REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

R. HENON

Gestion des stocks

Revue de statistique appliquée, tome 3, nº 2 (1955), p. 35-47
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1955__3_2_35_0>

GESTION DES STOCKS [1]

par

R. HENON

L'étude qui va suivre peut être considérée comme un exemple particulièrement simple de recherche opérationnelle.

Elle a été commencée avant guerre, à l'occasion d'un effort de réorganisation entrepris dans une imprimerie qui, tout en disposant de stocks importants de papier se trouvait souvent en défaillance pour répondre à la demande.

Le problème posé était le suivant : a) comment déterminer l'importance d'une commande de renouvellement; b) A quel moment devait-on renouveler le stock, compte tenu du délai de réapprovisionnement et du risque de défaillance exposé.

L'étude met en œuvre : 1°) la connaissance des données numériques qui résultent des statistiques *de l'entreprise (écoulement, prix de revient...); 2°) la création de deux* modèles *successifs : l'un arithmétique qui résulte de l'application de l'intérêt simple, l'autre, probabiliste (loi de Poisson). qui décrit l'écoulement aléatoire du stock.*

La connaissance du jeu, *expliqué par chaque modèle, permet de donner les consignes de décisions dans tous les cas.*

De plus, le modèle d'écoulement d'un stock a permis de préciser la valeur attendue d'un « stock-mort » et d'utiliser cette notion à l'organisation d'un réseau de distribution.

La méthode indiquée est très générale pour les applications courantes, mais il peut exister de nombreuses situations particulières qui exigent l'emploi d'autres modèles (par exemple : dépôts de munitions dans les opérations militaires, lâchage des barrages de centrales hydro-électriques, cas du vendeur de journaux, etc...). Ces situations ont fait l'objet de recherches très approfondies (voir bibliographie (2).

La gestion des stocks de marchandises fait appel à trois sortes de **décisions** :

- deux décisions **tactiques** :

  Fixer l'importance du **lot** de renouvellement;
  Fixer l'époque à laquelle il faudra lancer l'ordre de réapprovisionnement.

- une décision **stratégique** :

  Comment répartir les stocks dans un réseau de distribution?

Nous allons nous efforcer, comme dans **un jeu,** d'établir des règles de décisions.

Auparavant, précisons les hypothèses de base : les stocks considérés sont représentés par des marchandises (matières premières d'une usine - essence chez le pompiste - marchandises d'un magasin de vente). Les sorties sont **aléatoires** et les entrées s'effectuent par **lots,** il s'agit de commander dans les meilleures conditions de prix, le plus tard possible, en évitant toutefois de courir un **risque de défaillance,** qui serait inacceptable, risque dont la **gravité** dépend de la nature des marchandises (sérums, par exemple).

(1) Exposé fait par M. R. HENON au Séminaire de Recherche Opérationnelle.

1. - DESCRIPTION DU MODÈLE

Dans les conditions les plus simples d'un "univers certain" l'évolution d'un stock peut etre représenté par une ligne en dents de scie (fig. 1) dont l'ordonnée maximum est mesurée par L : **dimension** du lot de renouvellement.

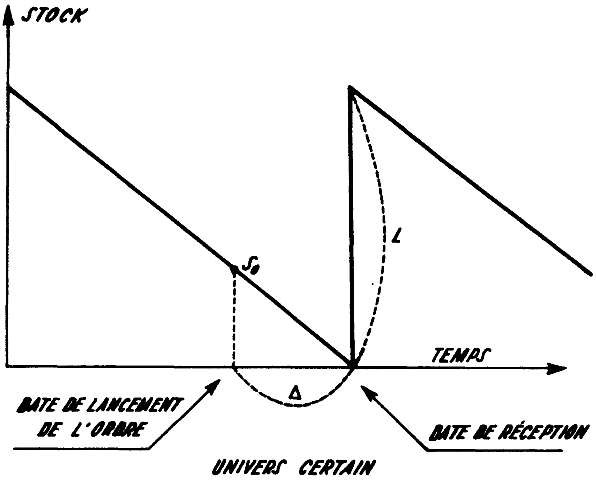

Fig. 1

Le point marqué S_0 est le stock à partir duquel il faudra lancer l'ordre de réapprovisionnement, ordre qui ne sera satisfait qu'au bout d'un délai que nous appellerons Δ.

On a supposé de plus que l'écoulement de marchandises est une fonction linéaire du temps.

En pratique, ces conditions ne sont pas remplies, on se trouve dans un "univers aléatoire" et l'évolution du stock s'effectue suivant une ligne aléatoire indiquée sur la figure (2) aui appelle les remarques suivantes :

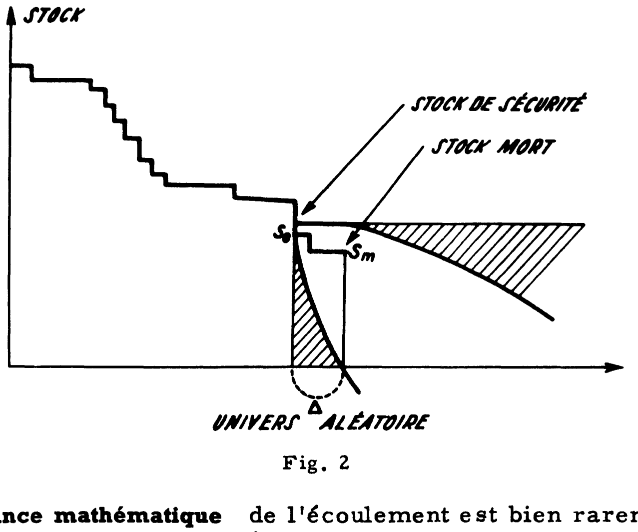

Fig. 2

a - **L'espérance mathématique** de l'écoulement est bien rarement **linéaire.** Il y a des variations temporelles, périodiques ou non. Dans ce cas l'analyse statistique des sorties cumulées, sur une période assez longue, permet de tracer une courbe moyenne $Y = f(T)$ (fig. 3) et de trouver une échelle de temps fictive T', qui rendra linéaire l'écoulement du stock, en fonction de cette nouvelle variable. On dit que l'échelle T' est l'échelle fonctionnelle de la variable naturelle T (on la désigne généralement par $[T]$). On gradue l'échelle de T' sur un support parallèle aux ordonnées en écrivant la valeur de T devant la cote correspondante de la fonction Y.

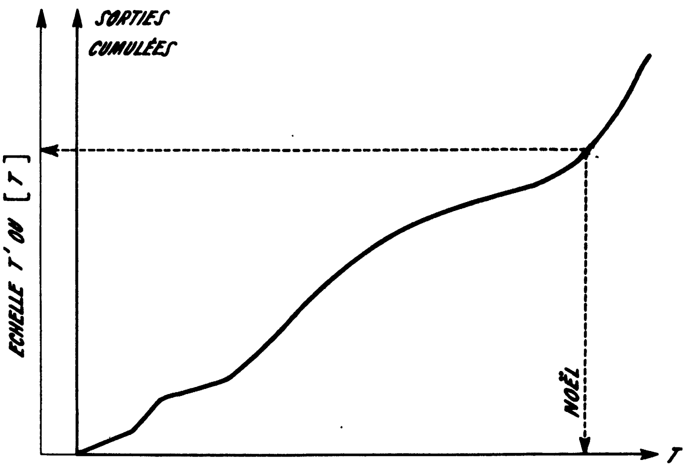

Fig. 3

Si nous nous reportons à la première figure, il faudra considérer l'axe de temps gradué, non plus suivant la variable naturelle, mais suivant sa transformée T' et, si le Δ représente un nombre de jours constant, l'intervalle Δ sur ce graphique sera variable, il dépendra des saisons.

b - En nous reportant à la figure 2, il est clair qu'à partir de S_0 (date de l'ordre de lancement), le processus d'écoulement étant aléatoire, on peut tracer deux frontières d'allures paraboliques telles que dans 95% des cas la ligne d'écoulement soit comprise à l'intérieur de ces frontières. C'est ainsi qu'à l'instant de l'entrée en magasin du lot L il reste encore un **stock mort** S_m qui est une grandeur aléatoire. La défaillance survient quand le point final S_m touche l'axe des temps avant la date d'entrée en magasin du lot. La règle du jeu se réduira donc à se fixer un risque de défaillance puis à rechercher le niveau du stock S_0 que nous appellerons **stock de sécurité** et qui agira à la manière d'un signal d'alarme.

Ces hypothèses générales étant admises, précisons le modèle dans les situations qui vont suivre.

2. - DIMENSION ÉCONOMIQUE DU LOT L

a. - Notations

Commençons par fixer les notations des paramètres :

p - Prix d'achat de l'unité

π - Prix de vente de l'unité

r - Prix de revient

q - Débit annuel

θ - Durée d'écoulement ou durée du cycle

$L = q\theta$ - le lot de renouvellement

i - Loyer d'argent (taux d'escompte à intérêt simple) (1)

β - Taux de majoration des matières en magasin, il comprend : i, la prime d'assurance incendie, la part des locaux affectés au magasinage, la détérioration des produits.

$\Delta p = \pi - p$ en désignant par $\frac{\Delta p}{p}$ le **taux de marque**

(1) Plus exactement ce taux devrait être i' : prix de revient moyen du loyer d'argent du capital investi dans l'entreprise. En effet, il faut considérer ici, le coût moyen par rapport au développement des capitaux investis et non par rapport au temps. C'est pour la même raison que le coût moyen des locaux intervient ou non pas celui du mètre carré "en plus".

b. - Taux de rentabilité

L'écoulement étant linéaire, tout se passe (fig.4) à intérêt simple comme si

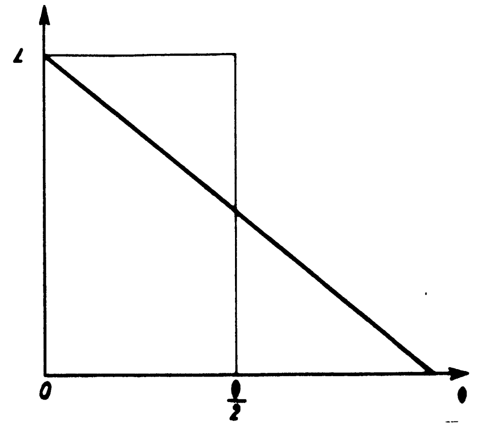

Fig. 4

le lot acheté à l'époque 0 était vendu en totalité à l'époque $\frac{\theta}{2}$.
A cet instant :

Vente = πL

P R du stock vendu = $p\, L\, (1 + \beta \frac{\theta}{2})$

Différence = $pL\, (\frac{\Delta p}{p} - \beta\, \frac{\theta}{2})$ (Bénéfice brut).

La valeur actuelle à l'époque zéro est obtenue en escomptant le bénéfice brut au taux i pour la durée $\frac{\theta}{2}$, ce qu'on obtient en multipliant le résultat précédent par $(1 - i\frac{\theta}{2})$:

Valeur actuelle du bénéfice brut = $p\, L\left(\frac{\Delta p}{p} - \beta\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - i\frac{\theta}{2}\right)$.

Soit **par franc** affecté à la gestion du stock :

$$b = \left(\frac{\Delta p}{p} - \beta\frac{\theta}{2}\right)\left(1 - i\frac{\theta}{2}\right) \neq \frac{\Delta p}{p}\left(1 - i\frac{\theta}{2}\right) - \beta\frac{\theta}{2}\ ,\ \left(\text{négligeant } \frac{\beta i \theta^2}{4}\right),$$

Le taux d'accroissement du bénéfice par franc investi et **par an** sera obtenu en divisant par la durée du cycle θ. C'est ce taux que nous appelons taux de rentabilité K ·

$$k = \frac{b}{\theta} = \frac{\Delta p}{p}\left(\frac{1}{\theta} - \frac{i}{2}\right) - \frac{\beta}{2}$$

Il est bien évident qu'en présence d'un choix, la tactique de l'acheteur sera de maximiser la valeur des K.

c. - Comparaison des offres

Faisant apparaître le lot L :

$$K = \frac{\Delta p}{p}\left(\frac{q}{L} - \frac{i}{2}\right) - \frac{\beta}{2}$$

K dépend des deux variables : p prix offert par le vendeur pour la dimension L et L dimension du lot, les autres paramètres étant fixés.

Par exemple : $\theta = 0,5$ (6 mois)

$$i = 5\%$$

$$\beta = 10\%$$

$$\frac{\Delta p}{p} = 10\%$$

$$K = \frac{\Delta p}{p}\left[\frac{q}{L} - 0,025\right] - 0,05$$

$K = 14,75\%$ (au lieu de 20% si l'on ne tient pas compte des paramètres i et β)

Dans bien des cas, il y a avantage à tracer l'abaque :

$$\mathrm{Log}\,(K + \frac{\beta}{2}) = \log \frac{\Delta p}{p} + \log\left(\frac{1}{\theta} - \frac{i}{2}\right)$$

en prenant pour échelles fonctionnelles :

en ordonnées $[K] = \log\,(K + \frac{\beta}{2})$

en abscisses $[\theta] = \log\left(\frac{1}{\theta} - \frac{i}{2}\right)$

l'abaque se présente sous la forme de la fig.5 . **On l'utilise en positionnant les offres sur le graphique, la règle de décision est de choisir le point le plus haut.**

Cet abaque nous a révélé souvent des différences considérables dans le cas où les prix sont fixés autoritairement, sans recherche opérationnelle préalable (1).

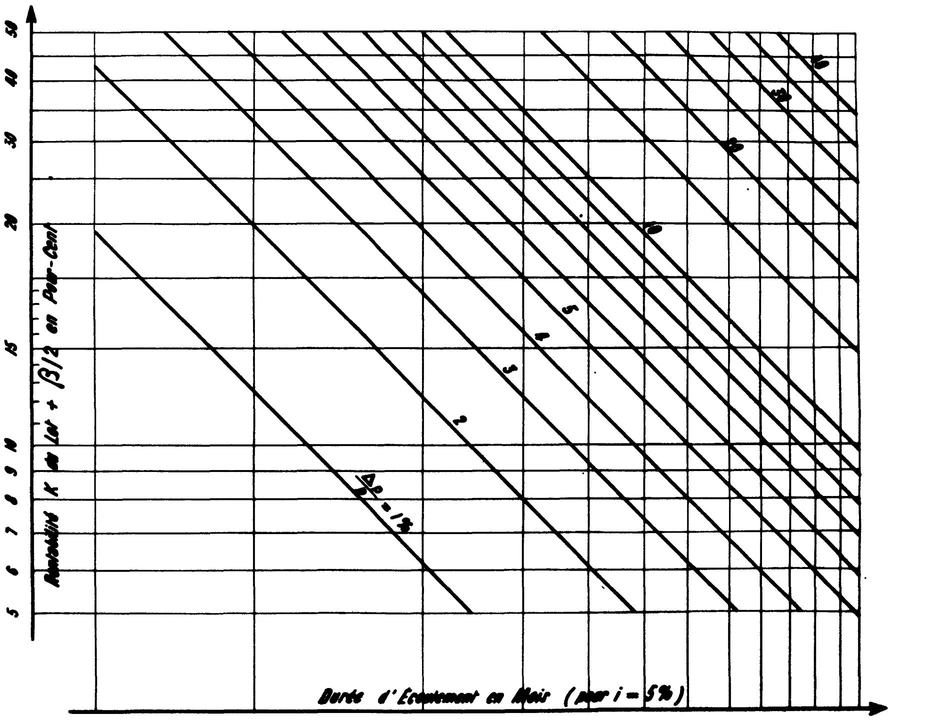

Fig. 5

On peut envisager encore d'autres circonstances où π constant, p dépend de L d'une manière prévisible : fabrications en série, transports, auto, péniches. On peut aussi faire intervenir π-variable par l'intermédiaire de l'élasticité de la demande

$$\left(\frac{\pi}{p}\frac{dq}{d\pi} = \lambda\right) \quad \text{alors} \quad q = f(\pi)$$

(1) Si l'on peut prévoir pour la durée du cycle à venir un débit q' différent du débit moyen q (période de morte saison par exemple) il y aura évidemment avantage à utiliser q' ou la valeur θ' correspondante

d. - Détermination de l'importance d'une série

Ici, on remplace π par r, le prix de revient de sortie de magasin. Le bénéfice b par cycle est nul par définition.

On se propose de minimiser r connaissant la fonction de coût :

$$p = a + \frac{b}{x} ,$$

où x est la dimension de la série, prise ici pour variable.

On a, à l'époque $\frac{\theta}{2}$:

$$r = p \left[1 + \beta \frac{\theta}{2}\right]$$

qui peut s'exprimer en fonction de $x = q\theta$ par

$$r = p\left[1 + \frac{\beta x}{2q}\right] = \left(a + \frac{b}{x}\right)\left(1 + \frac{\beta x}{2q}\right)$$

$$r = a + \frac{b}{x} + \frac{a\beta x}{2q} + \frac{b\beta}{2q}$$

Le PR est minimum pour dr = o

$$-\frac{b}{x^2} + \frac{a\beta}{2q} = 0 .$$

d'où la valeur L de x, solution du problème :

$$L = q\sqrt{\frac{2}{\beta q} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)} .$$

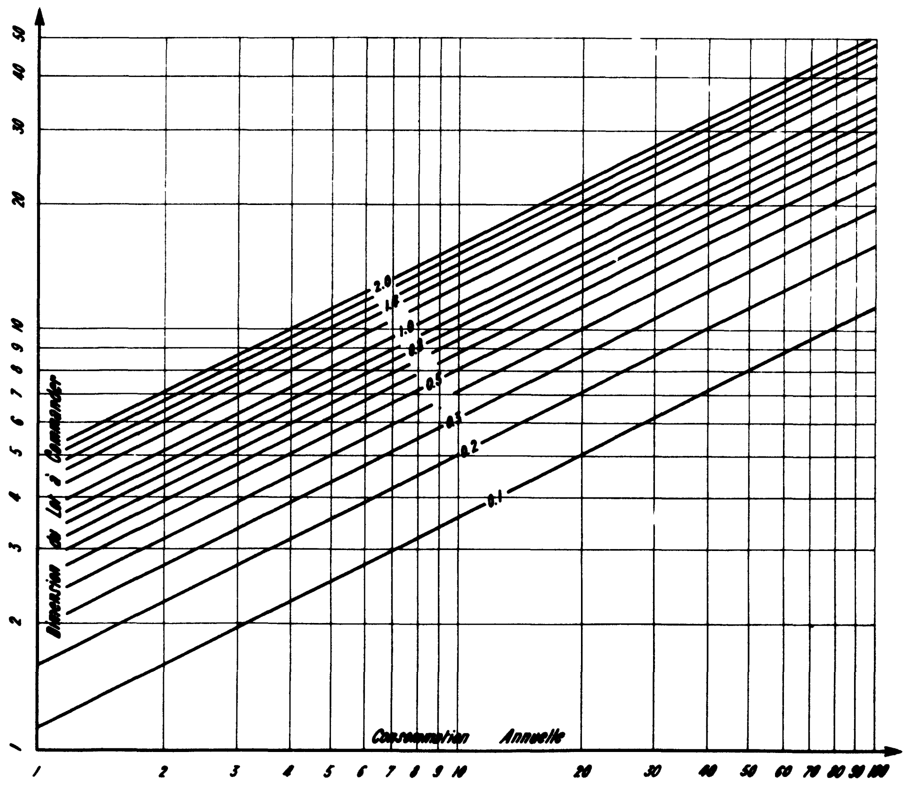

Fig. 6

Ici l'optimum est obtenu sur la base de **l'économicité**; il serait plus compliqué de l'obtenir sur la base d'une rentabilité maximum et ce raffinement ne modifierait que légèrement les résultats numériques.

Sur la figure 6, la formule précédente a été représentée sous forme d'abaque. Il sert à déterminer l'importance des commandes d'imprimés pour un économat : en abscisses figurent les quantités annuelles d'exemplaires consommés, en ordonnées, les quantités L à commander. Les parallèles obliques donnent les niveaux du rapport $\frac{b}{a}$ qui caractérisent chaque modèle. Le rapport $\frac{b}{a}$ est le rapport des frais fixes aux frais proportionnels existant dans la composition du coût global.

3. - STOCK DE SÉCURITÉ

a. - Modèle assimilé à une loi de Poisson

Dans l'hypothèse où un stock s'écoule par unités de vente bien définies : caisse par exemple, et ou les durées d'observation sont courtes, la loi des probabilités de sorties est une **loi de Poisson.**

Les quantités sorties s'expriment par exemple par une suite :

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n ,$$

comme s'il s'agissait du résultat d'un jeu à n coups (ou n jours).

En désignant par λ la moyenne attendue, on a :

$$E\left[\alpha\right] = \lambda, \quad \text{var}\left[\alpha - \lambda\right] = \lambda \quad \left(\text{écart-type } \sqrt{\lambda}\right)$$

$$\text{Prob}\left[\alpha\right] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{\alpha}}{\alpha!}$$

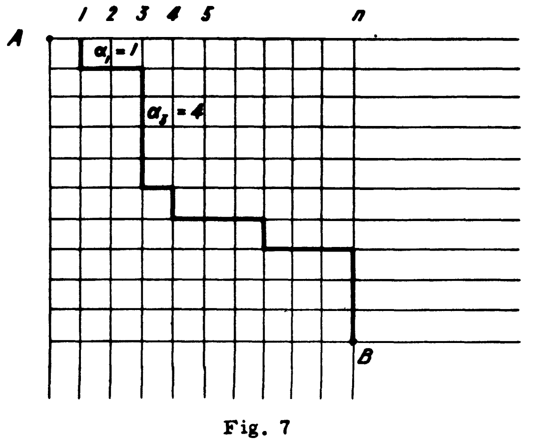

Fig. 7

Au bout de n jours, l'évolution du ieu sera représentée sur (fig.7) par une ligne en escalier allant de A en B, cette ligne ne monte jamais, Elle est comprise dans le quadrillage à n colonnes et Y lignes ou $Y = \alpha_1 + \alpha_2 +, \ldots ,+\alpha_n$.

La probabilité de parcourir **le chemin** indiqué est :

$$P = p(\alpha_1) \quad p(\alpha_2) \ldots = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{Y}}{\alpha_1 ! \, \alpha_2 ! \ldots\ldots \alpha_n !}$$

et la probabilité d'arriver en B par **n'importe quel chemin** est :

$$\text{Prob}\,(A \rightarrow B) = e^{-n\lambda} \lambda^{Y} \sum \frac{1}{\alpha_1 ! \, \alpha_2 ! \ldots\ldots \alpha_n !}$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs possibles des α conservant constante leur somme Y.

Or · $(1+1+\ldots 1)^Y = n^Y \quad = Y! \sum \frac{1}{\alpha_1!, \ldots, \alpha_n!}$

d'où

$$\text{Prob}\ [A \rightarrow B] = e^{-n\lambda} \lambda^Y n^Y \frac{1}{Y!} = e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^Y}{Y!}$$

C'est encore une loi de Poisson :

- de moyenne égale à $n\lambda$
- de variance égale à $n\lambda$

b. - Tirage en grappes

En réalité, les marchandises en magasin sortent le plus souvent en "grappes" de γ unités - par exemple, un pompiste débite l'essence par multiple du litre - et la moyenne n'est plus λ par coup, mais $\gamma\lambda$ -(pour simplifier, γ représente le nombre **moyen** de grains par grappe).

Quant à la variance des grains elle devient $\gamma^2\lambda$ ou $\gamma(\gamma\lambda)$. Ici la moyenne est multipliée par γ et il faut considérer une loi à deux paramètres : moyenne et écart-type.

c. - Approximations numériques

Si le modèle doit nécessairement satisfaire à un processus d'addition de variables aléatoires toutes **positives** on peut dans les approximations **numériques** adopter une loi normale dès que la moyenne $(n\lambda)$ est assez grande et il suffira de faire une estimation de deux paramètres **à partir des statistiques d'écoulement.**

d. - Stock de sécurité

Cette approximation admise, nous aurons les estimations :

Sorties attendues : $n\lambda$

Ecart-type $= s\sqrt{n}$

avec la variable normée : $t = \dfrac{Y - n\lambda}{s\sqrt{n}}$

Les limites de confiance pour la valeur t du paramètre de la loi normale sont au bout du n-ième "coup".

$$Y \text{ limite} = n\lambda \pm t\, s\sqrt{n}$$

En fonction de la donnée n c'est une parabole (fig.8).

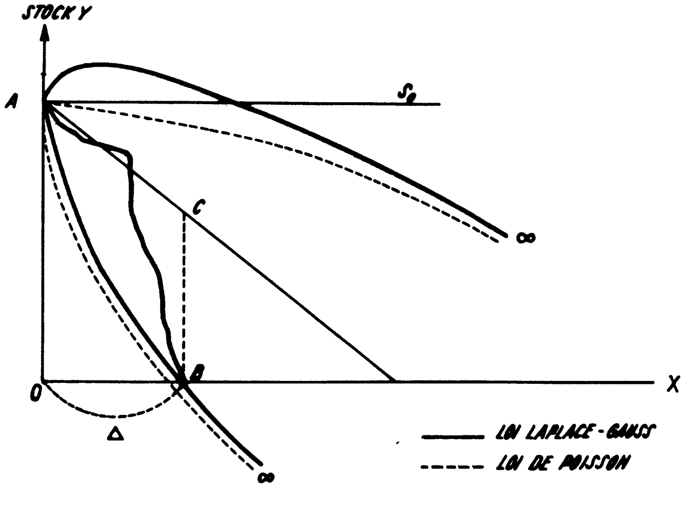

Fig. 8

Si OB (intersection) $=\Delta$, délai de réapprovisionnement, la valeur S_0 définit le stock de sécurité et répond aux conditions posées. La probabilité d'être en-dessous du point B est (fig. 9).

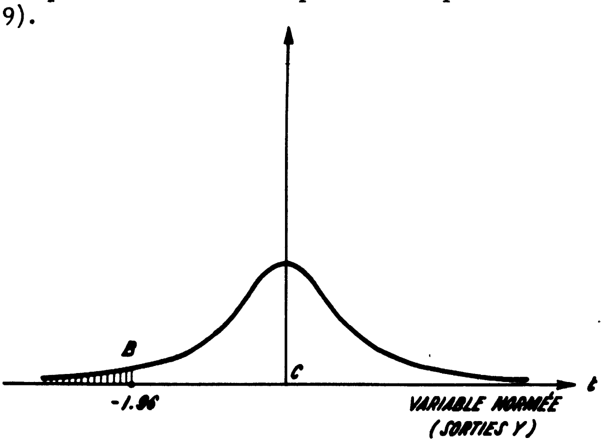

Fig. 9

$$\text{Prob} \left[Y < O \right] = \int_{-\infty}^{-t} f(t)\, dt ,$$

c'est le **risque** de défaillance que nous acceptons. Pour t = 1,96, ce risque est de 2,5%. La valeur de S_0 est alors pour $n = \Delta$:

$$S_0 = \Delta \lambda + t s \sqrt{\Delta}$$

Le choix du risque dépend de la **gravité** de la défaillance, gravité en argent ou gravité sur le plan humain (produits pharmaceutiques) (*)

e. - Stock mort

A l'époque B, il reste en moyenne quelque chose en stock, ce solde est très voisin de la valeur moyenne C qui se trouve sur la droite AC des sorties attendues. C'est le stock mort ou espérance mathématique de l'écoulement au bout du temps Δ , sa valeur est :

$$S_m = t\ s \sqrt{\Delta}$$

le calcul du prix de revient devra tenir compte de ce fait.

Exemple

q = 100 tonnes par an d'une sorte de papier en bobines

s = 5 tonnes pour une période annuelle

Δ = 0,16 année (2 mois) - durée de réapprovisionnement sur engagement ferme du fournisseur

t = 2

On a

Ecart-type = $5 \sqrt{0,16}$ = 2 tonnes

Stock mort = $ts \sqrt{\Delta}$ = $2 \cdot 2$ = 4 tonnes

Débit attendu · Δq = 0,16 q = 16 tonnes

Stock de sécurité · 16 + 4 = 20 tonnes (soit une majoration de 25 % du débit calculé).

---

(1) Une meilleure approximation numérique est obtenue en utilisant la loi logarithmo-normale La courbe représentative serait comprise entre les lignes d'ailleurs paraboliques qui ont été tracées. Remarquer de plus qu'elle réalise comme la loi de Poisson l'addition de variables toutes positives, c'est-à-dire qu'il n'y a que des sorties.

f. - Risque optimum admissible pour un magasin de vente

On peut définir un risque optimum en considérant les recettes et les dépenses. En d'autres termes il faut trouver une valeur du paramètre t qui assure un bénéfice maximum.

Si l'on considère toutes les ventes **possibles** Y (en quantités) réalisables au bout du temps Δ, celles-ci peuvent être classées par ordre décroissant (Fibrogramme) et la fréquence des unités Y supposées rangées matériellement et mesurées par la fonction cumulée de droite à gauche F (Y) (de la loi de densité f (y) loi qui n'est pas nécessairement gaussienne :

$$F(Y) = \int_Y^{\infty} f(y)\, dy \quad \text{(fig. 10)}$$

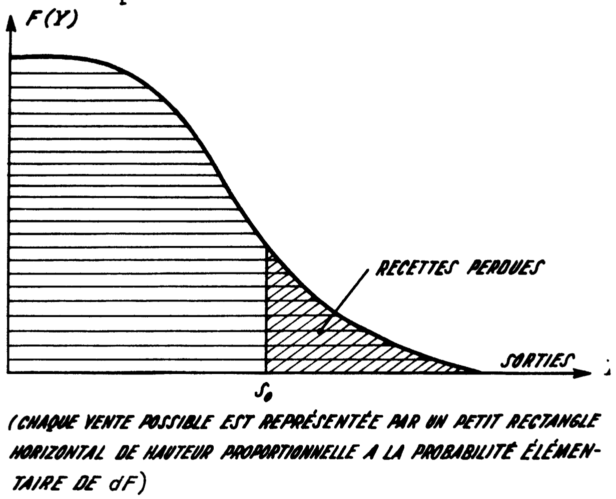

Fig. 10

Mais, ces ventes ne pouvant dépasser le stock initial S, les ventes les plus fortes sont tronquées et le volume des ventes a pour moyenne :

$$\overline{Y}(S) = \int_0^S F(Y)\, dY$$

cette moyenne incomplète est plus faible que la moyenne globale (fig. 11)

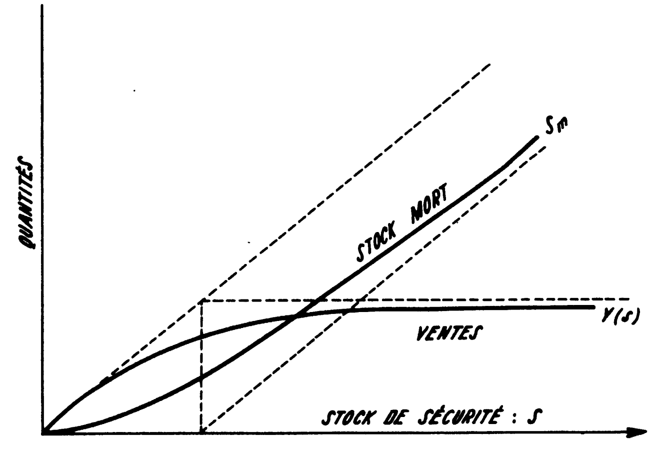

Fig. 11

D'autre part, le stock mort a pour valeur moyenne :

$$S_m = S - \overline{Y}(S)$$

il est clair que l'optimum est atteint quand le coût marginal est égal à la recette marginale. Calculons donc ces valeurs ·

La recette marginale au voisinage de S est, en quantités :

$$d\,\overline{Y}\,(S) = F\,(S)\,dS\ .$$

Le bénéfice par cycle de durée θ est $\Delta p\, d\overline{Y}$, et, le bénéfice annuel

$$\frac{\Delta p\, d\,\overline{Y}}{\theta}\ .$$

D'autre part, l'accroissement du stock est :

$$d\,S_m = \big(1 - F\,(S)\big)\,d\,S\ .$$

Son coût marginal est obtenu en tenant compte des frais de magasinage βp par unité immobilisée. Ce coût est alors $\beta\, p\, d\, S_m$ et, l'optimum est atteint quand :

$$\frac{\Delta p\, d\,\overline{Y}}{\theta} = \beta\, p\, d\, S_m$$

soit en fonction de S :

$$\frac{\Delta p}{\theta}\,F\,(S)\,d\,S = \beta\, p\,(1 - F\,(S)\,d\,S)$$

d'où la relation cherchée :

$$F = \frac{1}{1 + \frac{1}{\theta\beta}\,\frac{\Delta p}{p}}$$

(risque de défaillance).

Exemple

$\theta = 20$ jours

$\beta = 20\%$

$\frac{\Delta p}{p} = 40\%$

on a

$$F = \frac{1}{1 + 36{,}4} = 2{,}68\%$$

ce qui correspond à $t = 2$ par une approximation gaussienne.

REMARQUE

L'intervention de la durée du cycle θ montre que si l'on voulait raffiner l'étude analytique de l'optimum il faudrait lier le problème du lot à celui du risque, il y a dépendance entre ces deux modèles.

4. - RÉPARTITION DES STOCKS DANS UN RÉSEAU DE DISTRIBUTION

La notion du stock mort trouve une application très simple dans la comparaison des réseaux de distribution.

En effet, considérons le modèle (fig. 12) où la distribution sur le territoire est assurée directement entre l'usine et les détaillants.

Tous les délais de réapprovisionnements sont égaux à Δ. De plus, en supposant les débits de ventes égaux, tous les stocks morts ont la même valeur : $t\, s\sqrt{\Delta}$ et la charge de ces stocks dans le réseau de distribution est : $N\, t\, s\sqrt{\Delta}$, en désignant par N le nombre de détaillants.

On se demande s'il y a intérêt, dans une aire réduite, à installer un grossiste ou centre livreur de manière à régulariser les stocks et l'on se propose de quantifier le résultat d'un tel choix.

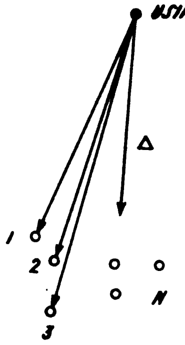

Fig. 12

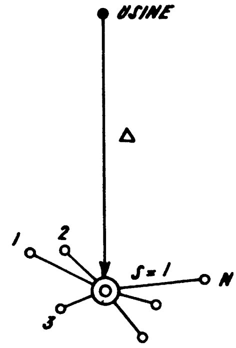

Fig. 13

Pour cela, en nous reportant au modèle de la fig. 13 nous voyons clairement que le débit du centre livreur sera devenu N fois plus grand que celui du détaillant; par contre, son stock mort sera devenu $t\ s\ \sqrt{N\Delta}$. Si l'on suppose que les délais de livraison du centre au détaillant se font dans l'unité de temps, le stock mort de chaque détaillant est réduit à $t\ s$ (puisque $\Delta = 1$). Il en résulte que le stock mort global dans ce deuxième type de réseau est :

$$N\ t\ s + t\ s\ \sqrt{N\Delta}$$

Le gain obtenu peut être mesuré par le rapport des stocks morts dans les deux cas

$$\frac{N\ t\ s + t\ s\ \sqrt{\Delta N}}{N\ t\ s\ \sqrt{\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{N}}$$

par exemple, si

$\Delta = 36$ jours

$N = 100$ détaillants

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} + \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = 0{,}267$$

soit une diminution de près de trois-quarts.

Dans chaque cas particulier on tiendra compte des possibilités de transport : avions et camions ou péniches ; des prix obtenus pour des quantités plus importantes, etc... et la comparaison ne se fera plus en quantités mais en coûts.

Si nos conclusions d'ordre pratique sont d'un intérêt évident, le lecteur nous pardonnera d'y apporter une conclusion d'ordre philosophique :

Nous pensons que dans ces sortes de recherches, l'opération mentale la plus difficile, parce que la plus inhabituelle pour notre formation intellectuelle, est de traduire un ensemble concret et complexe en un modèle abstrait et aussi simple que possible. La quantification ne devient plus qu'un problème secondaire qui relève des techniques de l'analyse mathématique ou de l'emploi de machines électroniques asservies aux données du modèle.

BIBLIOGRAPHIE

1. - R. HÉNON - Journées du Contrôle - C.N.O.F. - 1945.

   R. HÉNON - Congrès d'Econométrie - Colmar 1949

2. - MASSÉ - Les réseaux et la Régulation de l'Avenir - Hermann

   J. LADERMAN, S.B. LITTAUER, Lionel WEISS - The inventory Problem A.S.A. Décembre 1953

   G. KRÉWERAS - La mise en équations du Problème des Stocks - Séminaire de Recherche Opérationnelle - Revue de Statistique Appliquée Vol. III, n°1 (1955)

   Kenneth J. ARROW - T. HARRIS - Jacob MARSCHAK - Optimal Inventory Policy - Econometrica - Juillet 1951.

   A. DVORETZKY - J. KIEFER - J. WOLFOWITZ - The Inventory Problem. Econometrica - Avril, Juillet 1952.

   H.A. SIMON et C.C. HOLT - The Control of Inventory and Production Rates O.R.S.A. - Août 1954