

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

A. VESSEREAU

Contrôle des caractéristiques des papiers Kraft et simili-Kraft

Revue de statistique appliquée, tome 1, n° 3-4 (1953), p. 5-23

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1953__1_3-4_5_0

© Société française de statistique, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONTROLE DES CARACTÉRISTIQUES DES PAPIERS KRAFT ET SIMILI-KRAFT

par

A. VESSEREAU

*Ingénieur en Chef des Manufactures de l'État,
Professeur à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*

Les papiers Kraft et simili-Kraft utilisés comme matériel d'emballage ou de paquetage constituent des sortes ordinaires, de prix relativement bas, qui ne donnent habituellement pas de graves difficultés à l'emploi, surtout (comme c'est le cas des papiers que nous étudions ici) lorsqu'ils sont utilisés pour le conditionnement manuel d'objets fabriqués.

Cependant, les différentes caractéristiques qui définissent le papier « se paient » suivant des barèmes officiels, et il est donc légitime de vérifier qu'elles sont respectées dans les livraisons. Parmi ces caractéristiques figurent en particulier les suivantes :

Le taux de cendres (ou teneur en charge minérale) – un faible taux de cendres est, en général, un facteur de qualité du papier ;

Le degré de collage qui mesure l'aptitude du papier à ne pas se laisser traverser par l'eau ;

La résistance à l'éclatement, caractéristique essentielle pour la plupart des papiers destinés au paquetage ou à l'emballage.

A titre d'exemple, pour un papier AFNOR IV/0 (cette dénomination précise la composition fibreuse du papier), les majorations ou minorations du barème B, Mars 1952, par rapport au prix de base de 11.978 francs les 100 kilos, sont les suivantes :

Taux de cendres :	Inférieur à 2 %	+ 519 francs.
	de 2 à 5 %	+ 319 francs.
	de 5 à 10 %	—
	de 10 à 15 %	— 399 francs.
	de 15 à 20 %	— 798 francs, etc...
Degré de collage (AFNOR) :	de 20 à 30	+ 156 francs.
	de 30 à 40	+ 243 francs.
	de 40 à 60	+ 401 francs, etc...
Résistance à l'éclatement (AFNOR) :	de 10 à 13	— 770 francs.
	de 13 à 16	— 464 francs.
	de 16 à 20	— 232 francs.
	de 20 à 25	—
	de 25 à 30	+ 194 francs.
	de 30 à 35	+ 382 francs, etc...

Les normes de l'Afnor, qui définissent de façon très précise la manière d'effectuer les mesures, sont muettes sur la question d'échantillonnage d'une livraison.

Afin de combler cette lacune et de proposer des règles logiques de contrôle, on a procédé à l'examen détaillé d'une livraison déterminée de papier simili-Kraft. Les caractéristiques étudiées ont été les suivantes : poids au m² ; taux de cendres ; résistance à l'éclatement ; degré de collage ; nombre de feuilles contenues dans la livraison.

L'étude de la dispersion de ces différentes caractéristiques permet de fixer, sous certaines conditions, l'importance de l'échantillon à contrôler. Les notions fondamentales de « risque de l'acheteur » et « risque du vendeur » doivent naturellement être prises en considération ; afin d'alléger la discussion des résultats obtenus pour chaque caractéristique, il a paru utile de rappeler, dans une « PREMIÈRE PARTIE », les données essentielles du problème de jugement d'une marchandise à partir d'un échantillon.

La « DEUXIÈME PARTIE » est consacrée, d'une part, à la description du plan d'échantillonnage et de mesures adopté pour l'étude de la livraison considérée, d'autre part, à la présentation et à la discussion des résultats obtenus pour chaque caractéristique. Il sera fait appel, à plusieurs reprises, à la méthode d'analyse dite « analyse de la variance », dont il a paru superflu de rappeler les principes, les conclusions auxquelles elle conduit pouvant toujours s'exprimer de façon claire.

Dans une « TROISIÈME PARTIE », l'ensemble des résultats sera rassemblé sous forme d'un projet de « Conditions de Contrôle », dont on fera l'application à posteriori, à la livraison étudiée.

Première partie

GÉNÉRALITÉS SUR LE CONTROLE A PARTIR D'UN ÉCHANTILLON

Les différentes unités, en général très nombreuses, qui constituent un « lot » d'objets fabriqués, ne sont jamais rigoureusement identiques. Il en résulte que tout jugement porté sur le lot à la suite de l'examen d'un échantillon, si important soit-il, prélevé dans celui-ci, comporte des risques d'erreur. Après avoir précisé la nature de ces risques, on montrera comment, les risques ayant été fixés à une valeur considérée comme raisonnable, il est possible de déterminer l'importance de l'échantillon à prélever (le problème du jugement à partir d'un échantillon dont l'importance n'est pas fixée d'avance — échantillonnage progressif — ne sera pas abordé).

On se limitera aux deux cas les plus importants dans la pratique :

- contrôle de la valeur moyenne d'une caractéristique dont la loi de distribution est sensiblement gaussienne ;
- contrôle du % d'unités considérées comme défectueuses.

DÉFINITION DU LOT « ACCEPTABLE ».

Lorsqu'on contrôle la valeur moyenne d'une caractéristique, la **définition du lot « acceptable »** est, en général, l'une des suivantes :

Valeur moyenne m (calculée sur la totalité du lot) supérieure à une limite m_0 ,

Valeur moyenne m (calculée sur la totalité du lot) inférieure à une limite M_0 ,

Valeur moyenne m (calculée sur la totalité du lot) comprise entre deux limites m_0 et M_0 .

Pour simplifier, on se placera uniquement dans le cas où le lot acceptable est défini par la condition :

$$m \geq m_0$$

Un lot pour lequel $m < m_0$ est donc un lot inacceptable.

Lorsqu'on contrôle le % d'unités défectueuses, le **lot acceptable est défini** par une condition telle que :

$$p \leq p_0$$

p étant le % d'unités défectueuses dans l'ensemble du lot.

Les limites m_0, M_0, p_0 , sont en général fixées par celui qui reçoit le lot (nous l'appellerons l'« acheteur ») ; elles doivent être compatibles avec les possibilités de fabrication de celui qui présente le lot (nous l'appellerons le « vendeur »).

Il convient d'observer que le % limite p_0 d'unités défectueuses (qui constitue une sorte de tolérance) est distinct des tolérances que l'on consent en général sur chaque unité prise isolément. Par exemple, d'après les règles de l'Afnor, une feuille de papier vendue comme « 56 g » reste une feuille 56 g tant que son poids au m^2 ne s'écarte pas des limites 56 ± 4 %, soit 53 g 8 et 58 g 2. Mais, dans une livraison constituée d'un très grand nombre de feuilles, il est en général possible d'admettre qu'un certain % d'entre elles s'écartent de ces limites.

Il faut encore préciser que le classement « technique » d'un lot en « inacceptable » ne préjuge pas forcément la décision qui, en définitive, sera prise sur le lot. Celle-ci peut être :

- le refus pur et simple ;
- l'acceptation avec abattement de prix ;
- la remise du lot à la disposition du vendeur pour triage ;
- l'obligation, pour le vendeur, de remplacer toutes les unités qui se révéleront défectueuses à l'emploi, etc...

JUGEMENT PORTÉ A PARTIR D'UN ÉCHANTILLON.

1) **Contrôle de la moyenne.** — Sur chacun des objets qui constituent l'échantillon, on mesure la valeur de la caractéristique soumise au contrôle ; on obtient ainsi des nombres :

$$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n,$$

on en calcule la moyenne arithmétique $\bar{x}$; on compare celle-ci à un nombre L que l'on s'est fixé :

si $\bar{x} < L$ le lot est jugé inacceptable.

si $\bar{x} \geq L$ le lot est jugé acceptable.

Dans la suite, pour simplifier, on prendra $L = m_0$ (ce qui n'est pas indispensable, mais ce qui constitue souvent la position la plus logique).

2) **Contrôle du %, d'objets défectueux.** — Sur les n objets contenus dans l'échantillon, on compte combien il y en a de défectueux. On compare ce nombre d à un nombre K que l'on s'est fixé.

si $d > K$ le lot est jugé inacceptable.

si $d \leq K$ le lot est jugé acceptable.

Pour un échantillon suffisamment grand, on prend en général $K = np_0$.

DÉFINITION DES RISQUES.

Le risque du vendeur est caractérisé par la probabilité de prononcer à partir de l'échantillon le jugement « inacceptable », alors qu'en fait le lot est acceptable. C'est donc :

la probabilité que $\bar{x} < m_0$ alors qu'en fait $m \geq m_0$

» $d > K$ » $p \leq p_0$.

Le risque de l'acheteur est caractérisé par la probabilité de prononcer le jugement « acceptable », alors qu'en fait le lot est inacceptable. C'est donc :

la probabilité que $\bar{x} \geq m_0$ alors qu'en fait $m < m_0$

» $d \leq K$ » $p > p_0$.

Il y a évidemment intérêt à ce que ces risques soient aussi faibles que possible.

Toutefois, un instant d'attention permet de se rendre compte qu'il est impossible, dans un jugement sur échantillon, d'abaisser **dans toute éventualité**, les risques à une faible valeur.

Par exemple, si le lot présenté est caractérisé par une valeur moyenne $m = m_0 - \varepsilon$, ε étant très petit, il y a à peu près autant de chances (à moins de prendre un échantillon infiniment grand) qu'il soit accepté ($\bar{x} \geq m_0$) ou refusé ($\bar{x} < m_0$) : le risque de l'acheteur est, dans ce cas, voisin de 50 %.

De même, si le lot est tel que $m = m_0 + \varepsilon$, le risque du vendeur est voisin de 50 %.

Pour échapper à cette difficulté, on est obligé de faire une concession. Celle-ci consiste à encadrer la valeur critique (m_0 ou p_0) de deux valeurs voisines, l'une en deçà et l'autre au delà ($m_1 < m_0 < m_2$, ou $p_1 < p_0 < p_2$), et à n'exiger des risques qu'ils ne soient faibles que pour $m < m_1$ et $m > m_2$ (ou $p < p_1$ et $p > p_2$). Les conditions qu'on se pose sont dès lors les suivantes :

— Tout lot pour lequel m est supérieur à m_2 (ou p inférieur à p_1) doit n'avoir qu'une faible probabilité d'être jugé inacceptable ; cette probabilité est maximum pour $m = m_2$, ou $p = p_1$ et ce maximum est ce qu'on appelle le « risque du vendeur », ou « risque de 1^{ère} espèce » ; on le désigne généralement par α , et l'on prend, par exemple, $\alpha = 5\%$, $\alpha = 1\%$...

— Tout lot pour lequel m est inférieur à m_1 (ou p supérieur à p_2) doit n'avoir qu'une faible probabilité d'être jugé acceptable ; cette probabilité, maximum pour $m = m_1$ ou $p = p_2$, est le « risque de l'acheteur », ou « risque de 2^{ème} espèce », qu'on désigne généralement par β .

Quant aux lots pour lesquels m ou p s'approche de la valeur critique m_0 ou p_0 (lots pour lesquels m est compris entre m_1 et m_2 , ou p entre p_1 et p_2) ils auront une probabilité non négligeable (variant de α ou β jusqu'à une valeur qui peut atteindre et même dépasser 50 %) d'être jugés de façon erronée, c'est-à-dire d'être classés comme inacceptables alors que m est compris entre m_0 et m_2 (ou p entre p_1 et p_0) ou comme acceptables, alors que m est compris entre m_1 et m_2 (ou p entre p_0 et p_2). Ce risque est commun à l'acheteur et au vendeur ; il est inhérent à la nature même du jugement sur échantillon, et on peut le considérer comme relativement peu grave si la bande (m_1, m_2) ou (p_1, p_2) a été prise suffisamment étroite.

DÉTERMINATION DE L'IMPORTANCE DE L'ÉCHANTILLON.

L'importance de l'échantillon, caractérisée par le nombre d'unités n , dépend des valeurs que l'on se donne pour m_1 et m_2 (ou p_1 et p_2) d'une part, pour α et β d'autre part.

La bande (m_1, m_2) ou (p_1, p_2) étant fixée, on peut toujours choisir n de telle façon que les risques α et β soient aussi petits que l'on veut, mais si l'on est trop exigeant, on est conduit à une valeur de n très élevée. Les valeurs généralement admises pour les risques α et β sont 5 %, 2 % ou 1 %.

On supposera maintenant (ce qui n'est pas indispensable) que m_1 et m_2 sont pris symétriquement autour de m_0 , ou p_1 et p_2 autour de p_0 . On supposera aussi, dans le cas du contrôle de p , que n est suffisamment grand pour qu'on puisse profiter de l'approximation gaussienne de la loi binomiale.

1) **Contrôle de la moyenne.** — Les hypothèses précédentes entraînent $\alpha = \beta$. Posons :

$$m_2 - m_1 = 2a$$

et soit λ le nombre défini par :

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - \alpha = 1 - \beta$$

(λ s'obtient directement, α étant donné, par les tables de la loi de Gauss).

L'importance de l'échantillon s'exprime, en fonction de l'étendue $2a$ de la bande encadrant m_0 et des risques $\alpha = \beta$, par la formule :

$$n = \frac{\lambda^2}{a^2} \sigma^2$$

Dans cette expression intervient également l'écart-type σ de la caractéristique soumise au contrôle ; il faut supposer cet écart-type connu, au moins approximativement, par une étude préalable.

Exemple : On contrôle la résistance à l'éclatement d'une livraison de papier pour laquelle on exige une résistance minimum de 20 unités Afnor. On prend pour m_0 la valeur 20, une livraison dont la résistance est inférieure à 20 étant considérée comme « inacceptable ».

Une étude préalable a montré que dans une livraison normale, l'écart-type de la résistance à l'éclatement (mesurée dans des conditions déterminées sur des feuilles prises au hasard) est d'environ 2 unités Afnor.

Choisissons pour m_1 et m_2 les valeurs suivantes :

$$m_1 = 19,5 \quad m_2 = 20,5$$

et pour α et β la valeur 5 %.

Les tables de la loi de Gauss donnent $\lambda = 1.645$. On trouve :

$$n = \left(\frac{1.645 \times 2}{0,5} \right)^2 = 43$$

Il faut effectuer le contrôle sur une quarantaine de feuilles.

2) Contrôle du % d'unités défectueuses. — Appelons encore $2a$ l'intervalle $p_2 - p_1$. Soit β la valeur maximum que l'on admet pour les risques de l'acheteur et du vendeur, λ ayant la même signification que tout à l'heure.

On a sensiblement :

$$n = p_2(1 - p_2) \frac{\lambda^2}{a^2}$$

Le risque de l'acheteur est égal à β ; le risque du vendeur, inférieur à β , est déterminé par l'équation :

$$\alpha = \int_{-\infty}^{-\lambda' \frac{1}{\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \text{avec} \quad \lambda' = a \sqrt{\frac{n}{p_1(1-p_1)}}$$

Exemple : On contrôle le poids au m^2 d'une livraison de papier vendue sous la dénomination 56 g. On considère comme correcte toute feuille dont le poids au m^2 est compris entre les limites de l'Afnor, soit 56 ± 4 %, ou $53^9 8$ et $58^9 2$; les feuilles dont le poids au m^2 est extérieur à ces limites sont considérées comme défectueuses. Une livraison est considérée comme acceptable lorsque le % de feuilles défectueuses est inférieur à 10 %. On a ici $p = 0,10$; prenons pour p_1 et p_2 les valeurs $p_1 = 0,05$ et $p_2 = 0,15$ d'où il résulte $a = 0,05$. Choisissons pour β la valeur 5 %, à laquelle correspond $\lambda = 1,645$. On trouve :

$$n = (0,15) \times (0,85) \times \left(\frac{1,645}{0,05} \right)^2 = 138$$

Il faut effectuer le contrôle sur 140 feuilles environ. On trouve, pour le risque du vendeur, une valeur α inférieure à 1 %.

COÛT DU CONTRÔLE.

Le contrôle du % d'unités défectueuses ne nécessite aucune connaissance préalable de la dispersion de la caractéristique étudiée. Par contre, pour des risques analogues, il exige un échantillon plus important que le contrôle de la moyenne, qui suppose connu l'écart-type. Mais ce fait ne constitue pas un inconvénient, si le classement d'un objet en « défectueux » ou « non défectueux » est plus rapide que la mesure, sur cet objet, de la caractéristique elle-même : par exemple, dans le contrôle du poids au m^2 de feuilles de papier, il peut être plus rapide de vérifier que le poids de l'éprouvette est compris entre deux limites fixées, que de déterminer le poids exact sur une balance de précision. Par contre, si le contrôle est « destructif » et si les objets contrôlés sont de prix élevé, il y a intérêt à opérer sur un échantillon aussi réduit que possible. Ces considérations expliquent l'utilité, avant de fixer un plan d'échantillonnage, d'évaluer le **coût du contrôle**.

Deuxième partie

ÉTUDE DES CARACTÉRISTIQUES D'UNE LIVRAISON DE PAPIER SIMILI-KRAFT

PLAN D'ÉCHANTILLONNAGE ET DE MESURES.

Les échantillons destinés aux mesures ont été prélevés de la façon suivante :

Le stock de la livraison étudiée était de l'ordre d'un demi-million de feuilles, soit environ un millier de paquets de 500 feuilles. 50 paquets (5 % environ) ont été prélevés et numérotés ; de chacun de ces 50 paquets, il a été retiré 10 feuilles **consécutives** : ces 10 feuilles, censées représenter le paquet qui les contenait, ont été numérotées de 0 à 9. Chaque échantillon de 10 feuilles a reçu en outre le numéro du paquet dans lequel il a été prélevé. Cet échantillonnage est conforme à la prescription suivante de la Norme Q 03-001 de l'Afnor « pour les papiers en feuilles, les séries d'échantillons sont constituées chacune de 10 feuilles consécutives ».

A) Le poids au m² (force) de chacune des feuilles numérotées 2 ou 7 (soit 100 feuilles) a été déterminé par les opérations suivantes : découpage au gabarit de 5 carrés de 10 cm de côté pris l'un dans le centre de la feuille, chacun des 4 autres dans un angle de celle-ci ; pesée de l'ensemble de ces 5 carrés (au milligramme) ; multiplication du résultat obtenu par 20 et arrondissement du nombre trouvé au décigramme le plus proche. Cette façon d'opérer s'écarte sur un seul point des prescriptions de l'AFNOR ; aux termes de la Norme Q 03-001 on doit peser séparément chaque décimètre carré et ensuite faire la moyenne des 5 résultats. Pour gagner du temps, on a pesé ensemble les 5 décimètres carrés (ce qui paraît d'ailleurs plus logique que d'opérer comme le préconise l'AFNOR).

B) Sur chacune des feuilles numérotées 1 et 6, il a été fait deux déterminations du **taux de cendre** (pesée des cendres obtenues après incinération jusqu'à poids constant). On a donc ainsi 200 mesures, exprimées en 1/10 de point.

C) Les feuilles numérotées 3, 5 et 9 ont été soumises à l'essai de **résistance à l'éclatement** sur l'appareil Müllen : le papier est soumis, sur une partie circulaire de sa surface, d'un diamètre déterminé, à une pression uniformément répartie. La pression d'éclatement est exprimée en grammes/cm² ; les résultats sont arrondis au demi-hectogramme, le manomètre permettant de lire les pressions avec une précision de ± 25 grammes. De la pression d'éclatement ainsi définie, on passe à l'indice d'éclatement AFNOR, en divisant cette pression par le poids au m² du papier.

Sur chaque feuille, 10 mesures ont été faites, cinq en exerçant la pression du côté brillant de la feuille, cinq en l'exerçant du côté mat : ce nombre de mesures et sa répartition entre les deux faces de la feuille sont conformes à la norme Q 03-001. On a donc, au total, obtenu 1.500 mesures, 30 par paquet.

D) Dans chacune des feuilles numérotées 0, 2 et 8, il a été découpé 4 éprouvettes sur lesquelles le **degré de collage** a été déterminé de la façon prescrite par l'AFNOR (Méthode Carson). Cette méthode consiste à déterminer le temps pendant lequel l'extrémité en biseau de l'éprouvette mise au contact de l'eau se relève. Il y a proportionnalité entre le temps t ainsi mesuré et le degré de collage AFNOR, puisque celui-ci se calcule à partir de celui-là par la formule $C = t \left(\frac{100}{f} \right)^2$, f étant la force du papier (poids au m²).

On dispose donc pour chaque paquet de 12 mesures, ce qui fait un total de 600 mesures.

Comme on l'a noté au passage sur certains points particuliers, ce plan d'échantillonnage et de mesure est dans l'ensemble conforme à la Norme Q 03-001. Cette conformité peut cependant être discutée sur un point important, l'affectation de chaque feuille du groupe de 10 à un essai — ou, exceptionnellement, deux essais déterminés. On pourrait, en effet — dans toute la mesure permise par le format des feuilles — concentrer sur 2 ou 3 d'entre elles l'ensemble des essais répartis sur les 10. Ce second procédé serait plus économique puisqu'il entraînerait la destruction d'un moindre nombre de feuilles. Il semble que le procédé que l'on a retenu satisfasse à la prescription suivante (dont le sens n'est pas très clair) de la Norme Q 03-001 : « Les séries de feuilles prélevées sont numérotées et, dans chaque série, les feuilles sont également numérotées consécutivement. Pour les essais, on prend, dans chaque série et par rotation, les feuilles portant des numéros consécutifs ».

En ce qui concerne le taux de cendres, la dite Norme ne prévoit qu'une mesure par feuille : on a préféré en faire deux, pour avoir une idée de la dispersion « intra-feuille ».

Cette Norme ne prévoit pas le nombre de mesures du degré de collage à faire sur chaque feuille. On a fixé ce nombre à 4, ce qui paraît un minimum pour avoir une idée de la dispersion « intra-feuille », compte tenu de l'imprécision de la mesure.

Les résultats des mesures ont été reportés, après groupage si besoin, sur des graphiques. Chaque graphique sera étudié à propos de la caractéristique qu'il représente.

A. — POIDS AU M²

Le poids au m² théorique du papier étudié était de 56 g.

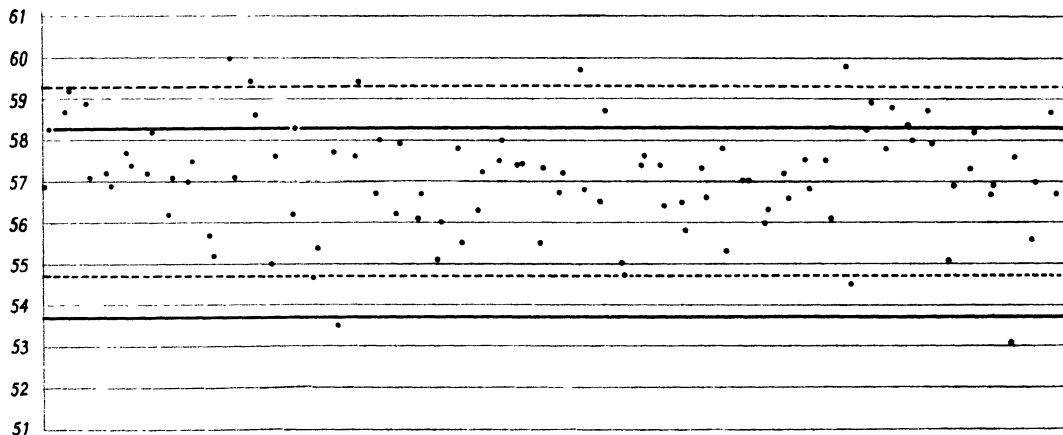
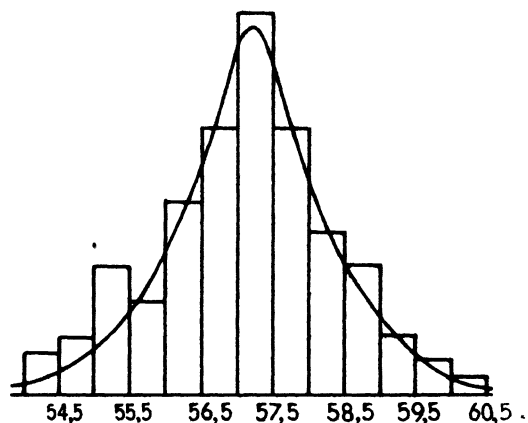
Le résultat des 100 mesures effectuées est donné en Annexes sous deux formes :

Annexe I. — Tableau de répartition et histogramme correspondant. Dans ce document, les feuilles appartenant à un même paquet ne sont pas distinguées.

Graphique I. — Graphique d'enregistrement par point comme si l'on avait contrôlé le poids au m² dans une série continue de 50 paquets, à raison de deux mesures (sur deux feuilles différentes)

ANNEXE I
Poids au m²
 (1 mesure par feuille)

Poids au m ²	Nombre de mesures
de 60. à 60.4	1
59.5 à 59.9	2
59. à 59.4	3
58.5 à 58.9	7
58. à 58.4	9
57.5 à 57.9	15
57. à 57.4	21
56.5 à 56.9	15
56. à 56.4	10
55.5 à 55.9	5
55. à 55.4	7
54.5 à 54.9	3
au-dessous de 54.5	2
TOTAL .	100



Graphique I. — 100 mesures, 2 feuilles dans chacun de 50 paquets.

par paquet ; sur ce graphique, les paquets sont séparés par un intervalle plus grand que celui qui est adopté pour les 2 feuilles d'un même paquet.

Le poids moyen au m², pour l'ensemble des 100 feuilles, est de 57 g 06. L'analyse statistique de l'ensemble des 100 résultats est résumée dans le tableau suivant d'analyse de la variance :

Variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Carré moyen
Entre feuilles dans un même paquet	73.9350	50	1.4787
Entre paquets	95.3429	49	1.9457
TOTAL	169.2779	99	1.7099

On constate qu'il n'y a pas de différence « significative » entre les paquets : le rapport des carrés moyens $F = \frac{1.9457}{1.4787} = 1.32$ n'est pas significatif au « point 5 % ». Des feuilles prises au hasard dans des paquets différents ne paraissent pas plus dispersées que des feuilles prises à l'intérieur d'un même paquet : le poids au m² se comporte comme une caractéristique de fabrication « bien contrôlée ». Par ailleurs, l'écart-type d'un résultat est d'environ 1^g 31.

La tolérance de l'AFNOR, pour des papiers de 56^g, est de $\pm 4\%$, soit $\pm 2^g 24$, ou 53^g 8 et 58^g 2. On constate que sur les 100 feuilles :

14 dépassent la limite supérieure 58.2

2 sont inférieures à la limite inférieure 53.8

soit 16 % des résultats hors des limites de tolérance (voir limites en trait plein du Graphique I).

Ce pourcentage élevé provient, d'une part d'un poids moyen (57^g) supérieur au poids théorique (56^g), d'autre part d'une dispersion trop étendue pour que les limites de l'AFNOR puissent être respectées ; en effet, si le poids moyen avait été exactement centré sur le poids théorique, on aurait encore constaté (voir limites en pointillé du Graphique I) :

5 résultats au delà de la limite supérieure,

5 » en de ça » inférieure,

soit 10 % des résultats hors des limites de tolérance,

Il est possible que certains papiers, moins dispersés, respectent parfaitement les limites de l'AFNOR. Celles-ci paraissent cependant un peu étroites, et il semble raisonnable d'admettre qu'une livraison reste « acceptable » tant que le pourcentage de feuilles hors des limites AFNOR ne dépasse pas 10 %. Dans ces conditions, le contrôle portera sur le % d'unités défectueuses figurant dans la livraison.

Adoptant pour p_0 la valeur 10 %, pour p_1 et p_2 les valeurs 5 % et 15 %, et pour risque de l'acheteur $\beta = 5\%$, on a calculé précédemment (voir page 9) que le nombre de feuilles à contrôler est d'environ 140.

Il est toujours préférable (bien que dans la livraison étudiée, cela n'aurait pas été indispensable) de prélever les feuilles dans 140 paquets distincts. Suivant que le nombre de feuilles « hors limites AFNOR » est inférieur à 14, ou est au moins égal à 14, on considère la livraison comme « acceptable » ou « inacceptable ». Il y a au maximum 5 chances sur 100 (risque de l'acheteur) de considérer comme acceptable une livraison dans laquelle le pourcentage réel de feuilles « hors limites AFNOR » dépasserait 15 %. Le « risque du vendeur » (juger « inacceptable » une livraison dans laquelle le % de feuilles hors limites serait au plus égal à 5 %) est caractérisé par une probabilité inférieure à 1 %.

Remarques. — 1) Pour déterminer le nombre de feuilles à contrôler, on a choisi une « valeur critique » $p_0 = 10\%$ assez élevée, et autour de cette valeur une bande ($p_1 = 5\%$, $p_2 = 15\%$) assez large. Ces conditions assez tolérantes (qui permettent de réduire l'échantillon) se justifient par le fait que les irrégularités de grammage n'ont pas une grande importance dans un papier destiné à l'emballage manuel. Pour l'emploi dans une fabrication mécanique, il conviendrait peut-être d'être plus exigeant.

2) L'histogramme qui figure en Annexe I montre que les poids au m² se distribuent suivant une loi sensiblement gaussienne. On sait que dans une loi de Gauss d'écart-type 1,31, 95 % des obser-

uations sont comprises à l'intérieur d'un intervalle d'étendue $3,92 \times 1,31 = 5,914$, encadrant la valeur moyenne (soit ici 54,95 et 59,96) et 99,8 % à l'intérieur d'un intervalle $6,18 \times 1,31 = 8,910$ (soit 53,9 et 61,91). On constate en fait que 5 résultats sur 100 tombent à l'extérieur de l'intervalle (54,5/59,6).

B. — TAUX DE CENDRES

Le papier étudié était annoncé comme ayant un taux de cendres inférieur à 2 %.

Les taux de cendre observés sur les 100 feuilles examinées (chaque taux étant la moyenne de deux mesures) sont indiqués en Annexe II et Graphique II, sous la même forme que pour les poids au m².

Le taux de cendre moyen est de 4,58 %. L'analyse statistique des 200 mesures est résumée dans le tableau suivant d'« Analyse de la variance ».

Variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Carré moyen
Entre mesures dans une même feuille	0.6600	100	0.0066
Entre feuilles dans un même paquet	2.2550	50	0.0451
Entre paquets	56.3568	49	1.1705
Total entre feuilles	58.6118	99	0.5718
TOTAL GÉNÉRAL	59.2718	199	0.2978

1) La dispersion entre mesures dans une même feuille est extrêmement faible : elle est sans doute plutôt imputable à l'erreur opératoire qu'aux irrégularités de la charge. Il est donc tout à fait inutile de faire plusieurs mesures sur une même feuille (c'est bien d'ailleurs ce que prévoit la norme de l'AFNOR).

2) La dispersion « entre paquets » est significativement plus élevée (et de beaucoup) que la dispersion « entre feuilles d'un même paquet » (cette particularité apparaît nettement sur le Graphique II). Le rapport des carrés moyens $F = \frac{1.1705}{0.0451} = 25.9$ est hautement significatif. Il est donc indispensable, pour déterminer avec la meilleure précision le taux de cendre moyen d'une livraison, de prélever des feuilles dans des paquets différents.

3) L'écart-type du taux de cendre, pour une mesure faite sur une feuille prise au hasard dans un paquet quelconque de la livraison, se calcule de la façon suivante :

Soient σ_1^2 la variance entre mesures dans une même feuille,
 σ_F^2 » entre feuilles dans un même paquet,
 σ_P^2 » entre paquets dans la livraison.

Le carré moyen « entre mesures dans une même feuille » est une estimation de σ_1^2 :

$$\sigma_1^2 \longrightarrow 0.0066$$

Le carré moyen « entre feuilles dans un même paquet » (chaque feuille étant représentée par la moyenne de 2 mesures) est une estimation de $2\sigma_F^2 + \sigma_1^2$

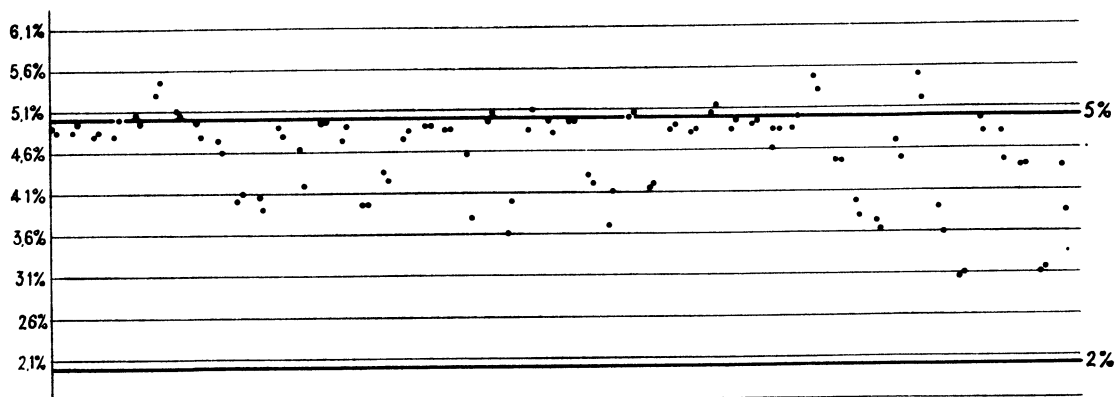
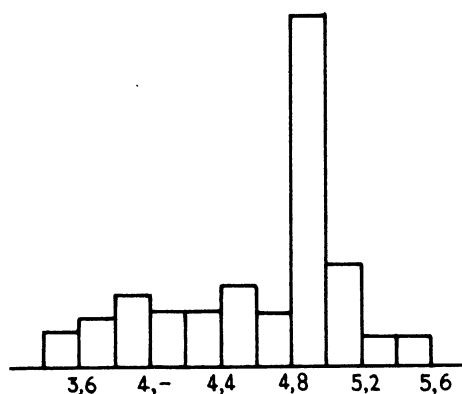
$$2\sigma_F^2 + \sigma_1^2 \longrightarrow 0.0451$$

Le carré moyen « entre paquets » (chaque paquet étant représenté par deux feuilles) est une estimation de $4\sigma_P^2 + 2\sigma_F^2 + \sigma_1^2$:

$$4\sigma_P^2 + 2\sigma_F^2 + \sigma_1^2 \longrightarrow 1.1705$$

ANNEXE II
Taux de cendre
(Moyennes de 2 mesures par feuille)

Taux de cendre	Nombre de résultats
5.4 à 5.55 %	3
5.2 à 5.35 %	3
5. à 5.15 %	11
4.8 à 4.95 %	39
4.6 à 4.75 %	6
4.4 à 4.55 %	9
4.2 à 4.35 %	6
4. à 4.15 %	6
3.8 à 3.95 %	8
3.6 à 3.75 %	5
au-dessous de 3.6 %	4
TOTAL . .	100



Graphique II. — 100 résultats (moyennes de 2 mesures) 2 feuilles dans chacun de 50 paquets.

Des relations précédentes, on tire :

$$\begin{aligned}\sigma_l^2 &= 0.0066 \\ \sigma_F^2 &= 0.0192 \\ \sigma_p^2 &= \underline{0.2814} \\ &0.3072\end{aligned}$$

La somme $\sigma_l^2 + \sigma_F^2 + \sigma_p^2 = 0.3072$ représente la variance d'une mesure faite sur une feuille quelconque d'un paquet quelconque de la livraison. L'écart-type correspondant est d'environ 0.55 %.

Nous admettons que cet écart-type reste approximativement valable pour tous les papiers de l'espèce étudiée (Kraft et simili-Kraft) quel que soit leur taux de cendre moyen. Les normes de l'AFNOR classent le papier en différentes catégories, suivant que le taux de cendre est :

$$\begin{aligned}\text{inférieur à} & \dots 2 \% \\ \text{compris entre} & \dots 2 \% \text{ et } 5 \% \\ & \gg \dots 5 \% \text{ et } 10 \%, \text{ etc...}\end{aligned}$$

Décidant de contrôler le **taux de cendre moyen** d'une livraison, on encadrera les valeurs critiques 2 %, 5 %, 10 % d'une bande de ± 0.20 ; en prenant pour les risques α et β la valeur commune 5 %, à laquelle correspond $\lambda = 1.645$, on trouve, pour le nombre de feuilles à contrôler :

$$n = (1.645)^2 \left(\frac{0.55}{0.20} \right)^2 = 20$$

Il faut donc déterminer le taux de cendre sur une vingtaine de feuilles prises au hasard dans 20 paquets différents.

Soit T le taux de cendre moyen ainsi constaté, et supposons que le papier soit vendu comme ayant un taux de cendre inférieur à 2 %. Alors, si le papier a un taux de cendre réel au plus égal à 1,8 %, il y a au maximum 5 chances sur 100 (risque du vendeur) qu'à la suite du contrôle, il soit classifié comme ayant un taux de cendre supérieur à 2 % (c'est-à-dire que $T > 2$ %) ; de même si le taux réel est supérieur à 2,2 %, il y a au maximum 5 chances sur 100 (risque de l'acheteur) qu'il soit classifié dans la catégorie « inférieur à 2 % ».

C. — RÉSISTANCE A L'ÉCLATEMENT

Le papier étudié était annoncé comme ayant une résistance (AFNOR) comprise entre 20 et 25.

Les résistances à l'éclatement (exprimées en g/cm², et en unités AFNOR) observées sur les 150 feuilles examinées (chaque résultat étant la moyenne de 10 mesures, 5 côté « brillant » et 5 « côté mat ») sont indiquées en **Annexe III** et **Graphique III** sous la même forme que pour le poids au m².

La résistance moyenne est de 1.480 g/cm² soit, en unité AFNOR, le papier ayant un grammage moyen de 57, $E = \frac{1.480}{57} = 25.96$.

L'analyse statistique des 1.500 mesures est résumée dans le tableau d' « Analyse de la variance » qui figure à la page suivante.

1) La dispersion « entre mesures dans une même feuille » est la même, qu'on exerce la pression du côté brillant ou du côté mat ; elle est caractérisée par un écart-type égal à $\sqrt{16.375} = 128 \text{ g/cm}^2$, soit environ 8 % de la moyenne générale (1.480). Cette dispersion est assez forte ; il est donc utile de faire plusieurs mesures par feuille, comme le prévoit d'ailleurs la norme de l'AFNOR.

2) Il y a une différence légère mais significative entre la moyenne des mesures « côté brillant » et la moyenne des mesures « côté mat ». Le rapport des carrés moyens « entre brillant et mat dans une même feuille » et « entre mesures dans une même feuille » : $F = \frac{28.125}{16.375} = 1.72$ (affecté des degrés de liberté 150 et 1.200) est significatif au « point 5 % ». On trouve :

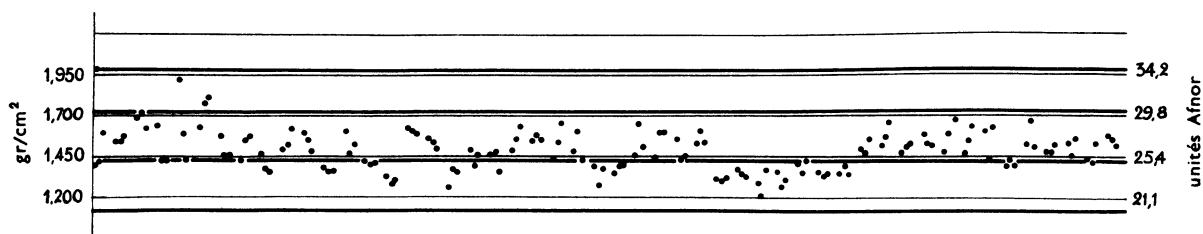
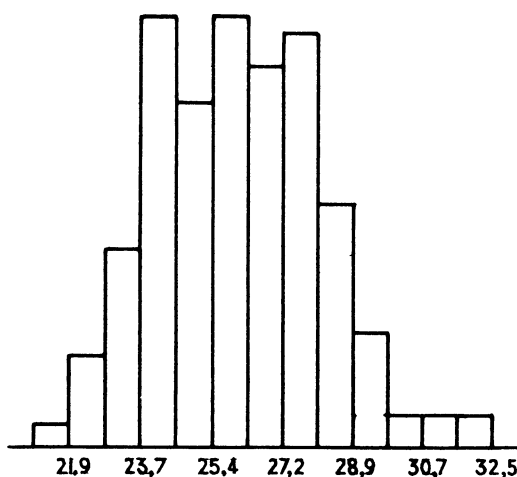
Moyenne générale « côté brillant » : 1.492 g/cm² (26.2 unités AFNOR)
 » » « côté mat » : 1.468 g/cm² (25.8 » »)

Sur les 150 feuilles étudiées, 86 donnent un résultat moyen supérieur « côté brillant » à ce qu'il est « côté mat ». Il y a donc intérêt à faire sur une feuille autant de mesures sur chacune des faces, cinq par exemple, comme le prévoit la norme de l'AFNOR.

ANNEXE III
Résistance à l'éclatement
(Moyennes de 10 mesures par feuille)

Résistance à l'éclatement (gr/cm ²)	Résistance à l'éclatement (unités AFNOR) (I)	Nombre de résultats
Supérieure à 1800	Supérieure à 31.6	1
de 1750 (compris) à 1800 (non compris)	30.7 à 31.6	1
de 1700 à 1750	29.8 à 30.7	1
de 1650 à 1700	28.9 à 29.8	6
de 1600 à 1650	28.1 à 28.9	13
de 1550 à 1600	27.2 à 28.1	23
de 1500 à 1550	26.3 à 27.2	21
de 1450 à 1500	25.4 à 26.3	24
de 1400 à 1450	24.5 à 25.4	19
de 1350 à 1400	23.7 à 24.5	24
de 1300 à 1350	22.8 à 23.7	11
de 1250 à 1300	21.9 à 22.8	5
Inférieure à 1250	Inférieure à 21.9	1
TOTAL		150

(I) Poids au m² du papier : 57 gr.



Graphique III. — 150 résultats (moyennes de 10 mesures) 3 feuilles dans chacun de 50 paquets.
(les traits gras correspondent aux limites de l'AFNOR)

3) La dispersion entre feuilles dans un même paquet est significativement plus élevée que la dispersion entre mesures dans une même feuille (rapport F $\frac{30.340}{17.670}$ 1.71 significatif). Mais la dispersion la plus importante de beaucoup est celle qui existe entre paquets (rapport F $\frac{304.200}{30.340}$ 10. hautement significatif). Il est donc indispensable, pour déterminer correctement la résistance moyenne d'une livraison, de prélever les feuilles **dans des paquets différents**.

Variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Carré moyen
Entre mesures dans une même feuille.Côté brillant .	9.930×10^3	600	16.550
Côté mat	9.720×10^3	600	16.200
	19.650×10^3	1.200	16.375
Entre brillant et mat dans une même feuille	4.220×10^3	150	28.125
Total entre mesures dans une même feuille	23.870×10^3	1.350	17.670
Entre feuilles dans un même paquet	3.034×10^3	100	30.340
Entre paquets	14.906×10^3	49	304.200
Total entre feuilles	17.940×10^3	149	120.400
TOTAL GÉNÉRAL	41.810×10^3	1.499	27.900

4) L'écart-type de la moyenne de 10 mesures (5 mesures côté brillant et 5 mesures côté mat) pour une feuille prise au hasard dans la livraison, se calcule comme pour le taux de cendres.

Avec des notations analogues, on a ici

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &\longrightarrow 17.670 \\ 10 \sigma_F^2 + \sigma_1^2 &\longrightarrow 30.340 \\ 30 \sigma_P^2 + 10 \sigma_F^2 + \sigma_1^2 &\longrightarrow 304.200\end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= 17.670 \\ \sigma_F^2 &= 1.267 \\ \sigma_P^2 &= 9.129\end{aligned}$$

La variance de la moyenne de 10 mesures (5 côté brillant et 5 côté mat) sur une feuille quelconque est donc :

$$\sigma_P^2 + \sigma_F^2 + \frac{\sigma_1^2}{10} = 12.163$$

qui donne un écart-type de 110 g/cm², soit environ 2 unités AFNOR pour un papier de 56 g/m².

Nous admettrons que l'écart-type reste approximativement le même pour tous les papiers de l'espèce étudiée (Kraft et simili-Kraft de 56 g/m²) quel que soit leur résistance moyenne. Les normes

de l'AFNOR classent le papier en différentes catégories, suivant que la résistance à l'éclatement est :

inférieure à . . .	7
comprise entre . .	7 et 10
» . .	10 et 13
» . .	13 et 16
» . .	16 et 20
» . .	20 et 25, etc... (les intervalles suivants sont de 5).

Décidant de contrôler la **résistance moyenne** de la livraison, on adoptera les valeurs critiques, 7, 10, 13, etc... En les encadrant d'une bande d'étendue ± 0.5 et en adoptant pour les risques α et β la valeur commune 5 %, on trouve :

$$n = (1.645) \times \left(\frac{2}{0.5}\right)^2 = 43.$$

Il faut donc déterminer la résistance sur une quarantaine de feuilles (à raison de 10 mesures par feuille) prises au hasard dans autant de paquets différents. Soit E la résistance moyenne (AFNOR) ainsi constatée, et supposons que le papier soit vendu comme ayant pour cette caractéristique une valeur supérieure à 20. Alors, si le papier a une résistance réelle au moins égale à 20.5, il y a au maximum 5 chances sur 100 pour qu'à la suite du contrôle il soit classifié comme ayant une résistance inférieure à 20 (c'est-à-dire que E soit inférieur à 20) ; de même, si la résistance réelle est inférieure à 19.5, il y a au maximum 5 chances sur 100 qu'il soit classifié dans la catégorie « supérieur à 20 ».

D. — DEGRÉ DE COLLAGE

Le papier étudié était annoncé comme ayant un degré de collage compris entre 30 et 40 unités AFNOR.

Les degrés de collage (exprimés en temps t et en unité AFNOR) observés sur les 150 feuilles examinées (chaque résultat étant la moyenne de 4 mesures) sont indiqués en **Annexe IV** et **Graphique IV** sous la même forme que pour le poids au m².

La valeur moyenne de t est 8.89.— soit, en unité AFNOR, le papier ayant un grammage moyen de 57, $C = 8.89 \left(\frac{100}{57}\right) = 26,7$.

L'analyse statistique des 600 mesures est résumée dans le tableau suivant d'« Analyse de la variance »,

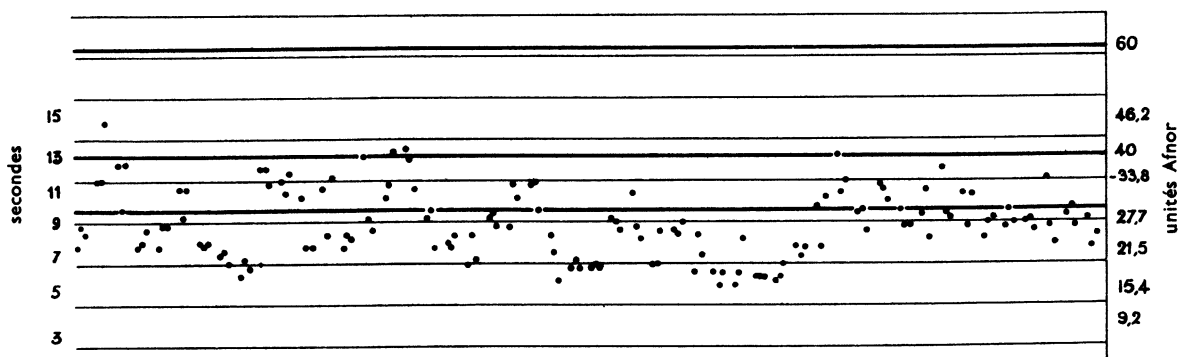
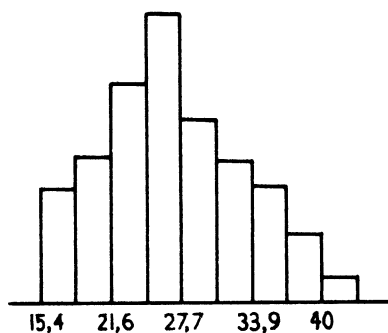
Variation	Somme des carrés	Degrés de liberté	Carré moyen
Entre mesures dans une même feuille	1.510	450	3.36
Entre feuilles dans un même paquet	632,83	100	6.33
Entre paquets	1.815,46	49	37.05
Total entre feuilles	2.448,29	149	16.43
TOTAL GÉNÉRAL	3.958,29	599	6.61

1) La dispersion entre résultats t dans une même feuille est élevée : l'écart-type est $\sqrt{3.36} = 1.83$, soit plus de 20 % de la moyenne générale. Cette dispersion est sans doute due pour une bonne part au mode opératoire, qui est imprécis ; il y a donc intérêt à faire plusieurs déterminations sur une même feuille (par exemple 4) et à en prendre la moyenne.

2) La dispersion entre feuilles dans un même paquet est significativement plus élevée que la dispersion entre mesures dans une même feuille (rapport $F = \frac{6.33}{3.36} = 1.88$ significatif), mais la dispersion la plus importante est celle que l'on constate entre paquets (rapport $F = \frac{37.05}{6.33} = 5.85$ hautement significatif). Il est donc indispensable, pour déterminer correctement le degré de collage moyen d'une livraison, de prélever des feuilles **dans des paquets différents**.

ANNEXE IV
Degré de collage
(Moyennes de 4 mesures par feuille)

Degré de collage en temps (t)	Degré de collage (en unités AFNOR)	Nombre de résultats
Supérieur à 13.	Supérieur à 40.	3
12 (non compris) à 13 (compris) .	de 37. à 40.	8
11 » à 12 » .	de 33.9 à 37.	13
10 » à 11 » .	de 30.8 à 33.9	16
9 » à 10 » .	de 27.7 à 30.8	22
8 » à 9 » .	de 24.6 à 27.7	33
7 » à 8 » .	de 21.6 à 24.6	25
6 » à 7 » .	de 18.5 à 21.6	17
5 » à 6 » .	de 15.4 à 18.5	13
Inférieur ou égal à 5	Inférieur à 15.4	—
TOTAL	—	150



Graphique IV. — 150 résultats (moyennes de 4 mesures) 3 feuilles dans chacun de 50 paquets.
(les traits gras correspondent aux limites de l'AFNOR)

3) L'écart-type de la moyenne de 4 mesures t faites sur une feuille prélevée au hasard dans la livraison s'obtient comme il a été dit à propos du taux de cendres et de la résistance à l'éclatement. On trouve ici un écart-type de 2.04, soit en unité AFNOR, pour un papier de 56 g m² :

$$2.04 \times \left(\frac{100}{56}\right)^2 = 6,5$$

Nous admettrons que l'écart-type reste approximativement le même pour tous les papiers de l'espèce étudiée (Kraft et simili-Kraft de 56 g m²) quel que soit leur degré de collage moyen. Les normes de l'AFNOR classent le papier en différentes catégories, suivant que le degré de collage est :

inférieur à	. . .	30
compris entre	. .	30 et 40
»	. .	40 et 60, etc...

Les valeurs critiques sont 30, 40, 60... En les encadrant d'une bande d'étendue ± 2 et en adoptant pour les risques α et β la valeur commune 5 %, on trouve :

$$n = (1.645)^2 \times \left(\frac{6,5}{2}\right)^2 = 29$$

Si l'on désire déterminer le degré de collage d'une livraison, il faut opérer sur une trentaine de feuilles (à raison de 4 mesures par feuille) prises au hasard dans autant de paquets différents.

Soit C le degré de collage moyen ainsi constaté, et supposons que le papier soit vendu comme ayant pour cette caractéristique une valeur supérieure à 30. Alors si le papier a un degré de collage réel au moins égal à 32, il y a au maximum 5 chances sur 100 pour qu'à la suite du contrôle, il soit classifié comme ayant un degré de collage inférieur à 30 (c'est-à-dire que C soit inférieur à 30) ; de même, si le degré de collage réel est inférieur à 28, il y a au maximum 5 chances sur 100 qu'il soit classifié dans la catégorie « supérieur à 30 ».

E. — CONTROLE DE LA CONTENANCE (nombre de feuilles) DE LA LIVRAISON

Il a été procédé au comptage de 50 paquets (ou rames) de contenance théorique 500 feuilles. Cette opération a été faite indépendamment l'une de l'autre, par deux personnes.

Il a été trouvé un paquet de contenance anormale (548 feuilles). Les contenances obtenues par chacune des vérificatrices, sur les 49 autres paquets, sont indiquées à la page suivante.

La contenance moyenne trouvée par la vérificatrice A est de 499,14 (ou 500,12 en comprenant le paquet à 548 feuilles) ; pour la vérificatrice B, la contenance moyenne est de 498,10 (ou 499,10 en comprenant le paquet à 548 feuilles).

On constate une différence moyenne de 1 feuille entre les deux vérificatrices. Il est donc indispensable de faire effectuer le comptage de chaque paquet par deux personnes, indépendamment l'une de l'autre, et de compter à nouveau en cas de désaccord.

L'écart-type du nombre de feuilles par paquet (en omettant le paquet anormal) est très sensiblement le même pour les deux vérificatrices (respectivement 4,6 et 4,7).

En adoptant la valeur 4,7, on peut admettre que le nombre moyen réel de feuilles par paquet est compris, avec une probabilité de 0.90, entre :

$$m \pm 1.645 \times \frac{4.7}{\sqrt{50}} = m \pm 1,1$$

m désignant le nombre moyen trouvé, après comptage de 50 paquets.

Autrement dit, il n'y a que 5 chances sur 100 pour que le nombre moyen réel de feuilles dépasse la valeur trouvée m de plus de 1.1.

Il semble raisonnable de prendre, pour contenance moyenne des paquets, un nombre entier. On est alors conduit à la règle suivante :

Déterminer le nombre moyen de feuilles sur 50 paquets pris au hasard, par comptage soigné ; arrondir à l'entier le plus proche, et majorer d'une unité.

NOMBRE DE FEUILLES	Nombre de paquets	
	Vérificatrice	
	A	B
513	1	1
512	—	—
511	—	—
510	—	—
509	—	—
508	2	2
507	1	—
506	3	1
505	—	2
504	1	—
503	—	1
502	2	—
501	2	2
500	9	6
499	5	3
498	6	8
497	7	10
496	1	1
495	2	3
494	1	2
493	2	1
492	2	1
491	2	2
490	—	3
TOTAL	49	49

Troisième partie

PROJET DE CONDITIONS DE CONTROLE ET APPLICATION A LA LIVRAISON ÉTUDIÉE

L'étude qui précède permet d'établir un projet de contrôle de livraisons de papier Kraft ou simili-Kraft, de force 56 g pour lequel on exige :

- un taux de cendres inférieur à T ‰ ;
- une résistance à l'éclatement (AFNOR) supérieure à E ;
- un degré de collage (AFNOR) supérieur à C.

Ce projet est résumé dans le tableau suivant et les notes qui l'accompagnent.

Contrôle de la force. — Le poids au m² d'une feuille s'obtient à partir de la pesée globale de 5 éprouvettes de 1 dm² prélevées, l'une au centre, les autres aux quatre angles de la feuille.

Contrôle du taux de cendres. — Chaque feuille fait l'objet d'une mesure.

CARACTÉRISTIQUES	VALEUR théorique	LIMITES de tolérance	NOMBRE de feuilles à contrôler (1)	LIVRAISON acceptable si		LIVRAISON inacceptable si	
				le nombre de feuilles hors limite est	la moyenne est	le nombre de feuilles hors limite est	la moyenne est
Force (poids au m ²) . .	56	{ 53.8 56.2	140	≤ 14	—	> 14	—
Taux de cendre (%) . .	T	—	20	—	≤ T	—	> T
Résistance à l'éclate- ment (Müllen)	E	—	40	—	≥ E	—	< E
Degré de collage (Car- son)	C	—	30	—	≥ C	—	< C

(1) On peut se borner à prélever ces feuilles dans 40 paquets différents :

- pour le contrôle de la force, on prendra 3 ou 4 feuilles par paquet ;
- pour le contrôle des autres caractéristiques, il faut prendre les feuilles dans des paquets distincts.

Contrôle de la résistance à l'éclatement. — Chaque feuille fait l'objet de 10 mesures à l'appareil Müllen, cinq du côté brillant, et cinq du côté mat. Les résultats sont exprimés en unités AFNOR.

Contrôle du degré de collage. — Chaque feuille fait l'objet de 4 mesures suivant la méthode Carson. Les résultats sont exprimés en unités AFNOR.

Pour le détail des mesures, on suivra les règles indiquées par l'AFNOR ; en particulier, avant épreuve, les éprouvettes devront séjourner pendant un temps suffisant en atmosphère conditionnée.

APPLICATION A LA LIVRAISON ÉTUDIÉE DANS LA DEUXIÈME PARTIE.

Cette livraison devait répondre, théoriquement, aux spécifications suivantes :

Force : 56 g.

Taux de cendres : inférieur à 2 %.

Résistance à l'éclatement : supérieure à 20 unités AFNOR.

Degré de collage : supérieur à 30 unités AFNOR.

Les mesures de poids au m² n'ont été faites que sur 100 feuilles (alors que le contrôle décrit ci-dessus prévoit 140 feuilles). 16 feuilles ayant été trouvées « hors limites de tolérance », on peut admettre que sur 140 feuilles on en aurait trouvé environ 22.

Par contre, pour les autres caractéristiques, il a été fait un nombre surabondant de mesures. Afin de se placer dans les conditions du contrôle prévu, on a désigné, **strictement au hasard**, avec la seule condition qu'elles appartiennent à des paquets différents :

pour le contrôle du taux de cendres :

20 feuilles parmi les 100 feuilles étudiées ;

pour le contrôle de la résistance à l'éclatement :

40 feuilles parmi les 150 feuilles étudiées ;

pour le contrôle du degré de collage :

30 feuilles parmi les 150 feuilles étudiées.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau de la page suivante.

Le papier livré est **trop lourd**, il a un taux de **cendres trop élevé**, un **degré de collage trop faible**. Pour ces deux dernières caractéristiques, il convient, tout au moins, de ne pas payer les suppléments de prix correspondant à un taux de cendre inférieur à 2 %, et à un degré de collage supérieur à 30. D'autre part, un poids au m² trop élevé peut léser l'acheteur si la livraison est payée au poids (alors qu'elle est utilisée à la surface).

Remarque. — On doit se demander dans quelle mesure des règles de contrôle déterminées à partir de l'étude d'une livraison particulière sont applicables à toute autre livraison d'un papier de même nature.

Caractéristiques	Valeur théorique	Limites de tolérance	Nombre de feuilles contrôlées	Nombre de feuilles hors limites	Valeur moyenne	Conclusion
Force (poids au m ²)	56	$\left\{ \begin{array}{l} 53.8 \\ 58.2 \end{array} \right.$	[140]	[22] (1)	—	Inacceptable.
Taux de cendres %	< 2 %	—	20	—	4.16 (2)	Inacceptable.
Résistance à l'éclatement (Müllen)	> 20	—	40	—	25.98 (3)	Acceptable.
Degré de collage (Carson)	> 30	—	30	—	26.20 (4)	Inacceptable.

(1) Force moyenne : 57,06.

(2) Pour l'ensemble des 100 feuilles, la moyenne constatée était de 4,58 % ;

(3) Pour l'ensemble des 150 feuilles, la moyenne constatée était de 25,96 % ;

(4) Pour l'ensemble des 150 feuilles, la moyenne constatée était de 26,7 %.

Il n'y a pas de difficultés en ce qui concerne le contrôle par classement en « correct » et « défectueux » (tel qu'on l'a appliqué au poids au m²) ; ce contrôle ne nécessite aucune connaissance préalable concernant la caractéristique en cause.

Dans le contrôle de la moyenne, au contraire, le nombre n d'objets à prélever dépend de l'écart-type :

$$n = \left[\frac{\lambda \sigma}{a} \right]^2$$

et l'on a supposé que l'écart-type évalué sur une livraison particulière restait valable pour d'autres livraisons du même fournisseur ou de fournisseurs différents. Quelles sont les conséquences d'une erreur dans l'évaluation de σ ?

Résolvant l'équation précédente par rapport à λ (qui définit les risques par la relation $\int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1 - \alpha$, on obtient :

$$\lambda = \frac{a}{\sigma} \sqrt{n}$$

n ayant été fixé, une sous-estimation de σ entraîne des risques plus élevés que prévus, une surestimation, des risques plus faibles. Seul le premier cas peut conduire à des mécomptes (le deuxième entraîne simplement un nombre de mesures plus élevé qu'il ne serait nécessaire). Le tableau ci-dessous montre comment se modifient les risques lorsque, partant de $\lambda = \frac{a}{\sigma} \sqrt{n} = 1.645$ (correspondant à $\alpha = 0.05$), l'écart-type réel σ' prend certaines valeurs supérieures à σ .

σ'	λ	$\alpha \neq$
1.0 σ	1.6450	0.05
1.2 σ	1.3708	0.08
1.4 σ	1.1750	0.12
1.6 σ	1.0281	0.15
1.8 σ	0.9139	0.18
2.0 σ	0.8225	0.20

On voit que si l'écart-type réel est sensiblement supérieur à l'écart-type de référence (s'il dépasse 1,3 σ) les risques peuvent être plus que doublés. Il est donc recommandé, lorsqu'on contrôle une livraison d'un fournisseur sur lequel on n'a aucun renseignement antérieur, de s'assurer, par un test même grossier, que l'écart-type est bien voisin de la valeur que l'on suppose. S'il apparaît sensiblement plus grand, il convient de le calculer et de modifier en conséquence le nombre d'unités soumises au contrôle.