

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

DARMOIS

Comparaison des moyennes de deux populations normales d'écart-types inconnus et différents. Test de Darmois

Revue de statistique appliquée, tome 2, n° 3 (1954), p. 37-41

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1954__2_3_37_0

© Société française de statistique, 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPARAISON DES MOYENNES DE DEUX POPULATIONS NORMALES D'ÉCARTS-TYPES INCONNUS ET DIFFÉRENTS

TEST DE DARMOIS

I. — BUT DU TEST.

Comparaison de 2 populations normales :

P_1 de moyenne m_1 et d'écart-type σ_1 inconnus ;

P_2 de moyenne m_2 et d'écart-type σ_2 inconnus.

On désire tester (sur échantillons) l'hypothèse d'égalité des moyennes :

$$(H) : m_1 - m_2 = 0.$$

II. — PRINCIPE DU TEST.

Sous des réserves très larges — en ce qui concerne la distribution des populations — on sait que si :

$\bar{x}$ est la moyenne d'un échantillon de n_1 observations provenant d'une population P_1 ,

$\bar{y}$ est la moyenne d'un échantillon de n_2 observations provenant d'une population P_2 ,

la variable aléatoire $d = \bar{x} - \bar{y}$ est normalement distribuée autour de $m_1 - m_2$ avec une variance :

$$\sigma_d^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Le test d'hypothèse $m_1 - m_2 = 0$ se fera donc aisément en utilisant la table de la loi normale pour la variable $t = \frac{d}{\sigma_d}$.

Si les variances σ_1 et σ_2 sont inconnues mais si les échantillons sont importants, il suffira de remplacer σ_1 et σ_2 par leurs estimations faites à partir des échantillons.

Si par contre — ce qui est fréquemment le cas — les échantillons sont peu importants, l'utilisation de la loi normale n'est plus acceptable. Dans ce cas, si l'on a des raisons valables d'admettre que les deux populations ont la même variance σ^2 :

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

une estimation correcte de cette variance commune pourra être faite à partir de l'ensemble des deux échantillons :

$$\sigma^2 \text{ estimé par } s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

La variance de la différence d sera alors estimée par :

$$s_d^2 = \frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}$$

d'où :

$$S_d = s \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$$

La variable aléatoire $t = \frac{d}{S_d}$ est alors distribuée suivant la loi de Student-Fisher.

L'étude du cas général (variances inconnues et différentes) a donné lieu à de nombreux travaux (Test de Behrens ; test de Welch). Une solution particulièrement simple a été étudiée par M. le Professeur G. Darmais.

Le test est basé sur la construction de régions de confiance pour le couple de paramètres (m_1, m_2) . On considère 2 échantillons extraits indépendamment chacun d'une des populations :

Échantillon 1 extrait de P_1 :

Effectif : n_1 ; observations : x_i ; moyenne : $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n_1}$; variance : $s_1^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n_1}$.

Échantillon extrait de P_2 :

Effectif : n_2 ; observations : y_i ; moyenne : $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n_2}$; variance : $s_2^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n_2}$.

1) Construction de domaines de confiance pour (m_1, m_2) :

Les caractéristiques de Student :

$t_1 = \sqrt{n_1 - 1} \frac{\bar{x} - m_1}{s_1}$ et $t_2 = \sqrt{n_2 - 1} \frac{\bar{y} - m_2}{s_2}$ sont des variables indépendantes et

suivent les lois de Student avec respectivement :

$\nu_1 = n_1 - 1$ et $\nu_2 = n_2 - 1$ degrés de liberté.

Dans le plan (t_1, t_2) , la densité de probabilité est :

$$f(t_1, t_2) = f(t_1) f(t_2) = \frac{1}{\pi \sqrt{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}} \frac{\Gamma(\frac{n_1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1 - 1}{2}) \Gamma(\frac{n_2 - 1}{2})} \cdot \left(1 + \frac{t_1^2}{n_1 - 1}\right)^{-\frac{n_1}{2}} \left(1 + \frac{t_2^2}{n_2 - 1}\right)^{-\frac{n_2}{2}}$$

Cette densité étant indépendante des paramètres $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$ et t_1 et t_2 dépendant des paramètres m_1 et m_2 seulement, à tout domaine $\Delta(\alpha)$ du plan (t_1, t_2) de probabilité $1 - \alpha$:

$$\Pr \left\{ T(t_1, t_2) \in \Delta(\alpha) \right\} = \iint_{\Delta(\alpha)} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 1 - \alpha$$

correspond dans le plan paramètre (m_1, m_2) un domaine de confiance $D(\alpha)$ de coefficient $1 - \alpha$. Ce domaine aléatoire puisque dépendant des valeurs observées de $\bar{x}, \bar{y}, s_1, s_2$, a une probabilité $1 - \alpha$ de contenir le point paramètre $M(m_1, m_2)$, m_1 et m_2 étant les valeurs effectives des moyennes de P_1 et P_2 .

2) Choix du domaine $\Delta(\alpha)$:

La forme de $\Delta(\alpha)$ est arbitraire. Pour des raisons de simplicité et d'efficacité, M. Darmais a été amené à considérer des domaines circulaires, centrés à l'origine.

$\Delta(\alpha)$ est le domaine intérieur au cercle $t_1^2 + t_2^2 = R^2(\alpha)$, $R(\alpha)$ étant défini par :

$$\iint_{t_1^2 + t_2^2 \leq R^2(\alpha)} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 1 - \alpha$$

3) Domaines de confiance $D(\alpha)$ correspondant aux cercles de probabilité $1 - \alpha$:

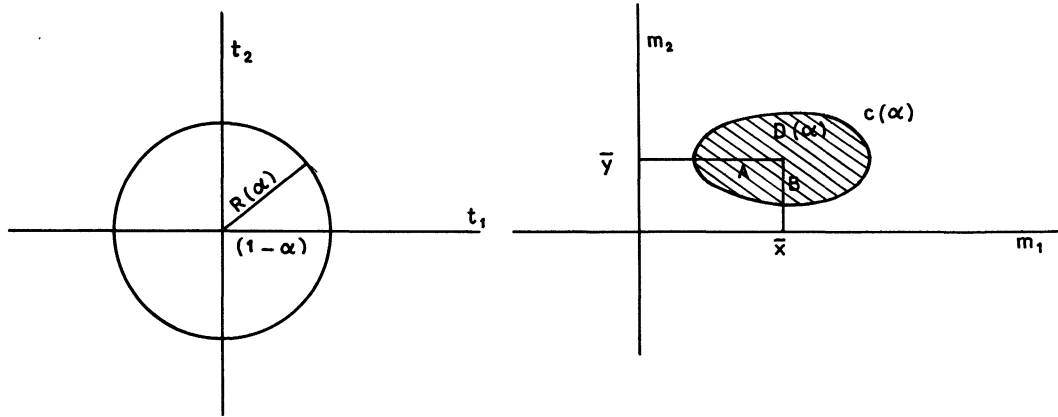
L'inégalité $t_1^2 + t_2^2 \leq R^2$ s'écrit, en remplaçant t_1 et t_2 par leur valeur :

$$(n_1 - 1) \frac{(m_1 - \bar{x})^2}{s_1^2 R^2} + (n_2 - 1) \frac{(m_2 - \bar{y})^2}{s_2^2 R^2} \leq 1.$$

Le domaine de confiance, de coefficient $1 - \alpha$, pour (m_1, m_2) est l'intérieur de l'ellipse $C(\alpha)$ de centre le point $(\bar{x}, \bar{y})$, de directions d'axes les directions des axes de coordonnées, de longueurs des $1/2$ axes :

$$A = \frac{s_1 R(\alpha)}{\sqrt{n_1 - 1}}$$

$$B = \frac{s_2 R(\alpha)}{\sqrt{n_2 - 1}}$$



La probabilité que cette ellipse contienne en son intérieur le point paramètre effectif (m_1, m_2) est égale à $1 - \alpha$.

4) Tests basés sur ces domaines de confiance :

a) Test d'une hypothèse de la forme :

$$\left. \begin{array}{l} m_1 = a_1 \\ m_2 = a_2 \end{array} \right\} \text{ } a_1 \text{ et } a_2 \text{ sont des valeurs numériques données.}$$

Rejeter l'hypothèse au niveau α si l'ellipse $C(\alpha)$ ne contient pas en son intérieur le point $A(a_1, a_2)$.

α est le niveau significatif du test, c'est-à-dire le risque que l'on court de rejeter l'hypothèse lorsqu'elle est vraie.

b) Test de l'hypothèse $(H) : m_1 = m_2$ (populations de même moyenne non spécifiée) :

Il est logique de considérer que l'hypothèse (H) est peu vraisemblable si l'ellipse $C(\alpha)$, pour α petit, ne contient aucun point de la première bissectrice (lieu des points $m_1 = m_2$).

Test de Darmon : Rejeter l'hypothèse $m_1 = m_2$ si l'ellipse de confiance $C(\alpha)$ ne coupe pas la première bissectrice.

Cette condition s'exprime analytiquement par :

$$\text{si : } d = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}} > R(\alpha), \text{ rejeter l'hypothèse } m_1 = m_2.$$

Niveau significatif du test : Le niveau du test (risque de conclure à la non égalité des moyennes lorsqu'en fait ces moyennes sont égales) n'est pas égal à α . Il a une valeur α' inférieure à α .

La valeur α , qui sert de base au calcul de $R(\alpha)$, donc au test, est une limite supérieure de ce risque (erreur de 1^{re} espèce).

III. — EXAMEN DU TEST DANS LE CAS OU LES EFFECTIFS n_1 ET n_2 DES ÉCHANTILLONS SONT ÉLEVÉS.

$\frac{n_1 s_1^2}{n_1 - 1}$ et $\frac{n_2 s_2^2}{n_2 - 1}$ sont les estimations convergentes sans biais des variances σ_1^2 et σ_2^2 et la

quantité d sur laquelle est basée le test est pratiquement égale à :

$$d = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

c'est-à-dire à la quantité utilisée pour le test classique de $m_1 - m_2$ lorsque les variances sont connues.

Il peut être intéressant, à titre indicatif, de comparer dans ce cas α' au niveau significatif réel α' du test. t_1 et t_2 sont asymptotiquement des variables normales réduites et, par suite, $R^2(\alpha)$ est la valeur d'un χ^2 à 2 degrés de liberté correspondant à la valeur $1 - \alpha$ de la fonction de répartition.

$$\Pr [x^2 \leq R^2(\alpha)] = 1 - \alpha,$$

d est par ailleurs une variable normale réduite. Le niveau α' est donc donné par :

$$\alpha' = \Pr [|d| > R(\alpha)] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{R(\alpha)}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Le tableau ci-dessous donne la correspondance (α, α') pour un certain nombre de valeurs usuelles :

α	$1 - \alpha$	$R^2(\alpha)$	$R(\alpha)$	α'
0,1	0,90	4,605	2,15	0,032
0,05	0,95	5,991	2,45	0,014
0,02	0,98	7,824	2,80	0,005
0,01	0,99	9,210	3,04	0,002
0,001	0,999	13,815	3,72	0,0002

α' est en gros de l'ordre de $\frac{\alpha}{3}$.

On est par suite amené à penser que, quels que soient n_1 et n_2 , le test est utilisé pour $\alpha = 0,05 = 5\%$, par exemple correspond à un niveau de l'ordre de 1 à 3 %.

Utilisation du test de Darrois.

On trouvera ci-après une table donnant $R(\alpha)$ en fonction de :

$$v_1 = n_1 - 1 \quad v_2 = n_2 - 1, \text{ pour } \alpha = 0,05 = 5\%.$$

Cette table a été calculée au Laboratoire de Calcul de l'Institut Henri Poincaré sous la direction de M. Erokin.

Mode d'emploi :

Extraire : un échantillon d'effectif n_1 de P_1 : $x_1, x_2, \dots$

un échantillon d'effectif n_2 de P_2 : $y_1, y_2, \dots$

Calculer :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n_1}; \quad s_1^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n_1}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n_2}; \quad s_2^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n_2}$$

$$d = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}}$$

Lire $R(\alpha)$ à l'intersection de la ligne $v_1 = n_1 - 1$ et de la colonne $v_2 = n_2 - 1$ (ou de la colonne $n_1 - 1$ et de la ligne $n_2 - 1$, la table étant symétrique).

Rejeter l'hypothèse d'égalité des moyennes si :

$$d > R(\alpha)$$

$\begin{matrix} Y_2 \\ Y_1 \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	25,43	14,22	13,07	12,84	12,79	12,77	12,76	12,76	12,76	12,76	12,76	12,75	12,75	12,75	12,75	12,75	12,75	12,75	12,75
2		6,37	5,32	4,95	4,77	4,68	4,62	4,58	4,55	4,53	4,52	4,50	4,50	4,49	4,48	4,48	4,47	4,47	4,47
3			4,36	4,02	3,85	3,75	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55	3,54	3,53	3,52	3,51	3,50	3,49	3,48	3,48
4				3,69	3,52	3,43	3,36	3,32	3,28	3,25	3,23	3,22	3,20	3,19	3,18	3,17	3,17	3,16	3,15
5					3,36	3,27	3,20	3,16	3,12	3,10	3,07	3,06	3,04	3,03	3,02	3,01	3,01	3,00	2,99
6						3,17	3,11	3,06	3,03	3,00	2,98	2,97	2,95	2,94	2,93	2,92	2,91	2,91	2,90
7							3,04	3,00	2,97	2,94	2,92	2,90	2,89	2,88	2,87	2,86	2,85	2,84	2,84
8								2,95	2,92	2,90	2,88	2,86	2,84	2,83	2,82	2,81	2,81	2,80	2,80
9									2,89	2,86	2,84	2,83	2,81	2,80	2,79	2,78	2,78	2,77	2,76
10										2,84	2,82	2,80	2,79	2,78	2,77	2,76	2,75	2,74	2,74
11											2,80	2,78	2,77	2,76	2,75	2,74	2,73	2,72	2,72
12												2,76	2,75	2,74	2,73	2,72	2,71	2,71	2,70
13													2,74	2,73	2,72	2,71	2,70	2,69	2,69
14														2,72	2,71	2,70	2,69	2,68	2,68
15															2,69	2,69	2,68	2,67	2,67
16																2,68	2,67	2,66	2,66
17																	2,66	2,66	2,65
18																		2,65	2,65
19																			2,64