REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

E. MALINVAUD

Introduction à l'étude des programmes linéaires

Revue de statistique appliquée, tome 3, nº 2 (1955), p. 109-117

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1955__3_2_109_0>

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DES PROGRAMMES LINÉAIRES

par

E. MALINVAUD

Ancien élève de l'École Polytechnique

Administrateur Général à l'Institut National de la Statistique et des Études Économiques

De développement très récent, la technique des programmes linéaires suscite chaque jour davantage l'attention des organisateurs et des chercheurs. Conçue d'abord par les économistes pour leurs besoins propres, elle trouve aujourd'hui des applications dans les domaines les plus divers et devra bientôt prendre place dans la formation générale des Ingénieurs. Il a paru intéressant d'en présenter ici sommairement la méthode et les caractères généraux. L'article suivant a fait l'objet d'un exposé au Séminaire de Recherche Opérationnelle de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, le 8 décembre 1954.

Toute une partie des recherches économiques et économétriques actuelles est orientée vers les problèmes de gestion ou d'organisation et présente ainsi des rapports très étroits avec la recherche opérationnelle. Etude des schémas d'information dans les entreprises, détermination des procédés les plus avantageux pour la gestion des stocks, examen des méthodes rentables pour l'utilisation d'un matériel de transport, autant de sujets qui intéressent à la fois les bureaux de recherche opérationnelle et les économistes soucieux de mieux connaître les mécanismes de la production et de la distribution des richesses. L'analogie des préoccupations se manifeste tout particulièrement dans les travaux sur les "programmes linéaires". Cette expression, traduction de l'anglais "Linear Programming" serait plus exactement transposée par "programmation linéaire" qui évoque plus précisément l'idée d'organisation. Dans sa technique même, un programme linéaire outil de raisonnement ou intermédiaire de calcul, résulte le plus souvent d'une analyse des différentes **opérations élémentaires** qui interviennent dans un système de production, de distribution ou de circulation. Cette analyse semble être un des procédés les plus habituels de la recherche opérationnelle.

Formellement, et dans son expression la plus simple, tout programme linéaire peut être défini par un système d'inégalités linéaires :

$$S \left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geqslant c_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \geqslant c_2 \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \geqslant c_m \end{array} \right.$$

ou encore

$$Ax \geqslant c$$

et par une forme linéaire

$$R = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots\dots\dots + p_n x_n$$

ou encore

$$R = p'x$$

où les a_{ij}, les c_i et les p_j sont des paramètres donnés et les x_j des variables. Dans la représentation matricielle, A est la matrice des a_{ij}, tandis que x, c et p sont les vecteurs des x_j, des c_i et des p_j.

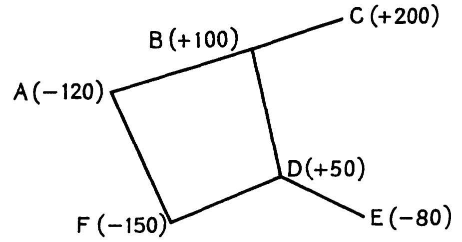
Déterminer la solution du programme linéaire consiste à trouver n nombres **non négatifs** x_1, x_2 .... x_n de façon à rendre minimum R, tout en respectant le système S.

Plutôt que d'aborder directement l'étude mathématique des systèmes ainsi introduits, et de leur solution, il convient d'examiner le contexte dans lequel ils se présentent. Ceci permettra de mieux comprendre la nature des questions et d'interpréter utilement les réponses qui leur sont données.

ANALYSE DES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES - QUELQUES EXEMPLES

Le but de l'organisation consiste souvent à combiner un ensemble "d'opérations élémentaires" de la meilleure façon possible. Voici quelques exemples qui introduiront assez naturellement notre étude et montreront la portée réelle des méthodes que nous envisageons.

Supposons d'abord que certains centres expéditeurs ou consommateurs A, B, C, D, E et F par exemple, aient à expédier ou à recevoir des quantités données d'une même marchandise, le total des expéditions étant égal au total des livraisons. Ces centres sont reliés entre eux par un certain réseau de transport, muni d'un matériel convenable. Comment organiser la circulation du matériel de façon à réduire le plus possible les charges d'exploitation? Pour être plus précis, figurons sur un graphique les liaisons de transport. Supposons que A, E et F sont respectivement consommateurs de 120, 80 et 150 unités, tandis que B, C et D sont expéditeurs de 100, 200 et 50. Quelles quantités faudra-t-il faire circuler sur chaque ligne connaissant la capacité maximum de la ligne et les frais d'exploitation à la tonne transportée?



Dans ce cas, une opération élémentaire consistera par exemple dans le transport d'une tonne de B à D par la ligne BD. Le programme doit préciser le tonnage à transporter sur chaque ligne dans chaque sens, c'est-à-dire la mesure dans laquelle on fera appel à chaque opération élémentaire. L'intensité d'utilisation d'une ligne dans un sens déterminé sera appelée "niveau d'activité" de l'opération élémentaire correspondante.

Comme autre exemple, demandons-nous comment déterminer un régime alimentaire qui soit le moins cher possible et qui satisfasse à un certain nombre de conditions · apport minimum en calories, répartition convenable entre protides, lipides et glucides, quantités minima de sels minéraux et de vitamines, etc... Cette question peut être traitée en définissant comme opération élémentaire l'inclusion dans le régime d'une quantité unitaire d'un type donné de nourriture. Il y aura autant d'opérations que d'aliments. Le régime sera déterminé dès lors que sera fixée la quantité retenue de chaque aliment, c'est-à-dire le "niveau d'activité" de chaque opération élémentaire.

Reprenons finalement ici un exemple examiné par M. MASSE (1). Comment l'électricité de France doit-elle employer les crédits d'investissement dont elle dispose pour créer des équipements qui lui permettent de remplir le Plan et de réduire au minimum les charges d'exploitation futures ? Supposons que l'E.D.F. puisse créer quatre types d'usines : Usine thermique, usine au fil de l'eau, usine de lac et usine d'éclusée. Elle fournit des produits d'une nature très complexe. Mais, pour les besoins de l'investissement, on peut raisonner comme si tous ces produits se ramenaient à trois seulement : Energie annuelle (nombre de kWh), puissance d'heures pleines d'hiver, puissance de pointe de Décembre. Le Plan fixe les fournitures des différentes espèces à assurer.

---

(1) - L'équipement électrique sous l'aspect de la fabrication des produits liés. Conférence présentée le 25 Octobre 1954 au Séminaire de Recherche Economique de M. ALLAIS.

Une opération élémentaire consiste ici dans l'installation d'une tranche d'équipement d'un type donné. La solution doit indiquer les tranches à réaliser sur chacun des quatre types d'usines et fixer ainsi les "niveaux d'activité" propres aux quatre opérations.

ANALYSE DES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES - ÉTUDE THÉORIQUE

Comme il apparaît dans les exemples précédents, quelques constantes caractéristiques sont associées à toute opération élémentaire. Ainsi, pour la ligne de transport BD, dans le sens de B vers D, l'opération élémentaire correspond à l'expédition d'une tonne de B, à la livraison d'une tonne en D et à des frais d'exploitation d_{BD}. De même, l'achat d'un kilo de pain correspond à une certaine dépense en francs et à des apports bien spécifiés de chacun des éléments nutritifs. Une tranche d'équipement thermique entraîne des dépenses d'investissement connues des charges d'exploitation futures également connues; elle fournira un certain nombre de kWh, assurera une certaine puissance de pointe en Décembre et une certaine puissance moyenne d'heures pleines d'hiver.

Pour compléter la terminologie imagée que nous avons adoptée, disons que toute opération élémentaire se traduit par la production ou l'utilisation de certains "biens". Ainsi, dans le premier exemple, les biens seront les quantités nettes expédiées de chacun des centres et les frais d'exploitation. On dira alors que l'opération élémentaire BD produit une unité du bien B,- 1 unité du bien D et d_{BD} unités du bien "frais d'exploitation". Dans chaque exemple, la liste des biens sera facile à établir. L'un d'eux jouera toujours un rôle particulier, celui par rapport auquel doit être effectuée la maximation ou la minimisation.

Appelons donc p_j la quantité de ce bien privilégié produite par l'opération élémentaire j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Numérotons les autres biens, de 1 à m. Soit a_{ij} la quantité de biens i produite par l'opération j. Au total, un niveau d'activité unitaire pour j se traduira par l'apparition des quantités suivantes des différents biens :

$$a_{ij} \,,\, a_{2j} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots a_{mj} \,,\, p_j$$

Un niveau d'activité x_j pour l'opération j signifie par exemple que l'on transporte x_j tonnes de B en D, que l'on inclut dans le régime x_j kilogs de pain, ou que l'on installe x_j tranches d'équipements thermiques. On admet généralement la proportionnalité entre les niveaux d'activité et les quantités obtenues. Ainsi, correspondant à x_j, on aura ·

$$a_{1j}\, x_j \,,\, a_{2j}\, x_j \ldots\ldots a_{ij}\, x_j \ldots\ldots a_{mj}\, x_j \qquad p_j x_j$$

Cette hypothèse, supposée vraie pour toute valeur positive de x_j, sera parfois assez mal vérifiée. Par exemple, les charges d'exploitation sur une ligne ferroviaire ne sont généralement pas proportionnelles aux tonnages transportés. Néanmoins, dans la plupart des cas, cette homogénéité supposée pourra être retenue.

Si maintenant toutes les opérations sont effectuées simultanément, chacune avec son niveau d'activité propre, on peut s'attendre à obtenir les disponibilités suivantes de chaque bien :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \ldots \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \ldots \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\, x_j \quad \sum_{j=1}^{n} p_j\, x_j$$

Cela exclut les phénomènes de complémentarité. Nouvelle hypothèse qui ne serait par exemple pas admissible dans un modèle de transport où on utiliserait simultanément les deux activités : transport de B en D et transport de D en B. En effet les charges d'exploitation résultant d'un transport régulier de 1000 tonnes de B en D et de 1000 tonnes de D en B ne sont pas égales à la somme des frais occasionnés par un transport régulier de 1000 tonnes de B en D avec retour à vide et de ceux occasionnés par un transport régulier de 1000 tonnes de D en B avec retour à vide. Néanmoins, comme les deux hypothèses d'homogénéité et d'additivité peuvent souvent être retenues en pratique, au moins à titre de première approximation, le résultat d'ensemble des opérations se calcule facilement à l'aide des expressions précédentes.

Les conditions du problème imposent aussi certaines égalités ou certaines inégalités sur les résultats obtenus. Dans le premier exemple, la quantité de bien

B obtenue doit être égale à a + 100. Dans le second, le régime alimentaire doit apporter un nombre de calories qui ne soit pas inférieur à un certain minimum, etc... Si, par exemple, il n'y a que des inégalités et que les biens ont été définis de façon à donner le même sens à toutes ces inégalités, il faudra satisfaire un système tel que :

$$S = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant c_i \,, \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots m \,.$$

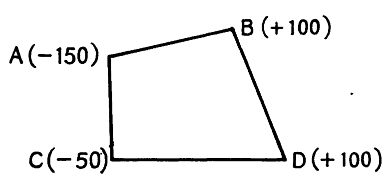
Trouver la solution du problème impose finalement que l'on réduise au minimum, ou que l'on gonfle au maximum, la quantité produite du bien privilégié : frais d'exploitation ou coût du régime. Il faudra donc rechercher le minimum ou le maximum de ·

$$R = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

en choisissant pour celales niveaux d'activité les plus favorables. On voit ainsi comment nous avons été conduits à introduire un programme linéaire dans la forme qui a été annoncée au début de cet article.

ÉTABLISSEMENT DE LA MATRICE A ET DU VECTEUR p DANS UN CAS PARTICULIER

A titre d'exemple, reprenons le problème de transport légèrement simplifié, conformément au schéma ci-contre. Voyons alors plus précisément comment il peut être mis en équations, suivant les principes envisagés ci-dessus. Les opérations élémentaires sont au nombre de huit, caractérisée chacune par le transport d'une tonne d'un centre à un centre voisin, par exemple de A à B ou de A à C. La liste de ces opérations figure à gauche du tableau I. Afin de les repérer plus simplement, un numéro leur a été affecté, entre 1 et 8. En plus du "bien" privilégié représenté par les frais d'exploitation du montant d_i pour l'opération i, il existe quatre "biens" qui correspondent aux expéditions nettes de chacun des centres. Définissons l'unité de chaque bien par l'expédition d'une tonne du centre correspondant. Pour établir la matrice des a_{ij} les biens ont été portés en colonnes en haut du tableau I, les coefficients a_{ij} peuvent alors être inscrits directement dans le carré central. Par exemple, l'opération 1 implique le transport d'une tonne de A vers B et conduit donc à 1 pour le bien A, à -1 pour le bien B et à 0 pour les deux autres biens. Pour simplifier la lecture, les coefficients nuls n'ont pas été reproduits. Enfin, en bas du tableau, le programme demandé a été inscrit. On voit donc nettement les quantités désirées de chaque bien



Pour écrire le système d'équations, il suffit de supposer que l'équation i est employée avec le niveau x_i et implique la production de $x_i\, a_{ij}$ unités de bien j. Par exemple, l'opération 1 sera utilisée à concurrence de x_1, ce qui se manifestera par l'expédition de x tonnes de A. En multipliant ainsi chaque ligne de la matrice a_{ij} par le niveau x_i correspondant et en faisant les totaux dans les colonnes, on obtient donc directement le système S, tel qu'il figure en-dessous du tableau. Cette mise en équation est très directe; elle exige moins de temps qu'il n'en faut pour la décrire.

VARIANTES DANS LA FORMULATION DES PROGRAMMES LINÉAIRES

La formulation des programmes linéaires est sujette à certaines variations. Le système S peut être écrit avec des égalités ou des inégalités. Ceci n'est cependant qu'une modification apparente, puisque les égalités pourraient être supprimées par élimination d'un nombre suffisant de variables x_j. Il y a, si l'on veut, deux formes extrêmes.

TABLEAU 1

MISE EN ÉQUATION D'UN PROBLÈME

DE TRANSPORT.

Opérations élémentaires: Numéro	Opérations élémentaires: Transport de 1t.	Biens, 1 t nette expédiée de: A	B	D	C	Frais d'exploitation
1	de A à B	1	-1			d_1
2	de B à D		1	-1		d_2
3	de D à C			1	-1	d_3
4	de C à A	-1			1	d_4
5	de A à C	1			-1	d_5
6	de C à D			-1	1	d_6
7	de D à B		-1	1		d_7
8	de B à A	-1	1			d_8
	Programme	-150	100	-50	100	

Système S :

$$\begin{cases} + x_1 - x_4 + x_5 - x_8 = -150 \\ - x_1 + x_2 - x_7 + x_8 = 100 \\ - x_2 + x_3 - x_6 + x_7 = -50 \\ - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 100 \end{cases}$$

$$R = \sum_{j=1}^{\infty} d_j \, x_j$$

(a) - Le système S comprend m inégalités entre n variables x_j assujetties à être non-négatives;

(b) - Le système S comprend m égalités entre n + m variables x_j assujetties à être non-négatives;

On passe de la forme (a), telle qu'elle a été écrite au début à la formule (b) par les relations :

$$x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - c_i$$

Inversement, si le système est écrit sous la forme (b) on peut toujours exprimer les n variables $x_{n+1}, x_{n+2} \dots x_{n+m}$ par une fonction linéaire des n variables $x_1 x_2 \dots x_n$ et éliminer complètement le premier ensemble de variables, en conservant m inégalités qui expriment le caractère non négatif des variables éliminées.

Plutôt que par leur présentation formelle, les programmes linéaires doivent être classés d'après les valeurs de n : nombre de variables indépendantes (ou dimension du problème) en n + m : nombre d'inégalités linéaires.

Une autre distinction plus fondamentale doit être établie. Plutôt que de consister dans la recherche du minimum d'une seule forme linéaire, le problème peut impliquer la minimisation simultanée de deux ou plusieurs formes linéaires :

$$R_1 = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \qquad \text{et} \qquad R_2 = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j \ .$$

Evidemment, les objectifs représentés par R_1 et R_2 sont en général quelque peu contradictoires. Tout au moins peut-on rechercher les solutions "admissibles" du problème, dans le sens qui va être défini. Considérons un ensemble de valeurs des x_j, soit :

$$x^* = \left\{ x_1^*, x_2^*, \dots x_j^*, \dots x_n^* \right\}$$

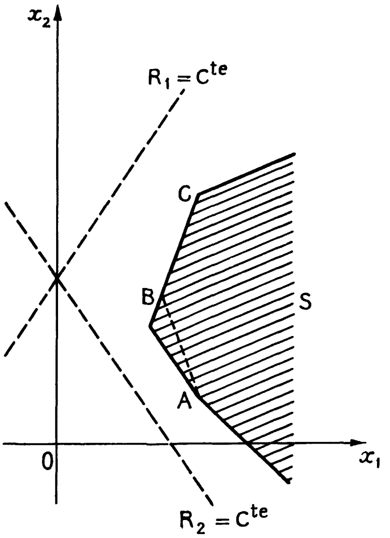
Il sera dit admissible s'il satisfait le système S et s'il n'existe aucun autre ensemble x satisfaisant S et tel que :

$$R_1(x) \leqslant R_1(x^*) \qquad \text{et} \qquad R_2(x) < R_2(x^*)$$

ou

$$R_1(x) < R_1(x^*) \qquad \text{et} \qquad R_2(x) \leqslant R_2(x^*) \ .$$

Autrement dit, une solution sera admissible s'il n'est pas possible de réaliser une valeur plus faible de l'une des formes linéaires sans entraîner un accroissement de l'autre.



La figure ci-contre illustre les différentes solutions d'un programme linéaire comprenant deux opérations élémentaires (donc : n = 2) et quatre inégalités (donc m = 4). L'ensemble des points (x_1, x_2) qui satisfont le système S est constitué par un polyèdre convexe, hachuré sur la figure. La solution du programme lorsqu'il faut minimiser la forme R_1 est représentée par le point C. Les solutions du programme associé à la forme R_2 sont les points du segment AB tout entier. Les solutions admissibles lorsqu'on cherche à minimiser simultanément R_1 et R_2 sont les points de l'un ou l'autre des deux segments AB et BC.

On voit que tout point admissible pourrait aussi être obtenu comme solution d'un programme dans lequel on chercherait le minimum d'une forme :

$$R = \alpha R_1 + (1 - \alpha) R_2 \ ,$$

où α est un nombre convenable du segment $[0, 1]$. Adopter une solution admissible revient alors à établir une espèce de pondération, plus ou moins implicite, entre les deux objectifs non concordants représentés par R_1 et R_2. On pourrait voir que cette propriété est vraie en toute généralité quels que soient n, m et le nombre des formes R_k.

NATURE MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

Reprenons le problème initial pour analyser sa nature mathématique. Si A est la matrice des a_{ij}, p le vecteur des p_j et c le vecteur des c_i, il s'énonce :

Problème - Trouver un vecteur $x \geqslant 0$ à n dimensions tel que p'x soit minimum avec la condition $Ax \geqslant c$.

Il s'agit donc de déterminer un minimum lié. Si les inégalités étaient remplacées par des égalités, nous procéderions sans difficulté grâce à l'introduction de facteurs de Lagrange convenables. La présence des inégalités ne fait pas disparaître totalement les facteurs de Lagrange. Mais elle les rend beaucoup moins intéressants. Avant d'en indiquer la raison, définissons un problème dual de notre problème initial.

Problème dual : - Trouver un vecteur $u \geqslant 0$ à m dimensions tel que u'c soit minimum avec la condition $A'u \geqslant p$, où A' est la matrice obtenue à partir de A par interversion des lignes et des colonnes.

On prouve alors le théorème suivant :

Théorème de dualité .

(1) - Pour que $x^* \geqslant 0$ soit solution, il faut et il suffit qu'il existe un vecteur $u^* \geqslant 0$ tel que :

$$\Phi(x, u^*) \geqslant \Phi(x^*, u^*) \geqslant \Phi(x^*, u) \qquad \text{pour tout} \quad x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u \geqslant 0$$

avec

$$\Phi(x, u) = p'x + u'(c - Ax).$$

(2) - Si u^* est solution du problème dual, une solution x^* sera obtenue en recherchant le minimum de $p'x - u^{*\prime}Ax$ avec la seule condition $x \geqslant 0$.

Le première partie du théorème montre que u^* joue le rôle d'un facteur de Lagrange, comme ceci apparaît sur l'expression de $\Phi(x, u)$. Cependant, dans la recherche du couple (x,u) qui correspond au col de Φ, il reste des inégalités $x \geqslant 0$ et $u \geqslant 0$ qui empêchent de résoudre le problème par le seul recours aux procédés analytiques.

La deuxième partie montre que la résolution du problème direct sera relativement facile si l'on a déjà répondu au problème dual.

Ainsi dans certains cas, il y aura intérêt à déterminer la solution par une voie indirecte, en remplaçant dans une première étape le problème posé par son dual. Alors que le premier implique la détermination des n composantes de x et se situe donc dans un espace à n dimensions, le second est posé dans un espace à m dimensions. Il sera généralement plus simple si $m < n$. Dans le choix entre ces deux problèmes, il faut d'ailleurs tenir compte également de la structure particulière de A qui peut se prêter plus facilement au traitement dans un sens que dans un autre.

Il n'est sans doute pas inutile de montrer l'interprétation économique du principe de dualité qui vient d'apparaître. Reprenons l'interprétation des premiers paragraphes de cet exposé. Les dépenses d'exploitation afférentes à chaque opération élémentaire sont représentées par le vecteur c. Assimilons les composantes de u aux prix des différents biens. Les deux problèmes peuvent alors être énoncés en des termes nouveaux ·

Problème direct : Trouver des niveaux d'activité $x \geqslant 0$ qui rendent les dépenses d'exploitation minimum et permettant néanmoins la réalisation du programme : $Ax \geqslant c$.

Problème dual : Trouver des prix $u \geqslant 0$ pour chaque type de biens, qui donnent la valeur la plus faible possible au programme, tout en respectant la rentabilité des différentes opérations $p \leqslant A'u$.

Une fois déterminés les prix u, le problème direct se ramène à la recherche des niveaux d'activité qui maximisent le profit d'exploitation $u^* Ax - p'x$.

Ainsi, par exemple, la recherche du régime alimentaire optimum est-elle en un certain sens équivalente à celle des valeurs de chaque constituant énergétique. De même, la détermination des programmes d'équipement E.D.F. est équivalente à celle des prix respectifs des différentes fournitures électriques : kWh annuels, kW d'heures pleines d'hiver et kW de pointe de Décembre.

Le théorème de dualité et l'interprétation qui vient d'en être présentée rattachent les propriétés des programmes linéaires à la théorie économique classique du rendement social et de la gestion la meilleure des ressources à notre disposition. A partir d'hypothèses différentes, elle permet de retrouver des résultats d'une grande portée. Elle montre aussi que ces résultats peuvent rendre de sérieux services dans la solution de problèmes pratiques.

MÉTHODES DE CALCUL

Pour terminer, il faudrait mentionner les méthodes de calcul à notre disposition. Les programmes linéaires s'introduisent surtout lorsque la solution n'est pas évidente à priori, c'est-à-dire quand il faut faire intervenir un nombre assez grand d'opérations élémentaires ou de biens. La détermination des points extrêmes du polyèdre et du meilleur d'entre eux présente alors parfois de sérieuses difficultés. (Certaines simplifications peuvent d'ailleurs apparaître à la suite d'un peu de réflexion sur le tableau A).

Chercher les points d'un polyèdre qui rendent minimum une forme linéaire est, en soi-même, un problème simple, dont chacun d'entre nous saurait trouver facilement la solution si les nombres n et m étaient petits, de l'ordre de 3 ou 4 par exemple. Mais si n et m sont assez grands, il faut utiliser une méthode rationnelle pour conduire les calculs.

Les procédés employés aujourd'hui supposent que l'on commence par déterminer un point du polyèdre, c'est-à-dire un point qui satisfasse toutes les inégalités. Puis, l'on se déplace dans le polyèdre vers la solution cherchée. La méthode la plus habituelle, dite "méthode du simplexe" consiste à suivre les arrêtes du polyèdre en s'assurant de ce que la forme linéaire à minimiser prend des valeurs toujours décroissantes. (Dans l'espace à n dimensions, une arrête est définie par l'égalité à zéro de n - 1 inégalités parmi les n + m).

Une autre méthode, proposée par R.FRISCH, consiste à se déplacer à l'intérieur du polyèdre en se dirigeant vers les valeurs décroissantes de la forme linéaire, mais en prenant une direction qui ne conduise pas à se rapprocher trop vite des frontières du polyèdre. Pour cela, on peut utiliser un potentiel :

$$V(x_1 \ldots x_n) = \log x_1 + \ldots + \log x_n + \log_{n+1} + \ldots \log x_{n+m} ,$$

(où x_{n+i} est défini comme ci-dessus dans le paragraphe 5). Le gradient de V indique en chaque point la direction de la frontière la plus voisine, direction qui doit être évitée.

* * *

Pour compléter cet exposé trop sommaire, le lecteur pourra se reporter aux références bibliographiques suivantes :

CHARNES, COOPER et HENDERSON - An Introduction to Linear Programming
(John Wiley and Sons, New-York - 1953)

DORFMAN - Application of Linear Programming to the Theory of the Firm
(University of California Press, Berkeley - 1951)

R. FRISCH - Methods of Solving Linear Programming Problems
(University Institute of Economics, Oslo - 1954)

T. KOOPMANS ed. - Activity Analysis of Production and Allocation
(John Wiley and Sons, New-York - 1951)

KUHN and TUCKER - Non Linear Programming
(Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability - Août 1950)

P. MAILLET - Une nouvelle technique économique : Les Programmes linéaires
(Revue d'Economie Politique - Janvier-Février 1953).