

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

G. MORLAT

Sur le dimensionnement des diverses parties d'un ouvrage

Revue de statistique appliquée, tome 1, n° 3-4 (1953), p. 113-117

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1953__1_3-4_113_0

© Société française de statistique, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE DIMENSIONNEMENT DES DIVERSES PARTIES D'UN OUVRAGE

par

G. MORLAT

Ingénieur à l'Electricité de France

Le problème abordé ici est d'une portée très générale, mais le cas de l'harmonisation entre les exigences fixées pour les performances des turbines hydrauliques, d'une part, des ouvrages de génie civil (galeries), d'autre part, en constitue une illustration particulièrement frappante.

On envisagera deux parties A et B d'un ouvrage qui doivent fonctionner en série et être construites indépendamment l'une de l'autre. Pour chacune d'elles, on se fixe dans le projet une certaine taille qui commande le prix de réalisation, mais la puissance réelle, une fois l'ouvrage construit, sera différente de celle qu'on peut déduire par le calcul de la taille du projet, en raison d'aléas divers. La puissance réelle de l'ouvrage sera égale au minimum des puissances réelles des deux parties A et B. Peut-on résoudre à priori le problème de l'harmonisation des tailles théoriques à donner dans le projet aux deux organes envisagés ?

LOI DE PROBABILITÉ DE LA PUISSANCE RÉELLE.

Pour des caractéristiques fixées des projets de A et B, les puissances réelles seront des variables aléatoires, X et Y respectivement, de lois de probabilité :

$$F(x) = \text{Prob} [X \leq x]$$

$$G(y) = \text{Prob} [Y \leq y]$$

les densités de probabilité correspondantes étant notées $f(x)$ et $g(y)$. Pour une épreuve portant sur le couple de ces deux variables, nous appellerons Z le minimum de X et Y. Sa loi de probabilité a pour densité :

$$\varphi(z) = f(z) \{1 - G(z)\} + g(z) \{1 - F(z)\}$$

comme on le constatera immédiatement par application des règles des probabilités totales et des probabilités composées.

VALEUR MOYENNE DU MINIMUM DANS LE CAS DE LOIS NORMALES.

Nous supposerons maintenant que les lois $F(x)$ et $G(y)$ sont normales, de moyennes respectives A et B, d'écarts quadratiques réduits α et β . Nous supposerons ensuite qu'on ne s'intéresse qu'à la valeur moyenne de Z, ce qui apparaîtra parfaitement justifié chaque fois qu'on aura à construire un assez grand nombre d'ouvrages dans lesquels on appliquera les règles que nous cherchons maintenant à établir. Le loi des grands nombres nous autorise alors à définir un optimum n'intéressant que l'espérance mathématique de Z.

Dans le cas gaussien que nous envisagerons ici, cette espérance mathématique vaut :

$$E(z) = \zeta(A, B, \alpha, \beta) = \frac{A+B}{2} - (A-B) \Theta \left[\frac{A-B}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right] - \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\pi}} \exp - \left[\frac{(A-B)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \right]$$

en posant

$$\Theta(u) = \int_0^u \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

Ce résultat est obtenu par la considération simultanée des variables

$$Z = \min.(X, Y) \quad \text{et} \quad T = \max.(X, Y)$$

en remarquant que

$$Z + T = X + Y \quad \text{et} \quad T - Z = |X - Y|$$

or, la moyenne du module d'une variable gaussienne (m, σ) est égale à

$$2 \left\{ m \Theta\left(\frac{m}{\sigma}\right) + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}} \right\}$$

DÉFINITION DE L'OPTIMUM ÉCONOMIQUE.

Le prix de l'ouvrage constitué par les deux parties A et B étant de la forme $\bar{\omega}(A) + p(B)$, on trouvera, que l'on veuille maximiser ζ à prix fixé, ou minimiser le prix à ζ fixé — ou encore, ce qui revient formellement au même, rendre maximum un « enrichissement » défini par une expression du type $H \zeta - \bar{\omega}(A) - p(B)$, la condition ci-dessous :

$$(0) \quad \frac{\zeta'_A}{\zeta'_B} = \frac{\bar{\omega}'(A)}{p'(B)} = \frac{p_A}{p_B} = K$$

p_A et p_B étant les prix marginaux.

Cette équation, d'une importance fondamentale, est la condition d'harmonie entre les tailles fixées pour les deux parties A et B de l'ouvrage (sous réserve de vérifier une condition du second ordre, bien entendu).

CONDITION D'OPTIMUM LORSQUE LES DISPERSIONS SONT CONSTANTES.

La condition ci-dessus conduit à des résultats particulièrement simples lorsqu'on envisage des lois normales à écarts-types constants.

On trouvera alors :

$$\zeta'_A = 1 - F\left(\frac{A - B}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)$$

$$\zeta'_B = F\left(\frac{A - B}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)$$

en posant

$$F(u) = \frac{1}{2} + \Theta(u) = \int_{-\infty}^u \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

On a donc la condition

$$(1) \quad F\left(\frac{A - B}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) = \frac{1}{1 + K}$$

K étant le rapport des prix marginaux ; on trouvera une table de la fonction F dans la plupart des traités usuels de statistique.

CONDITION DU SECOND ORDRE.

Dans le cas particulier envisagé ici, l'étude des conditions de second ordre montre que la résolution de l'équation (1) fournit toujours un optimum. On a en effet :

$$d^2 \zeta = \zeta''_{A^2} dA^2 + 2 \zeta''_{AB} dA dB + \zeta''_{B^2} dB^2$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(A-B)^2}{\alpha^2 + \beta^2}\right] \left[dA^2 - 2 dA dB + dB^2 \right] < 0$$

EXEMPLE D'APPLICATION NUMÉRIQUE.

Supposons que les prix marginaux p_A et p_B soient dans le rapport de 1 à 4, on trouvera

$$\frac{1}{1+K} = 0,80$$

dans la table indiquée plus haut, nous lisons :

$$A - B = 0,8416 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

c'est-à-dire que si nous prenons le cas d'une turbine A et d'une galerie B, en admettant conventionnellement $B = 100$, $\alpha = 2$, $\beta = 10$, nous trouverons $A = 108,58$, c'est-à-dire que la puissance projetée de la turbine devrait excéder celle de la galerie de près de 9 %. Chaque fois que les prix marginaux seront égaux, on devra prendre des tailles A et B égales.

CONDITION D'OPTIMUM DANS LE CAS DE DISPERSIONS VARIABLES.

Si l'on admet que les dispersions α et β peuvent varier avec les tailles projetées A et B, la condition (0) écrite plus haut devient

$$\frac{\zeta'_A + \zeta'_\alpha \frac{d\alpha}{dA}}{\zeta'_B + \zeta'_\beta \frac{d\beta}{dB}} = K$$

Les nouvelles dérivées introduites se calculent aisément :

$$\zeta'_\alpha = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} f\left(\frac{A-B}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)$$

$$\zeta'_\beta = -\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} f\left(\frac{A-B}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)$$

f étant la densité de probabilité de la loi normale, qu'on trouvera dans la table déjà citée.

La condition d'optimum pourra ainsi être calculée sans peine chaque fois qu'on connaîtra les fonctions $\alpha = \alpha(A)$ et $\beta = \beta(B)$ définissant les dispersions. Si l'on admet en particulier que

$$\alpha = \lambda A \quad \text{et} \quad \beta = \mu B$$

(erreurs relatives constantes sur les tailles des projets), la condition d'optimum s'écrira :

$$(2) \quad \frac{1 - F\left(\frac{A-B}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) - \lambda \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} f\left(\frac{A-B}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)}{F\left(\frac{A-B}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) - \mu \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} f\left(\frac{A-B}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right)} = K$$

EXEMPLE D'APPLICATION NUMÉRIQUE.

La formule écrite ci-dessus permet de résoudre tout cas numérique avec une relative aisance. On peut ainsi en déduire que si l'on prend $\alpha = 0,02 A$ et $\beta = 0,10 B$ avec $k = 0,25$, la condition d'optimum s'écrit

$$A = 1,0875 B$$

On constate que le résultat diffère assez peu de celui que nous avons obtenu avec des dispersions constantes et, pour beaucoup d'applications dans lesquelles les écarts possibles restent modérés, on pourra se borner à appliquer la formule (1) trouvée dans ce cas.

D'ailleurs, il est facile de voir, sur la relation (2) qui précède, que la solution de (1) constitue la partie principale de la solution de (2) toutes les fois que l'on considère des valeurs petites pour α et β . On peut aussi vérifier dans les mêmes hypothèses les conditions du second ordre.

FORMULE SIMPLIFIÉE DANS LE CAS D'ÉCARTS TYPES MODÉRÉS.

Si l'on se contente d'une approximation honnête, on peut encore simplifier les formules indiquées plus haut. Supposons que les valeurs relatives des dispersions α et β ne dépassent pas 15 à 20 % et que l'on ait $\lambda > \mu$. On pourra écrire alors, avec une bonne approximation :

$$\delta = \frac{B-A}{A} = -\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} F^{-1} \left(\frac{1}{1+K} \right)$$

On voit que l'écart relatif entre les capacités théoriques A et B que l'on doit assigner aux deux organes, soit δ , est tel que :

1° une taille plus grande doit être assignée à l'organe dont le coût marginal est le plus bas ;

2° l'écart relatif est proportionnel à $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$

On peut pousser encore plus loin la simplification et admettre avec une bonne approximation la formule suivante (1)

$$\delta = 1,44 \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \log. \frac{p_A}{p_B}$$

Dans l'application numérique qui a déjà été envisagée, cette formule conduit à un écart de 8, 8 %.

En se bornant toujours à des valeurs modérées de λ et μ , cette formule donnera la valeur de δ avec une légère erreur par excès lorsque les prix marginaux seront très différents. Cette erreur atteindra 7 % si les prix sont dans le rapport de 1 à 10, 11 % s'ils sont dans le rapport de 1 à 20, et 20 % s'ils sont dans le rapport de 1 à 100.

HARMONISATION DES FRAIS D'ÉTUDES.

Lorsqu'il est possible de prévoir de combien des études plus poussées peuvent réduire les dispersions α et β , on peut aborder un problème économique plus général, dans lequel on chercherait à harmoniser, en même temps que les tailles théoriques des organes, les budgets des études consacrées à chacun d'eux. On sera alors conduit à envisager, d'une part, le coût global

$$\pi(A, B, \alpha, \beta) = \bar{\omega}(A) + p(B) + \varepsilon(\alpha) + \eta(\beta)$$

les termes $\varepsilon(\alpha)$ et $\eta(\beta)$ représentant le coût des études, et, d'autre part, la capacité de production probable

$$\zeta(A, B, \alpha, \beta)$$

L'optimum économique sera défini par la condition que la combinaison $\pi + \ell \zeta$ soit maximum en A, B, α , β , et les conditions d'optimum s'écriront

$$p_A + \ell \zeta'_A = 0$$

$$p_B + \ell \zeta'_B = 0$$

$$\varepsilon'(\alpha) + \ell \zeta'_\alpha = 0$$

$$\eta'(\beta) + \ell \zeta'_\beta = 0$$

(1) On notera que cette approximation revient à remplacer la fonction de répartition normale par $G(x) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{x}{1,44}\right)}$ qui en diffère peu dans une zone centrale assez large.

On en tire, en particulier, dans le cas gaussien envisagé, en tenant compte des valeurs des dérivées écrites plus haut :

$$\frac{\zeta'_\alpha}{\zeta'_\beta} = \frac{\varepsilon'(\alpha)}{\eta'(\beta)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

c'est-à-dire que les coûts marginaux admissibles pour les études consacrées à chaque organe sont dans le rapport des écarts-types.

C'est là un résultat qui conduira peut-être rarement à des applications numériques précises, mais il montre pourquoi on devra admettre — comme le bon sens nous y pousse d'ailleurs — de consacrer aux études d'un organe des sommes d'autant plus importantes que les incertitudes sont plus grandes.