70		390,70	390,70	390,70	390,70				390,70			
24	O ₈ U ₈ A ₁ S ₁	420,03		420,03		420,03		420,03		420,03		420,03				420,03		
25	O ₁₂ U ₈ A ₂ S ₂	224,42		224,42	224,42		224,42		224,42		224,42		224,42					
26	O ₁₂ U ₈ A ₂ S ₁	240,94		240,94	240,94		240,94		240,94		240,94		240,94					
27	O ₁₂ U ₈ A ₁ S ₂	215,04		215,04	215,04		215,04		215,04	215,04	215,04	215,04						
28	O ₁₂ U ₈ A ₁ S ₁	307,96		307,96	307,96		307,96		307,96		307,96		307,96					
29	O ₁₂ U ₈ A ₂ S ₂	234,60		234,60		234,60		234,60		234,60		234,60		234,60				
30	O ₁₂ U ₈ A ₁ S ₁	397,35		397,35		397,35		397,35		397,35		397,35		397,35				
31	O ₁₂ U ₈ A ₁ S ₂	300,46		300,46		300,46		300,46	300,46	300,46	300,46		300,46					
32	O ₁₂ U ₈ A ₂ S ₁	335,44		335,44		335,44		335,44		335,44		335,44		335,44				
33	O ₁₂ U ₈ A ₂ S ₂	292,56		292,56		292,56	292,56	292,56		292,56		292,56		292,56				
34	O ₁₂ U ₈ A ₁ S ₁	366,90		366,90		366,90	366,90	366,90		366,90		366,90				366,90		
35	O ₁₂ U ₈ A ₁ S ₂	344,61		344,61		344,61		344,61	344,61	344,61	344,61				344,61			
36	O ₁₂ U ₈ A ₂ S ₁	293,81		293,81		293,81		293,81		293,81		293,81				293,81		
TOTAUX		13.593,55	5.670,11	4.369,35	3.554,09	4.176,36	4.593,64	4823,56	6760,02	6.833,53	6.512,27	7.081,28	1957,19	2.219,16	2.148,75	2.444,89	2.406,33	2417,23
X ¹ puis successivement X ¹ _{0,U,A,US, ...}		184.784,601	32.150.147,4121	19.091.219,4225	12.631.555,7281	17.441.899,3225	21.101.436,5769	23.266.731,0736	45.697.870,4004	46.697.132,2609	42.409.660,5529	50.144.526,4384	3.830.592,6961	4.924.671,1056	4.617.126,5625	5.977.487,1121	5.790.424,0689	5.843.000,8729
			63.872.922,5627			61.810.066,9830			92.395.002,6613	92.554.186,9913			30.983.302,4181					
Condensation Diviseur		360	120			120			180	180			60					
Avant correction Terme correcteur		513,290				515,084			513,305	514,190			516,388	516,388		516,388		
Après correction			18,984			1,794			15	900			3,098 - (1,794 + 900) = 404					

Aucune interaction du 1er et du 2ème ordres n'est significative ; ces interactions pourraient être étudiées au cours d'essais à plus grande précision. L'interaction du 3ème ordre apparaît comme significative, mais son interprétation est malaisée, et on la négligera.

Il faut signaler, ce dont les chiffres ne rendent pas compte, que des brûlures superficielles furent constatées dont O porte la responsabilité, et qu'elles disparaissaient en présence d'un certain dosage de U.

Ainsi la formule complexe étudiée ici apparaît comme fondamentalement vicieuse :

- O assure la conservation mais brûle,

- U détruit en partie l'action favorable de O mais évite la brûlure de O de telle sorte que la formule introduit une dose tellement détériorante de U (pourriture) pour compenser l'action détériorante de O (brûlure) que celle-ci doit être reconsidérée.

QUATRIEME STADE DE L'ANALYSE :

L'analyse peut être poussée plus loin en ce qui concerne les effets principaux O et U auxquels sont attachés deux degrés de liberté. En appliquant les principes de notations indiqués au début de ce paragraphe, la somme des carrés "effet principal O" peut se décomposer en deux termes, comportant chacun un degré de liberté.

$$O = \frac{1}{240} \left[(O_{12} - O_0) (U_0 + U_3 + U_6) (A_0 + A_2) (S_0 + S_2) \right]^2$$

qui permet de comparer les doses extrêmes de O

$$O' = \frac{1}{720} \left[(O_0 + O_{12} - 2 O_6) (U_0 + U_3 + U_6) (A_0 + A_2) (S_0 + S_2) \right]^2$$

qui permet de tester la linéarité de la réponse au produit O.

Des expériences analogues s'appliquent à la décomposition de la somme des carrés "effet principal U".

Les calculs sont aisément menés à l'aide du cadre proposé ci-après (tableau 4c) qui permet de contrôler l'une des conditions imposées (somme algébrique des coefficients nulle) et de faire apparaître les numérateur et dénominateur de chacun des termes de la décomposition.

On trouve ainsi :

Origine de la variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Variance	TEST F	
				Expérial	Sign ^t if
$O_{12} - O_0$	18.656	1	18.656	164	S
$(O_{12} - O_6) - (O_6 - O_0)$	328	1	328	2,9	N S
Effet principal O	18.984	2	9.492	83,3	S
$U_{12} - U_0$	1.745	1	1.745	15.3	S
$(U_{12} - U_6) - (U_6 - U_0)$	49	1	49	< 1	NS
Effet principal U	1.974	2	897	78.7	S
Résidus expérimentaux	36.996	324	114		

ESSAI N° 4 - TABLEAU 4 c

N° l'ordre	COMBI NAISON	TOTAL	EFFET PRINCIPAL O_{12}			EFFET PRINCIPAL SUPPLEMENTAIRE O_{12}			EFFET PRINCIPAL U_6			EFFET PRINCIPAL SUPPLEMENTAIRE U_6		
			Coef. ¹	+	-	Coef. ¹	+	-	Coef. ¹	+	-	Coef. ¹	+	-
1	$O_0 U_6 A_0 S_0$	426,92	- 1		426,92	- 1		426,92	- 1		426,92	- 1		426,92
2	$O_0 U_6 A_0 S_2$	497,76	- 1		497,76	- 1		497,76	- 1		497,76	- 1		497,76
3	$O_0 U_6 A_2 S_0$	536,11	- 1		536,11	- 1		536,11	- 1		536,11	- 1		536,11
4	$O_0 U_6 A_2 S_2$	412,93	- 1		412,93	- 1		412,93	- 1		412,93	- 1		412,93
5	$O_0 U_6 A_0 S_0$	500,13	- 1		500,13	- 1		500,13	0			+ 2	1.000,26	
6	$O_0 U_6 A_0 S_2$	455,13	- 1		455,13	- 1		455,13	0			+ 2	910,26	
7	$O_0 U_6 A_2 S_0$	420,03	- 1		420,03	- 1		420,03	0			+ 2	840,06	
8	$O_0 U_6 A_2 S_2$	479,33	- 1		479,33	- 1		479,33	0			+ 2	958,66	
9	$O_0 U_6 A_0 S_0$	482,10	- 1		482,10	- 1		482,10	+ 1	482,10		- 1		482,10
10	$O_0 U_6 A_0 S_2$	462,42	- 1		462,42	- 1		462,42	+ 1	462,42		- 1		462,42
11	$O_0 U_6 A_2 S_0$	495,24	- 1		495,24	- 1		495,24	+ 1	495,24		- 1		495,24
12	$O_0 U_6 A_2 S_2$	502,01	- 1		502,01	- 1		502,01	+ 1	502,01		- 1		502,01
13	$O_6 U_6 A_0 S_0$	277,53	0			+ 2	555,06		- 1		277,53	- 1		277,53
14	$O_6 U_6 A_0 S_2$	380,65	0			+ 2	761,30		- 1		380,65	- 1		380,65
15	$O_6 U_6 A_2 S_0$	277,17	0			+ 2	554,34		- 1		277,17	- 1		277,17
16	$O_6 U_6 A_2 S_2$	378,92	0			+ 2	757,84		- 1		378,92	- 1		378,92
17	$O_6 U_6 A_0 S_0$	359,61	0			+ 2	719,22		0			+ 2	719,22	
18	$O_6 U_6 A_0 S_2$	387,82	0			+ 2	775,64		0			+ 2	775,64	
19	$O_6 U_6 A_2 S_0$	333,92	0			+ 2	667,84		0			+ 2	667,84	
20	$O_6 U_6 A_2 S_2$	389,82	0			+ 2	779,64		0			+ 2	779,64	
21	$O_6 U_6 A_0 S_0$	401,12	0			+ 2	802,24		+ 1	401,12		- 1		401,12
22	$O_6 U_6 A_0 S_2$	372,06	0			+ 2	744,12		+ 1	372,06		- 1		372,06
23	$O_6 U_6 A_2 S_0$	390,70	0			+ 2	781,40		+ 1	390,70		- 1		390,70
24	$O_6 U_6 A_2 S_2$	420,03	0			+ 2	840,06		+ 1	420,03		- 1		420,03
25	$O_{12} U_6 A_0 S_0$	224,42	+ 1	224,42		- 1		224,42	- 1		224,42	- 1		224,42
26	$O_{12} U_6 A_0 S_2$	240,94	+ 1	240,94		- 1		240,94	- 1		240,94	- 1		240,94
27	$O_{12} U_6 A_2 S_0$	215,04	+ 1	215,04		- 1		215,04	- 1		215,04	- 1		215,04
28	$O_{12} U_6 A_2 S_2$	307,96	+ 1	307,96		- 1		307,96	- 1		307,96	- 1		307,96
29	$O_{12} U_6 A_0 S_0$	234,60	+ 1	234,60		- 1		234,60	- 0			+ 2	469,20	
30	$O_{12} U_6 A_0 S_2$	397,35	+ 1	397,35		- 1		397,35	0			+ 2	794,70	
31	$O_{12} U_6 A_2 S_0$	300,46	+ 1	300,46		- 1		300,46	0			+ 2	600,92	
32	$O_{12} U_6 A_2 S_2$	335,44	+ 1	335,44		- 1		335,44	0			+ 2	670,88	
33	$O_{12} U_6 A_0 S_0$	292,56	+ 1	292,56		- 1		292,56	+ 1	292,56		- 1		292,56
34	$O_{12} U_6 A_0 S_2$	366,90	+ 1	366,90		- 1		366,90	+ 1	366,90		- 1		366,90
35	$O_{12} U_6 A_2 S_0$	344,61	+ 1	344,61		- 1		344,61	+ 1	344,61		- 1		344,61
36	$O_{12} U_6 A_2 S_2$	293,81	+ 1	293,81		- 1		293,81	+ 1	293,81		- 1		293,81
Σ des Coeff. ¹	(+) Σ (-)	13.593,55	0	3.554,09	5.670,11	0	8.738,70	9.224,20	0	4.823,56	4.176,35	0	9.187,28	9.000,11
Δ				2.116,02			485,50			674,21			187,17	
Diviseur	Δ^2		240	4.477.540,64		720	235.710,25		240	418.887,25		720	35.032,60	
Σ des carrés après correction				18.656,5			327,4			1.745,3			48,7	

Cette analyse complémentaire montre que, dans la limite des doses employées, les réponses à l'action de O (favorable) et de U (défavorable) peuvent être considérées comme linéaires.

La linéarité s'appliquant à la variable transformée $\arcsin \sqrt{x}$ ne devrait plus être vraie pour la variable pourcentage, qui est la variable intéressante. Les tableaux ci-dessous donnent les valeurs moyennes obtenues pour ces deux variables.

	Pourcentage	Variable transformée
	%	
O ₀	53.6	47.3
O ₆	36.1	36.4
O ₁₂	26.1	29.6

	Pourcentage	Variable transformée
	%	
U ₀	34.2	34.8
U ₆	39.3	38.3
U ₁₂	42.2	40.2

Le graphique, tracé avec les pourcentages semble montrer qu'une certaine saturation est déjà sensible aux doses les plus fortes.

CONCLUSIONS

Dans notre cas, ce développement particulier n'a pas apporté d'éléments très intéressants, mais sur le plan des méthodes statistiques on a pu suivre comment parti de la "Variation Totale" de l'expérience, on est parvenu, par une succession de stades d'analyse, jusqu'à la dernière forme de l'analyse de la variance ; celle-ci représente tout ce qu'il est possible d'extraire d'un tel plan expérimental.

Il serait plus intéressant pour nos expériences ultérieures de réaliser des économies de combinaisons en faisant appel aux méthodes dites des "PLANS FACTORIELS INCOMPLETS".

Si nous avons poursuivi l'analyse jusqu'à ce dernier stade, c'était pour montrer toute la richesse de ces techniques particulières et aussi leur beauté.

BIBLIOGRAPHIE

- MOTHES J. - Techniques Modernes de contrôle des fabrications - DUNOD 1952
- MORICE E. et CHARTIER F. - Méthodes Statistiques (2 volumes).
Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques - 1955.
- VESSEREAU A. - Méthodes Statistiques en Biologie et Agronomie - BAILLIERE - 1948.
- BARTLETT - Tables of $y = \arcsin \sqrt{x}$.
Suppl. to the Journal of the Royal Statistical Society - 4 - 1937.
- BLISS - Tables of $y = \arcsin \sqrt{p/100}$.
Plant. protection n° 12 - 1937.
- COCHRAN W.G. et COX G.M. - Experimental Designs -
J. WILEY et SONS, Inc. 1950.