REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

GUENOT

Le contrôle précis des duretés dans un atelier de frittage. Application des méthodes statistiques à l'amélioration d'un procédé de mesure

Revue de statistique appliquée, tome 1, nº 2 (1953), p. 65-84
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1953__1_2_65_0>

© Société française de statistique, 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LE CONTROLE PRÉCIS DES DURETÉS DANS UN ATELIER DE FRITTAGE

(APPLICATION DES MÉTHODES STATISTIQUES A L'AMÉLIORATION D'UN PROCÉDÉ DE MESURE)

par

M. GUENOT

Ingénieur des Arts et Manufactures, Monsieur GUENOT a poursuivi ses études en Angleterre où il a obtenu un diplôme de doctorat (Ph. D) en Métallurgie.

Actuellement, Chef de Recherches au Laboratoire Central des Usines Schneider au Creusot, Monsieur Guénot a eu maintes occasions d'appliquer les méthodes de l'analyse statistique à l'organisation rationnelle de plans d'expérience permettant de mettre en évidence les principales causes de dispersion des résultats.

On trouvera dans l'exposé ci-après une application des méthodes d'analyse de variance à un plan expérimental relatif à l'étude de la dispersion de mesures de dureté faites à l'aide d'un appareil Rockwell.

Pour contrôler la régularité d'une production métallurgique aux différentes étapes de la fabrication, on fait souvent appel aux mesures de dureté (ateliers de traitements thermiques ou de frittage). Ce contrôle est d'autant plus efficace que la précision des mesures est plus grande.

Pour caractériser et améliorer la précision des mesures, on peut faire appel à l'analyse de la variance, opération statistique dont le mécanisme et l'utilité sont discutés en détail sur un exemple pratique.

Cette étude a permis notamment de déceler des variations systématiques qui s'ajoutaient à l'erreur de mesure et finalement de mettre au point une méthode pratique capable de les éliminer.

A. PRÉAMBULE

AI. — BUT DU CONTROLE DE FABRICATION.

Le but essentiel de tout contrôle de fabrication est de limiter la dispersion que l'on peut observer dans « la qualité » des produits. Pour être efficace, ce contrôle doit être capable de déceler rapidement les variations anormales qui traduisent un « déréglage » (R1), (R2).

Dans le but d'obtenir une sensibilité suffisante, on est souvent amené à faire appel à des caractéristiques physiques qui n'intéressent pas directement l'utilisateur et qui peuvent même porter sur des étapes intermédiaires de la fabrication (R3).

C'est ce qui se produit notamment dans la fabrication des carbures frittés où le contrôle des duretés sur des cubes-pilotes constitue, lorsqu'il est suffisamment précis, un excellent moyen de déceler les déréglages de fabrication ; on sait cependant que la meilleure dureté à froid n'est pas nécessairement associée avec les meilleures propriétés de coupe.

A2. — CONDITIONS PARTICULIÈRES DU PROBLÈME.

A.21 Dans la fabrication des carbures frittés destinés à l'usinage de la fonte (classe G et H) ou de l'acier (classe S) un contrôle de dureté était prévu aux deux étapes suivantes :

1° Au début du frittage de chaque lot sur des cubes-pilotes ;

2° En fin de frittage de ces lots sur des plaquettes prélevées au hasard dans la fabrication.

Chaque cube-pilote était préparé à partir de poudre prélevée dans le lot à contrôler ; le frittage avait lieu dans les mêmes conditions que celui des plaquettes de fabrication courante.

Toutefois, pour augmenter la sensibilité des contrôles, on avait donné aux cubes une épaisseur légèrement supérieure (8 mm. au lieu de 6 mm.) à celle des plaquettes ; ce qui avait pour effet, notamment, d'amplifier les différences entre les caractéristiques en peau et à cœur.

A.22 Les conditions de contrôle étaient sensiblement les mêmes, qu'il s'agisse des cubes-pilotes ou des plaquettes.

L'essai de dureté devait s'effectuer **rapidement**, à proximité de **l'atelier** par des **opérateurs non spécialisés**.

Dans ces conditions, les vibrations, les variations de température, et surtout le non-parallélisme des faces de l'échantillon représentaient autant de causes d'erreur qui ne pouvaient être entièrement éliminées, mais qu'on devait s'efforcer de minimiser.

Par contre, on savait par des essais préliminaires que les différences de dureté d'une plaquette à l'autre étaient généralement faibles (de l'ordre du demi-point ROCKWELL) et qu'il était par conséquent difficile de mettre en évidence des variations significatives de dureté à moins de faire appel à des moyens de mesure très sensibles.

A.23 Le problème à résoudre pouvait s'énoncer ainsi : « Effectuer dans les conditions pratiques de **l'atelier**, mais avec **la plus grande précision possible,** des mesures de dureté portant sur des échantillons dont la dureté avoisine **80 Rockwell C.** »

Pour des raisons de robustesse et de rapidité, l'atelier avait adopté une machine de dureté du type ROCKWELL C pourvue de pénétrateurs en diamant SODIAM (pyramides à multiples facettes).

Comme ces pénétrateurs finissent par se détériorer plus ou moins rapidement, l'atelier possédait en stock une demi-douzaine de pénétrateurs soigneusement repérés, de façon à pouvoir retirer du service et faire retailler immédiatement tout pénétrateur dont le diamant est émoussé ou dont les performances ne sont plus satisfaisantes du point de vue de la précision.

A.24 Etant donné la machine et ses pénétrateurs de rechange, le problème se ramenait à **caractériser, réduire et maintenir constante** la dispersion des mesures de dureté.

Ce triple objectif nous a conduit à estimer la variance d'erreur et chercher au moyen d'une « analyse de la variance » à mettre en évidence les principales causes de dispersion des résultats.

A3. — PRINCIPE DE L'ANALYSE DE VARIANCE.

Pour faciliter la compréhension de l'étude statistique (Partie B), nous allons rappeler ci-dessous quelques définitions et résultats classiques qui sont développés dans tous les traités modernes de statistiques (voir par exemple, les références (R4), (R5), (R6)).

A.31 Erreur de mesure et variabilité vraie.

Nous caractériserons la précision de la mesure par sa **variance d'erreur V** ; cette variance est relative à la population de toutes les mesures de dureté x qu'on pourrait effectuer sur une plaquette donnée suivant un mode opératoire déterminé.

La moyenne de cette population ou « dureté vraie » de la plaquette sera désignée par X.

Cette dureté vraie X est inaccessible expérimentalement, mais ses variations d'une plaquette à l'autre représentent la variabilité réelle de la production que nous caractériserons par sa variance V_x.

Si l'on évalue la dureté de chaque plaquette par une seule mesure x il est clair qu'on obtiendra une dispersion plus grande que la variabilité réelle en raison des erreurs de mesure $\varepsilon = X - x$ (1).

Pour préciser de quelle façon la dispersion des mesures affecte cette variabilité, on peut s'appuyer sur le théorème classique suivant :

« Toute fonction linéaire de variables aléatoires indépendantes :

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n \qquad (2)$$

a pour variance :

$$V_Z = a_1^2 V_1 + a_2^2 V_2 + \ldots + a_n^2 V_n \qquad (3)$$

où V_1, V_2, $\ldots V_n$ désignent les variances de $X_1, X_2, \ldots X_n$. »

(R4 p71) (R7 p42) (R8 p56)

La dureté mesurée x étant la somme des variables aléatoires indépendantes X et $\mathcal{E}$ a pour variance, d'après ce qui précède, $V_x = V_X + V$. (4)

En remplaçant la mesure unique par une moyenne $\bar{x}$ de n mesures, on obtient une erreur $\mathcal{E}_n = \bar{x} - X$ dont la variance $V(\mathcal{E}_n)$ est plus faible que V ; l'application de la formule (3) donne effectivement $V(\mathcal{E}_n) = V/n$. (5)

Dans ces conditions la variabilité apparente de la production a pour variance

$$V_{\bar{x}} = V_X + V/n \quad . \qquad (6)$$

Elle est d'autant plus voisine de la variance V_X que n est plus grand et V plus petit.

A.32 Décomposition de la variance.

La relation (6) est très générale, elle s'applique chaque fois que la dispersion des moyennes expérimentales $\bar{x}$ provient de deux causes de variation indépendantes :

a) **une cause fortuite** impossible à éliminer (erreur de mesure par exemple) qui, en l'absence d'autres causes, provoquerait une dispersion des résultats individuels autour d'une moyenne vraie X avec une variance égale à V.

b) **une cause contrôlable**, c'est-à-dire une cause susceptible de faire varier X avec une variance V_x si on la laissait agir librement, mais qu'on peut expérimentalement fixer pour effectuer les n répétitions nécessaires au calcul de $\bar{x}$.

En pratique, c'est toujours le problème inverse qui se pose ; on connaît la variance $V_{\bar{x}}$ des moyennes expérimentales et l'on désire connaître l'importance relative des différentes composantes V_x et V.

Cette opération qui porte nécessairement sur des estimations, puisque les variances vraies ne sont jamais connues, constitue une **analyse de la variance** sous sa forme la plus simple où elle apparaît comme une extension naturelle du calcul d'erreur classique.

On trouvera, détaillé dans la seconde partie, un exemple plus complexe de ce genre d'opération ; il s'agira, cette fois, de décomposer la variance d'erreur V des mesures de dureté suivant différentes causes de variations possibles affectant la précision.

A.33 Les formules d'estimation et leurs précisions.

Nous rappellerons brièvement quelques résultats classiques (R 9), (R 10), (R 11).

Lorsqu'on dispose de k plaquettes bien homogènes de duretés vraies inconnues X_1, X_2, ... X_k, on peut effectuer sur chacune d'elles un nombre réduit n_p de mesures x_p dont la somme est T_p et la moyenne $\bar{x}_p$; la variance V peut être estimée par la formule :

$$s^2 = \frac{\Sigma (x_1 - \bar{x}_1)^2 + \ldots + \Sigma (x_p - \bar{x}_p)^2 + \ldots + \Sigma (x_k - \bar{x}_k)^2}{n - k} \qquad (7)$$

où n est le nombre total de mesures.

Compte tenu de $T_p = n_p \bar{x}_p$ et de l'identité classique :

$$\Sigma (x - \bar{x})^2 \equiv \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n \qquad (8)$$

cette formule peut être mise sous la forme commode :

$$s^2 = \frac{\Sigma x^2 - \Sigma (T_p)^2 / n_p}{n - k} \qquad (9)$$

Lorsque les distributions sont normales, on sait que les estimations s^2 suivent une loi connue (loi de χ^2), avec $\phi = n - k$ degrés de liberté.

Si $\phi = (n-k)$ est petit, la précision des estimations est faible et deux estimations indépendantes s_1^2 et s_2^2 de la même variance V peuvent différer notablement.

Les variations admissibles de $F = s_1^2 / s_2^2$ autour de l'unité ((R6 p311), (R12 p.213)) sont données par les tables de SNEDECOR (R13).

Nous désignerons par $F_{0,05}[\phi_1, \phi_2]$ la limite qui est dépassée par F cinq fois sur cent seulement et nous admettrons que le dépassement de cette limite est une forte présomption que les variances diffèrent.

B. ÉTUDE DU PROCÉDÉ DE MESURE PAR ANALYSE DE LA VARIANCE

B1. — SCHÉMA EXPÉRIMENTAL.

Pour essayer de caractériser, et éventuellement, réduire la dispersion des mesures de dureté, nous avons entrepris une série de 200 mesures réparties sur 10 jours, en utilisant alternativement deux plaquettes différentes C_1 et C_2.

Ultérieurement, nous avons été amenés à faire intervenir dans la classification des résultats d'autres facteurs, tels que l'ordre chronologique et la température.

L'analyse de variance appliquée à ces essais permettra, ainsi que nous le verrons plus loin, de mettre en évidence les différentes causes de dispersion.

De cette analyse résultera finalement une méthode pratique pour mesurer la dureté des plaquettes avec une précision aussi élevée qu'on le désire.

Les détails de cette méthode qui met en œuvre un jeu de cales convenablement étalonnées seront décrits plus loin (Partie C).

L'exposé suivant ne suppose aucune connaissance préalable des techniques d'analyse de variance, mais le lecteur aura néanmoins intérêt à se reporter aux ouvrages classiques consacrés à ces questions (R 14), (R 15).

B2. — DÉTAILS OPÉRATOIRES.

B.21 Pendant toute la durée des essais, le même pénétrateur a été utilisé et laissé en permanence sur la machine.

Deux cales C_1 et C_2 (plaquettes épaisses de fabrication courante) ont été alternativement employées par le même opérateur pendant 10 jours successifs.

Chaque jour J_j on procédait sur chaque cale à une série (A_1) de 5 mesures avant de procéder aux opérations de contrôle courant des duretés, puis à une série (A_2) de 5 mesures à la fin de ces opérations.

B.22 Au bout du dixième jour ($j = 10$) on obtenait ainsi les 200 résultats qui figurent dans le tableau I.

Au lieu d'exprimer directement les résultats en points ROCKWELL, nous avons retranché 80 des résultats bruts et finalement exprimé les différences en quarts de points ROCKWELL. Les indices de dureté obtenus x sont des nombres entiers en raison de la sensibilité limitée de l'appareil ; ils sont tous inférieurs à 10 et se prêtent aisément au calcul numérique.

On peut repasser de ces indices x aux points ROCKWELL R_c par la formule :

$$\boxed{R_c = 80 + 0{,}25\ x}$$

B3. — ERREUR DE MESURE.

B.31 Il est commode au début de cette étude de ne pas faire de distinction entre A_1 et A_2, c'est-à-dire considérer dans leur ensemble les 10 mesures obtenues chaque jour J_j sur chacune des cales C_i.

B.32 Dans cette expérience simplifiée à deux facteurs C et J, l'erreur de mesure représente la dispersion de l'ensemble des essais qu'on pourrait effectuer le même jour J_j sur la même cale C_i.

Cette erreur de mesure est caractérisée par sa variance V dont il est possible d'obtenir immédiatement une estimation basée sur 180 degrés de liberté par la formule (7).

En désignant par Y l'une quelconque des sommes de 10 mesures obtenues journellement sur chaque cale (tableau II), cette formule s'écrit :

$$\boxed{s^2 = \frac{\Sigma x^2 - \Sigma Y^2/10}{180}} \qquad (10)$$

On trouve ainsi :

$$\boxed{s^2 = 1.224} \qquad (11)$$

ce qui correspond à un écart type exprimé en points ROCKWELL $s_R = 0.25$ s dont la valeur numérique est :

$$\boxed{s_R = 0.276} \qquad (11 \text{ bis})$$

Etant donné la précision de ces estimations ($\phi = 180$ degrés de liberté) **on peut les confondre pratiquement avec les valeurs vraies.**

B4. — DISPERSION TOTALE DES RÉSULTATS.

B.41 La dispersion des 200 chiffres du tableau (I) n'a pas nécessairement pour seule origine l'erreur de mesure V.

Il peut exister une certaine différence entre les duretés vraies des cales C_1 et C_2 et des variations systématiques d'un jour à l'autre.

Ce sont précisément ces variations systématiques dont nous discuterons l'existence plus loin.

B.42 En attendant, nous désignerons, pour éviter toute confusion, la variance de dispersion totale due à ces différentes causes par V_t.

On peut obtenir de V_t une estimation basée sur $\phi = N - 1 = 199$ degrés de liberté par la formule (cas particulier de la formule (7)) :

$$\boxed{S_t^2 = \frac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{N - 1}} \qquad (12)$$

où Σ est étendu aux 200 billages du tableau.

$\Sigma (x - \bar{x})^2$ s'obtient par l'identité (8).

$$\Sigma (x - \bar{x})^2 \equiv \Sigma x^2 - \frac{T^2}{N} = 579{,}18 \qquad (T = 442, \text{ somme des 200 observations}).$$

On en déduit :

$$\boxed{S_t^2 = 2{,}910}$$

La comparaison avec s^2 permet de supposer qu'il existe effectivement des causes de variations systématiques.

B5. — DIFFÉRENCES SYSTÉMATIQUES ENTRE CALES ET VARIATIONS JOURNALIÈRES.

B.51 **En l'absence de variations systématiques d'un jour à l'autre** les moyennes vraies μ' et μ'' relatives à chacune des cales resteraient constantes dans le temps.

Les différentes moyennes journalières Y/10 relatives à la même cale C_1 (par exemple) seraient distribuées autour de μ' avec une dispersion uniquement due à l'erreur de mesure.

D'après la formule (5) cette variance de dispersion aurait pour valeur V/10.

La variance de dispersion des Y qui est 100 fois plus grande (puisque une variance a les dimensions du carré de la grandeur mesurée) aurait pour valeur 10 V et par conséquent les sommes J_j des 20 mesures journalières effectuées sur l'ensemble des deux cales (dernière colonne tableau II) seraient distribuées avec une variance égale à 20 V (formule (3)).

S'il n'existait aucune variation systématique d'un jour à l'autre, on pourrait donc estimer l'erreur de mesure V au moyen des 10 sommes J_j par la formule (7) qui s'écrit ici :

$$s_j^2 = \frac{1}{20}\left[\frac{\Sigma(J_j - \bar{J})^2}{9}\right]$$

soit d'après (8) :

$$\boxed{s_j^2 = \frac{\dfrac{\Sigma(J_j)^2}{20} - \dfrac{T^2}{200}}{9}} \qquad (13)$$

Cette estimation est basée sur 9 degrés de liberté.
(cf le tableau de décomposition du chapitre suivant)

B.52 Par un raisonnement similaire, on voit qu'en l'absence de variations systématiques d'une cale à l'autre, on pourrait obtenir de V une autre estimation, basée cette fois sur un seul degré de liberté, par la formule : $s_c^2 = \frac{1}{100}\left[\frac{\Sigma(C_i - \bar{C})^2}{1}\right]$ où C_i désigne successivement, pour $i = 1$ et $i = 2$ les sommes C_1 et C_2 des 100 mesures effectuées respectivement sur les cales C_1 et C_2, cependant que $\bar{C}$ désigne la moyenne $\bar{C} = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$.

Après transformation, la formule s'écrit sous une forme analogue à celle de la relation (11) :

$$\boxed{s_c^2 = \frac{\Sigma(C_i)^2}{100} - \frac{T^2}{200}} \qquad (14)$$

B.53 Les estimations s_j^2 (formule 13) et s_c^2 (formule 14) de V ne sont valables que dans la mesure où les variations systématiques correspondantes sont inexistantes, alors que l'estimation s^2 (formules 10 et 11) est valide dans les deux cas.

Corrélativement, pour déceler par exemple les variations systématiques d'un jour à l'autre, il suffit, sous réserve de validité du test, de comparer les estimations s_j^2 et s^2 et voir si elles diffèrent significativement.

Dans l'affirmative (c'est-à-dire si le rapport $F = s_j^2/s^2$ dépasse les limites vraisemblables assignées par les tables de SNEDECOR,)on peut conclure à l'existence d'une variation systématique entre jours.

Nous allons voir ci-dessous comment la mise en œuvre de ces tests peut s'effectuer avec un minimum de calcul numérique.

B6. — ANALYSE DE LA VARIANCE.

B.61 A partir des tableaux I et II (qui ne contiennent que des nombres entiers relativement petits), on peut calculer les 5 sommes suivantes :

$\Sigma x^2 = 1556$ $\quad \Sigma Y^2/10 = 220{,}40$ $\quad \frac{T^2}{200} = 976{,}82$ $\quad \Sigma(J_j)^2/20 = 1150$ et $\Sigma(C_i)^2/100 = 1149{,}80$

Par soustraction, on en déduit immédiatement les sommes des carrés qui figurent au numérateur des formules (13), (14), (10) et (12) respectivement et qui ont été reproduites en supprimant les indices dans le tableau ci-dessous, respectivement aux 1re, 2e, 4e et 5e lignes.

De la somme des carrés $\Sigma(x - \bar{x})^2 \equiv \Sigma x^2 - T^2/200$ qui correspond à la dispersion totale des 200 résultats, on peut retrancher les trois autres sommes.

La différence — toujours positive (voir plus loin formule (18)) — porte le nom de composante d'interaction entre les facteurs (C) et (J), soit en abrégé (C × J). Son interprétation fera l'objet du chapitre suivant.

Sources de variation	Sommes de carrés		ϕ	Quotients
(C) entre cales	$\Sigma C^2/100 - T^2/200$	$= 172,98$	1	$s_c^2 = 172,980$
(J) entre jours	$\Sigma J^2/20 - T^2/200$	$= 173,18$	9	$s_j^2 = 19,242$
(C × J) « interaction » . .	Différence (§ B 71)	$= 12,62$	9	(= 1,402 voir plus loin)
Erreur de mesure	$\Sigma x^2 - \Sigma Y^2/10$	$= 220,40$	180	$s^2 = 1,224$
TOTAL	$\Sigma x^2 - T^2/200$	$= 579,18$	199	

En face des sommes des carrés, on a fait figurer les degrés de liberté ϕ et les quotients correspondants. Sur la ligne (C × J) le chiffre 9 de la colonne ϕ a été obtenu par différence.

B.62 En l'absence de différences réelles entre les cales s_c^2 et s^2 représenteraient deux estimations d'une même variance V.

Dans ces conditions, nous avons vu[1] que $F = s_c^2/s^2$ ne peut dépasser qu'une fois sur mille la valeur $F_{0,001}\left[1 - 180\right] = 11,20$, fournie par les tables de SNEDECOR.

Pour éprouver l'hypothèse d'identité des variances, il suffit donc de former $F = s_c^2/s^2 = 141,3$.

Cette valeur dépassant la limite $F_{0,001} = 11,2$, on peut être pratiquement certain qu'il existe entre les deux cales une différence de dureté vraie malgré la faible différence existant entre les moyennes (0,465 en points ROCKWELL C).

B.63 L'existence d'une variation systématique d'un jour à l'autre peut se mettre en évidence de façon similaire en formant le rapport :

$$F = \frac{s_j^2}{s^2}$$

on trouve F = 15,7 qui dépasse encore largement la limite admissible

$$F_{0,001}\left[9 - 180\right] = 3,28$$

Il existe donc certainement, d'un jour à l'autre, des variations systématiques de dureté.

B7. — COMPOSANTE D'INTERACTION.

B.71 La somme des carrés totale $\Sigma(x - \bar{x})^2 = \Sigma x^2 - T^2/200$ caractérisant la variation totale des 200 chiffres de dureté a été décomposée en 4 parties représentant respectivement l'erreur de mesure, la différence systématique entre les cales, les variations d'un jour à l'autre et une composante résiduelle qualifiée « d'interaction » qui, par différence, a pour valeur :

$$\Sigma Y^2/10 - \Sigma J^2/20 - \Sigma C^2/20 + T^2/200$$

C'est la signification de cette composante et du quotient correspondant qu'il reste à étudier.

B.72 Considérons d'abord le **cas hypothétique ou les différences de duretés vraies ($\mu_j' - \mu_j''$) restent constantes** d'un jour à l'autre (indépendant de j) c'est-à-dire où le facteur journalier affecte les deux cales de la même façon.

On dit dans de telles circonstances — d'ailleurs fréquentes — qu'il n'existe **aucune interaction vraie** entre les deux facteurs C et J.

B.73 Malgré cette absence d'interaction, si l'on évalue chaque jour J_j les moyennes $\bar{x}_j'$ et $\bar{x}_j''$ des 10 mesures effectuées sur chacune des cales, on n'obtient pas suivant les jours, les mêmes différences :

$$\Delta = \bar{x}_j' - \bar{x}_j'' \qquad (15)$$

(1) En fait, il n'est pas évident à priori que ces deux estimations soient indépendantes. La démonstration de l'indépendance fait appel à un théorème dû à Fisher [R 4 — II — Chap. 23].

Cela est dû aux erreurs de mesures qui affectent les moyennes (puisqu'elles ne sont pas moyennes vraies). Si, en effet, on recommençait le même jour plusieurs séries de 10 mesures sur chaque cale, on n'obtiendrait pas exactement les mêmes valeurs pour $\bar{x}'_j$ et $\bar{x}''_j$; la dispersion des chiffres obtenus aurait précisément pour variance V/10.

Comme on a supposé les différences entre les duretés vraies, indépendantes du jour j considéré :

$$\boxed{\mu'_j - \mu''_j = \mu' - \mu'' (= C^{te})} \qquad (16)$$

les 10 valeurs de Δ j qu'on peut tirer du tableau II appartiennent à une même distribution de moyenne vraie ($\mu' - \mu''$) et variance $2\frac{V}{10}$ soit V/5 (formule 5).

En l'absence d'interaction vraie on dispose donc d'une nouvelle estimation s_I^2 de V basée sur 9 degrés de liberté :

$$\boxed{s_I^2 = \frac{5 \times \Sigma (\Delta j - \bar{\Delta})^2}{9.}} \qquad (17)$$

(Σ étant étendu aux 10 jours et $\bar{\Delta}$ désignant la moyenne des Δj).

B.74 L'identité (8) habituelle permet d'écrire :

$$5 \Sigma (\Delta j - \bar{\Delta})^2 \equiv 5 \Sigma (\Delta j)^2 - 50 (\bar{\Delta})^2$$

Un calcul élémentaire montre que :

$$5 \Sigma (\Delta j)^2 \equiv \Sigma Y^2/10 - \Sigma J^2/20 \qquad \text{et} \qquad 50 (\bar{\Delta})^2 \equiv \Sigma C^2/100 - \frac{T^2}{200}$$

d'où

$$\boxed{5 \Sigma (\Delta j - \bar{\Delta})^2 \equiv \Sigma Y^2/10 - \Sigma J^2/20 - \Sigma C^2/100 + T^2/200} \qquad (18)$$

On retrouve ainsi (cf B 71) au numérateur de (17) la somme des carrés (C $\times$ J) qui figurait à la 3e ligne au tableau de décomposition. L'identité (18) prouve d'ailleurs qu'elle est bien positive.

Le quotient $s_I^2 = 1{,}402$ représente une estimation de V basée sur 9 degrés de liberté.

B.75 Lorsqu'il existe entre C et J une interaction véritable, on retrouve pour s_I^2 la même expression, mais elle ne représente plus une estimation de V.

A la dispersion V s'ajoute la variation des différences $\mu'_j - \mu''_j$.

Inversement, la comparaison de s_I^2 et s^2 permet grâce aux tables de SNEDECOR (la validité du test étant admise) de reconnaître la présence éventuelle d'une interaction vraie entre C et J.

On trouve ici $F = s_I^2/s^2 = 1{,}15$, qui ne dépasse pas $F_{0,10}[1 - 9]$ des tables. Rien ne permet de supposer qu'il existe une interaction.

La différence entre cales ne varie pas systématiquement d'un jour à l'autre.

Nous verrons plus loin le parti à tirer de ce résultat.

B8. — DÉCOMPOSITION COMPLÉMENTAIRE DE LA VARIANCE.

(Ce chapitre n'est pas indispensable à la lecture de la 3e partie.)

B.81 Pour compléter cette étude, nous avons recherché s'il n'existait pas entre les mesures A_1 effectuées avant les opérations de contrôle courant et les mesures A_2 effectuées après, des différences systématiques.

Nous allons exposer brièvement la méthode utilisée sans chercher à justifier les différentes étapes de l'analyse.

B.82 Au lieu de considérer dans leur ensemble les 10 mesures journalières sur chaque cale, on les divise en deux séries de 5 mesures qui ne correspondent pas nécessairement à la même moyenne vraie.

La dispersion des observations autour de ces moyennes vraies définit une erreur dont la

variance v_e plus faible que V peut s'estimer au moyen des k = 40 séries de 5 mesures par la formule (9) qui s'écrit ici :

$$\boxed{s_e^2 = \frac{\Sigma x^2 - \Sigma Z^2/5}{200 - 40}} \qquad (19)$$

Z désignant l'une quelconque des sommes de 5 mesures figurant au tableau III.

Dans la suite, nous appellerons v_e « erreur corrigée » pour éviter toute confusion avec V.

B.83 On est alors conduit à décomposer la somme de carrés ($\Sigma x^2 - \Sigma Y^2/10$) correspondant à l'erreur totale de mesure V en deux portions ;

($\Sigma x^2 - \Sigma Z^2/5$) qui correspond à l'erreur corrigée v_e formule (19), et

($\Sigma Z^2/5 - \Sigma Y^2/10$) qui provient des différences observées sur chaque cale entre les Z d'un même jour et qui disparaîtrait si les différences étaient toutes nulles.

On remarquera que ces différences peuvent avoir pour unique origine l'erreur (corrigée) affectant les sommes Z ou, au contraire, traduire l'existence d'une différence systématique.

Le tableau de décomposition suivant répond à la question :

Source de variation	Somme de carrés		ϕ	Quotients
Entre Z d'un même (C_i J_j) .	$\Sigma Z^2/5 - \Sigma Y^2/10$	= 38,20	20	1,910
Erreur corrigée (v_e) . . .	$\Sigma x^2 - \Sigma Z^2/5$	= 182,20	160	s_e^2 = 1,139
ERREUR TOTALE . .	$\Sigma x^2 - \Sigma Y^2/10$	= 220,40	180	

Si les différences systématiques cherchées sont inexistantes, le quotient de la première ligne constitue (nous l'admettrons) une estimation de v_e comparable à s_e^2. En fait, on trouve un rapport $F = \frac{1.910}{1,139} = 1,677$ qui dépasse $F_{0,05}\left[20 - 160\right] = 1,64$. Ce qui indique vraisemblablement pour chaque cale une petite différence systématique entre les mesures A_1 et A_2 d'un même jour.

B.84 Deux cas sont alors possibles :

1) Ou bien la différence systématique est de même sens et sensiblement de même importance quelle que soit la cale ou la journée considérée.

La différence $A_2 - A_1 = 238 - 204 = 34$ entre la somme des 100 observations (A_1) et (A_2) est alors « significative », c'est-à-dire qu'elle indique que les mesures effectuées en fin d'essai sont systématiquement plus fortes que celles effectuées au début.

2) Ou bien cette différence varie en grandeur et en sens suivant la cale ou la journée considérée.

Si (Y) désigne alors une série quelconque de 10 mesures choisies en fixant arbitrairement la cale ou la journée, on peut dire, en employant la terminologie précédemment (B 72) adoptée, qu'il y a interaction vraie entre (Y) et (A).

Ce cas n'exclut d'ailleurs pas la possibilité que les essais (A_2) soient en moyenne systématiquement supérieurs aux essais (A_1).

B.85 Pour différencier ces deux cas, on peut poursuivre la décomposition amorcée plus haut en subdivisant ($\Sigma Z^2/5 - \Sigma Y^2/10$) de la première ligne en deux portions :

$$\left(\frac{\Sigma A^2}{100} - \frac{T^2}{200}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\Sigma Z^2}{5} - \frac{\Sigma Y^2}{10} - \frac{\Sigma A^2}{100} + \frac{T^2}{200}\right)$$

La première somme correspond à la différence moyenne entre (A_1) et (A_2) (cf première ligne du tableau, chap. B 6).

La seconde somme est analogue, aux notations près, à la composante d'interaction dont il a été question au chapitre précédent (§ B 71 et suivants). On peut la désigner par (Y × A) et lui donner une interprétation analogue à celle de (C × J). Divisée par le nombre ϕ de degrés de liberté correspondants (ici ϕ = 19, puisqu'il y a 20 séries (Y)) elle fournit un quotient (cf formule 20) qui permet (comme au § B 75) de reconnaître l'existence éventuelle d'une interaction vraie entre (Y) et (A).

B.86 Le tableau complet de décomposition se présente alors de la façon suivante :

Sources de variation	Somme de carrés		ϕ	Quotient
(C) entre cales	$\Sigma C^2/100 - T^2/200$	$= 172{,}98$	1	172,980
(J) entre jours	$\Sigma J^2/20 - T^2/200$	$= 173{,}18$	9	19,242
(C × J) interaction entre C et J	$\Sigma Y^2/10 - \Sigma J^2/20 - \Sigma C^2/100 + \frac{T^2}{200}$	$= 12{,}62$	9	1,402
Erreur V: (A) entre A_1 et A_2	$\Sigma A^2/100 - T^2/200$	$= 5{,}78$	1	5,780
Erreur V: (Y × A) interaction entre Y et A	$\Sigma Z^2/5 - \Sigma Y^2/10 - \Sigma A^2/100 + \frac{T^2}{200}$	$= 32{,}42$	19	1,706
Erreur V: Erreur corrigée (v_e) . .	$\Sigma x^2 - \Sigma Z^2/5$	$= 182{,}20$	160	$s_e^2 = 1{,}139$
TOTAL	$\Sigma x^2 - T^2/200$	$= 579{,}18$	199	

En comparant les 4e et 5e lignes à la dernière, on trouve respectivement F = 5,07 et F = 1,50.

Seul le premier rapport dépasse les limites assignées par les tables de SNEDECOR

$$(F_{0,05} [1 - 160] = 3{,}90)$$

On peut donc conclure :

1) que la différence systématique entre les mesures (A_1) et (A_2) est indépendante du jour ou de la cale ;

2) que les essais (A_2) sont légèrement mais systématiquement plus forts [1] que les essais (A_1).

Bien que cette différence soit faible, il faudrait en toute rigueur en tenir compte pour reétudier l'existence des variations systématiques (C) (J) (C × J), c'est-à-dire que les quotients correspondants devraient être comparés à s_e^2 et non s^2.

On vérifiera que les résultats précédemment acquis ne sont pas infirmés.

Pratiquement, la différence systématique entre (A_1) et (A_2) contribue peu à la dispersion des mesures. On peut, en général, confondre V avec v_e.

Toutefois, lorsqu'on désire comparer la dureté de deux plaquettes C_1, C_2, avec le maximum de précision, au moyen de n mesures sur chacune d'elles, les deux séries de mesures doivent se succéder sans interruption.

Il y a même intérêt à effectuer successivement $\frac{n}{2}$ empreintes sur C_1 puis n empreintes sur C_2 et finalement $\frac{n}{2}$ empreintes sur C_1 pour éliminer cette tendance qu'ont les chiffres de dureté à croître au fur et à mesure qu'on poursuit les essais.

B9. — CONCLUSIONS PRATIQUES DE L'ÉTUDE PRÉLIMINAIRE.

B.91 Admettant pour l'instant le caractère général des résultats acquis (voir C_1 pour discussion), on peut formuler ainsi les conclusions essentielles de l'analyse de variance :

I) L'erreur de mesure proprement dite peut être caractérisée par son écart-type

$$\boxed{s_R = 0.277} \quad (\S\, B\, 32)$$

II) A cette erreur s'ajoutent des variations systématiques d'un jour à l'autre qui contribuent pour une part importante à la dispersion des mesures (§B 62).

III) Ces variations affectent de la même façon deux cales quelconques (§ B 75).

(1) Ce résultat constitue sans doute le prolongement d'un phénomène fréquemment observé. Les toutes premières duretés effectuées sur une machine Rockwell après une certaine période de repos (même si le cône est resté en place) sont faibles et doivent être éliminées.

B.92 Pour éliminer des mesures cette dernière cause d'erreur, il suffit, en principe, d'effectuer successivement deux séries de n mesures — l'une sur la plaquette inconnue qui fournit une moyenne R_x — l'autre sur une cale de référence étalonnée qui fournit la moyenne R_0.

On peut alors estimer la différence de dureté vraie — laquelle n'est pas affectée par les variations journalières — par la différence des moyennes $R_x - R_0$.

L'erreur commise sur cette différence a pour écart-type s_D défini par :

$$s_D^2 = \frac{2\, s_R^2}{n} \qquad (20)$$

(d'après les formules (2) et (3)).

Si N_0 est la dureté vraie (normale) de la cale étalon, la « **dureté corrigée** » H définie par

$$H = R_x + (N_0 - R_0) \qquad (21)$$

représente la dureté vraie de la plaquette avec une erreur qui, dans 95 % des cas, n'excède pas[1] :

$$\varepsilon = 1{,}96\, s_D \qquad (22)$$

B.93 En général, le nombre n_1 de déterminations qu'on peut exécuter sur l'échantillon est limité. Pour diminuer s_D on peut alors exécuter sur la cale étalon un plus grand nombre n_0 de déterminations. Il vient alors :

$$s_D = s_R \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_0}} \qquad (20\ \text{bis})$$

et

$$\varepsilon = 1{,}96\, s_R \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_0}} \qquad (22\ \text{bis})$$

On trouvera dans le tableau IV les valeurs de ε pour différentes valeurs de n_1 et n_0. Cette table, basée sur la valeur $s_R = 0{,}277$, s'étend à toute autre valeur par une simple règle de trois.

B.94 La cause essentielle de ces variations journalières ne peut être donnée avec certitude.

Les variations de température semblent contribuer pour une large part (cf Appendice) aux variations de dureté, mais il subsiste une part de variation systématique non expliquée, peut-être en relation avec l'usure des diamants.

Au laboratoire, on peut opérer un contrôle beaucoup plus strict des variations de température, des vibrations, des conditions d'entretien et d'utilisation de l'appareil. On constate alors une diminution considérable des variations entre jours.

A l'atelier, au contraire, ces variations systématiques persistent ainsi que le prouvent des sondages statistiques effectués périodiquement.

(1) Dès que n est supérieur à 5 environ, la distribution des moyennes est suffisamment voisine de celle de Gauss pour que $\varepsilon = 1{,}96\, s_D$ ne soit jamais dépassé par plus de 5 % des erreurs (en valeur absolue).

TABLEAU I

TABLEAU DES DONNÉES INITIALES X

Jours	(Avant) A_1					(Après) A_2						
J_1	1	2	1	0	2	0	0	0	0	2	8	
J_2	2	3	4	2	4	2	2	4	2	4	29	
J_3	0	2	4	4	4	3	4	2	3	4	30	
J_4	2	4	2	1	2	1	1	2	3	0	18	
J_5	2	4	4	4	4	2	2	5	4	3	34	Cale C_1
J_6	4	6	5	4	5	5	5	6	5	6	51	
J_7	4	4	4	2	2	2	4	4	3	4	33	
J_8	4	2	4	3	3	4	4	5	2	1	32	
J_9	2	2	4	4	3	4	5	4	6	3	37	
J_{10}	2	1	6	4	4	5	4	6	6	4	42	
											314	
J_1	2	—2	0	1	0	—1	—1	2	0	1	2	
J_2	1	1	2	2	2	—2	0	2	1	0	9	
J_3	0	0	2	1	0	0	1	2	3	2	11	
J_4	—1	—2	0	—1	0	0	0	1	0	1	—2	
J_5	0	0	2	2	2	1	1	2	2	2	14	Cale C_2
J_6	1	2	2	4	2	2	2	4	3	2	24	
J_7	0	2	2	2	1	1	0	3	3	2	16	
J_8	0	0	2	0	2	2	2	2	2	3	15	
J_9	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	19	
J_{10}	0	0	2	3	2	3	4	2	2	2	20	
											128	

TABLEAU I. — Les chiffres x qui figurent dans ce tableau sont reliés aux duretés ROCKWELL R_c correspondantes par la relation $x = \frac{R_c - 80.}{0,25}$

TABLEAU II

TABLEAU DES Y

J \ C	C_1 (Y')	C_2 (Y'')	J_j	Δ_j
J_1	8	2	10	0,6
J_2	29	9	38	2,0
J_3	30	11	41	1,9
J_4	18	—2	16	2,0
J_5	34	14	48	2,0
J_6	51	24	75	2,7
J_7	33	16	49	1,7
J_8	32	15	47	1,7
J_9	37	19	56	1,8
J_{10}	42	20	62	2,2
	314	128	442	$\overline{\Delta} = 1,86$

Tableau II. — Chaque Y de ce tableau à double entrée est la somme des 10 mesures de dureté effectuées un jour donné sur une cale donnée.

Bien qu'elles n'interviennent pas directement dans les calculs, nous avons fait figurer en face de chaque jour J_j les différences Δ_j correspondantes.

Ces différences, dont il est question au chapitre B 7, s'obtiennent immédiatement en divisant par 10 les différences entre les Y correspondants.

TABLEAU III

TABLEAU DES Z

Cales et jours	Y \ A	A_1	A_2		Cales et jours	Y \ A	A_1	A_2	
(C_1, J_1)	Y_{11}	6	2	Cale C_1	(C_2, J_1)	Y_{21}	1	1	Cale C_2
(C_1, J_2)	Y_{12}	15	14		(C_2, J_2)	Y_{22}	8	1	
(C_1, J_3)	Y_{13}	14	16		(C_2, J_3)	Y_{23}	3	8	
(C_1, J_4)	Y_{14}	11	7		(C_2, J_4)	Y_{24}	—4	2	
(C_1, J_5)	Y_{15}	18	16		(C_2, J_5)	Y_{25}	6	8	
(C_1, J_6)	Y_{16}	24	27		(C_2, J_6)	Y_{26}	11	13	
(C_1, J_7)	Y_{17}	16	17		(C_2, J_7)	Y_{27}	7	9	
(C_1, J_8)	Y_{18}	16	16		(C_2, J_8)	Y_{28}	4	11	
(C_1, J_9)	Y_{19}	15	22		(C_2, J_9)	Y_{29}	9	10	
(C_1, J_{10})	Y_{110}	17	25		(C_2, J_{10})	Y_{210}	7	13	

Tableau III. — Chacune des valeurs de Z qui figure dans ce tableau représente la somme d'un groupe de 5 mesures effectué soit au début (A_1) soit à la fin (A_2) sur une cale donnée C_i, un jour donné J_j.

Il s'agit, en réalité, d'un tableau à 3 entrées, mais nous avons groupé les deux entrées (C_i, J_j) en une seule Y_{ij}.

TABLEAU IV

VALEUR DE L'ERREUR LIMITE A 95 %

n_1 \ n_0	1	4	5	6	7	8	9	10	50	∞
1	0.766	0.605	0.593	0.585	0.579	0.574	0.571	0.568	0.547	0.542
2	0.664	0.470	0.454	0.443	0.438	0.428	0.423	0.419	0.390	0.383
3	0.626	0.413	0.395	0.383	0.374	0.367	0.361	0.357	0.322	0.313
4	0.605	0.383	0.363	0.350	0.340	0.332	0.326	0.325	0.282	0.271
5	0.593	0.363	0.343	0.328	0.317	0.309	0.302	0.297	0.254	0.242
6	0.585	0.350	0.328	0.313	0.302	0.293	0.286	0.280	0.234	0.221
7	0.579	0.340	0.317	0.302	0.285	0.281	0.273	0.267	0.218	0.204
8	0.574	0.332	0.309	0.293	0.281	0.271	0.264	0.256	0.206	0.191
9	0.571	0.326	0.302	0.286	0.273	0.264	0.255	0.248	0.196	0.180
10	0.568	0.325	0.297	0.280	0.267	0.256	0.248	0.242	0.188	0.171
50	0.547	0.282	0.254	0.234	0.218	0.206	0.196	0.188	0.109	0.076

Tableau IV. — L'erreur limite à 95 % qui figure dans ce tableau a été calculée sur la base de 0,277 pt ROCKWELL, pour une valeur de s_R.

Pour une valeur s_R différente de 0,277, il suffit de multiplier les résultats par le rapport (s_R/0,277)

C. APPLICATION AUX BILLAGES DE CONTROLE

CI. — DISCUSSION DES CONCLUSIONS PRÉCÉDENTES.

C.11 L'étude préliminaire était limitée à deux cales C_1 et C_2 dont les duretés avaient été mesurées au moyen d'un pénétrateur fraîchement retaillé (repère 50949 — C 2).

Il y a donc lieu de rechercher dans quelle mesure les conclusions essentielles (I, II et III) restent valides pour une cale et un diamant quelconques.

C.12 Pour estimer s_R , nous avons admis implicitement que l'erreur de mesure était la même sur les deux cales.

Or, cette erreur ne provient pas seulement de la dispersion propre à l'appareil, elle dépend dans une certaine mesure de l'hétérogénéité qui peut varier d'une cale à l'autre.

Si l'on estime séparément les deux variances d'erreur sur C_1 et C_2, on trouve respectivement 1,342 et 1,106.

Ces deux estimations basées sur 90 degrés de liberté ne diffèrent pas significativement (F = 1,213). Il n'y a donc pas lieu, dans ce cas particulier, de rejeter l'hypothèse d'identité des variances d'erreur.

Dans le cas général, si l'on change de cale ou (à plus forte raison) de diamant, on doit procéder, en principe, à une nouvelle estimation de s_R.

C.13 Les variations systématiques d'un jour à l'autre n'ont pas reçu d'explications complètement satisfaisantes.

Bien qu'elles aient persisté lors de sondages ultérieurs, ces variations pourraient disparaître subitement par suite d'améliorations fortuites apportées à la technique des essais.

En attendant qu'une telle amélioration se produise et soit confirmée statistiquement, il paraît préférable de maintenir la méthode de mesure par comparaison avec une cale étalon (§ B 92).

Cette méthode, dont le seul inconvénient est le nombre accru de déterminations, met en garde contre tous les déréglages accidentels qui risquent d'affecter irrémédiablement (et parfois sans aver-

tissement) les mesures ultérieures. Elle élimine en outre l'équation personnelle, donc permet de changer éventuellement d'opérateur.

C.14 Le fait que la différence de dureté entre les deux cales C_1 et C_2 ne soit pas affectée par le facteur journalier est une circonstance favorable puisqu'on a basé dessus une méthode de correction (§ B 92). Mais aucune considération physique ne permet de l'expliquer, sinon la faible différence de dureté entre les deux cales.

Dans ces conditions, la validité de la méthode ne peut être garantie que pour deux plaquettes de duretés suffisamment voisines.

C2. — MESURE PRATIQUE DE LA DURETÉ CORRIGÉE.

C.21 Pour appliquer aux mesures courantes la méthode de comparaison schématisée au § B 92, il faut disposer d'un **étalon invariable**, dont la dureté est voisine de celle des plaquettes à biller.

Comme la dureté des plaquettes varie relativement peu d'une nuance à l'autre, on pourrait, à la rigueur, se contenter d'un étalon de dureté 80 ROCKWELL C environ sans gros risque d'erreur.

Par contre, la nécessité d'effectuer sur cette cale étalon un grand nombre d'empreintes la mettrait rapidement hors d'usage.

Après rectification, il serait impossible de connaître la nouvelle dureté de la cale et par conséquent de continuer le contrôle de dureté dans des conditions comparables.

C.22 Pour lever cette difficulté, on doit disposer de plusieurs cales étalons.

a) **une cale étalon primaire** dont la valeur nominale est vraie par définition et qui sert exclusivement à la constitution de cales étalons secondaires ;

b) **plusieurs cales étalons secondaires.** Ce sont, par définition, des cales étalonnées par rapport à l'étalon primaire et susceptibles d'être utilisées avec une précision comparable (s_R étant du même ordre et l'erreur d'étalonnage négligeable) ;

c) **des cales de travail** étalonnées par rapport aux cales secondaires. Elles peuvent servir de cales de comparaison pour la plupart des mesures courantes.

Leur usage épargne les cales secondaires et facilite ainsi la conservation de l'étalon primaire.

C3. — CRÉATION D'UN ÉTALON PRIMAIRE.

C.31 Nous allons indiquer, à titre d'exemple, la façon dont fut constitué l'étalon primaire de l'atelier de contrôle.

A cette époque, l'atelier possédait deux cales pouvant servir éventuellement de cales étalons.

1) Une cale S A 950, réputée de 79,5 ROCKWELL C qui avait déjà servi de référence pour les mesures courantes ;

2) Une cale T A 999 qui n'avait jamais servi depuis sa dernière rectification.

C.32 On a procédé alors à la comparaison de ces deux cales au moyen de 10 mesures sur chaque cale pendant 5 jours consécutifs.

Une analyse de la variance similaire à celle de l'étude préliminaire (§ B 61) a donné les résultats suivants :

Sources de variation	Sommes de carrés		ϕ	Quotients
(C) entre cales	$\Sigma C^2/50 - T^2/100$	= 96,04	1	96,04
(J) entre jours	$\Sigma J^2/20 - T^2/100$	= 7,44	4	1,86
(C × J) interaction	Par différence	= 0,76	4	0,19
Erreur de mesure	$\Sigma x^2 - \Sigma Y^2/10$	= 73	90	0,81
TOTAL	$\Sigma x^2 - T^2/100$	= 177,24	99	

A partir de ce tableau, on retrouve essentiellement les mêmes résultats que précédemment. La différence entre jours apparaît moins significative que dans l'étude préliminaire, mais cela provient vraisemblablement du nombre trop faible de degrés de liberté des estimations.

L'erreur de mesure a pour estimation $s^2 = 0.81$, ce qui correspond à $s_R = 0{,}225$ et pour $n_1 = n_2 = 50$ à $\varepsilon = 0{,}088$ (tableau IV).

La différence entre les moyennes des deux cales — soit 0,490 point ROCKWELL — représente donc la différence (S A 950) — (T A 999) entre les duretés vraies avec une erreur inférieure à $\varepsilon = 0{,}088$ dans 95 % des cas.

$$\boxed{(S\,A\,950) - (T\,A\,999) = 0{,}490 \pm 0{,}088} \qquad (23)$$

C.33 A la suite de ces mesures, on a décidé d'adopter pour étalon primaire la cale T A 999 avec la valeur nominale :

$$\boxed{(T\,A\,999) = 79{,}99} \qquad (24)$$

Cette valeur a été choisie de façon qu'on ait :

$$\boxed{(S\,A\,950) = 79{,}50 \pm 0{,}088} \qquad (25)$$

Grâce à cette dernière relation, les anciennes mesures qui utilisaient (S A 950) avec la valeur nominale 79,5 restent en concordance avec les nouvelles. L'erreur systématique d'étalonnage ε est effectivement négligeable en pratique.

C4. — CONSTITUTION D'ÉTALONS SECONDAIRES.

C.41 D'après ce qui a été dit ci-dessus, une cale quelconque peut servir d'étalon secondaire :

1) Si elle conduit pour un même diamant à des valeurs de s_R comparables à celles obtenues sur l'étalon primaire ;

2) Si elle a été étalonnée sur la cale étalon primaire avec un nombre suffisant de mesures pour que l'erreur d'étalonnage ε soit négligeable (voisine de $\varepsilon = 0.01$).

La cale S A 950 satisfaisait à ces conditions, mais cet étalon secondaire qui avait beaucoup servi dût être envoyé à la rectification immédiatement après étalonnage.

Une fois rectifiée, cette cale qui portait le nouveau repère S B, était susceptible de constituer, après étalonnage, un nouvel étalon secondaire.

C.42 Pour épargner au maximum l'étalon primaire T A 999, on a procédé à l'étalonnage simultané de 3 étalons secondaires : S B, V A, W A, au moyen de 10 mesures journalières sur S B, V A, W A et T A 999, pendant 5 jours.

Les résultats de ces mesures ont été les suivants :

a) l'écart type s_R caractérisant l'erreur de mesure en points ROCKWELL est sensiblement le même pour les 4 cales, comme le montre le tableau ci-joint :

	S B	V A	W A	T A 999
s^2 (unités de x) . . .	1,537	1,135	1,611	1,711
s_R points ROCKWELL	0,310	0,266	0,317	0,327

Ces estimations ne diffèrent pas significativement, c'est-à-dire que les variations sont attribuables à l'imprécision de ces estimations et non à des différences de variances vraies V.

On peut prendre pour V l'estimation moyenne (basée sur 180 degrés de liberté) :

$$s^2 = 1{,}498 \quad \text{soit} \quad \boxed{s_R = 0{,}306} \qquad (26)$$

On observera que cette estimation relativement précise ($\phi = 180$) est numériquement voisine de celle obtenue au cours de l'étude préliminaire ($s_R = 0{,}277$), bien que des pénétrateurs différents aient été utilisés dans les deux cas.

b) L'erreur ε correspondant à $s_R \doteq 0{,}306$ et $n_1 = n_2 = 50$ a pour valeur :

$$\boxed{\varepsilon = 0{,}120}$$

ε représente la limite à 95 % de l'erreur d'étalonnage sur S B, V A et W A. Elle est acceptable.

Comme précédemment, on peut écrire (cf formules 27 et 28) :

$$(S\ B) = 79{,}200 \pm 0{,}12$$
$$(V\ A) = 79{,}015 \pm 0{,}12$$
$$(W\ A) = 78{,}735 \pm 0{,}15$$

Ces 3 cales peuvent alors être utilisées comme étalons secondaires avec pour désignations définitives :

S B 920 V A 902 W A 874

qui rappellent les valeurs d'étalonnage.

D. RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS GÉNÉRALES

— Lorsqu'il s'agit de contrôler la régularité d'un procédé métallurgique, on ne doit pas considérer uniquement les caractéristiques essentielles d'utilisation du produit fini.

On doit mettre en œuvre aux diverses étapes de la fabrication le maximum de moyens sensibles et tenir comme significative, donc justiciable d'une enquête, toute variation anormale d'une propriété mécanique ou physique.

— Au lieu de réserver notamment les mesures précises de dureté pour certains contrôles de réception où cet essai est spécifié, on peut souvent les utiliser tant aux étapes intermédiaires que finales de la fabrication comme moyens de contrôle complémentaires de la régularité.

— A ce titre, le contrôle de dureté est d'autant plus efficace qu'il est plus précis.

Nous avons donc cherché à **caractériser et améliorer la précision** des mesures sans nuire à la rapidité ou à la simplicité du test.

— L'étude a été entreprise dans des conditions assez particulières puisqu'elle était destinée au contrôle d'un atelier de frittage.

La dureté élevée des plaquettes amenait à utiliser pour la mesure une machine ROCKWELL munie d'un pénétrateur robuste SODIAM, cependant que la faible variabilité de la production exigeait une précision accrue.

— Les conclusions auxquelles nous sommes arrivés n'ont pas, de ce fait, une valeur absolument générale, mais la méthode statistique utilisée pour étudier le procédé de mesure reste applicable chaque fois qu'on désire mettre en œuvre un contrôle précis des duretés.

La précision recherchée dépendra évidemment de la variabilité de la production, relativement aux duretés et, dans certains cas, l'étude préliminaire de la mesure pourra être considérablement réduite.

Dans le cas particulier étudié, l'analyse de la variance qui portait sur 200 mesures d'essais répartis sur 2 cales et 10 jours a permis de tirer les conclusions suivantes :

1) Il existe dans les mesures une source de dispersion irréductible intimement liée à l'imperfection de l'ensemble machine-opérateur et à l'hétérogénéité des échantillons.

Dans les conditions précises de l'expérience, **cette erreur de mesure proprement dite** peut être caractérisée par son écart-type :

$$\boxed{s_R = 0{,}277}$$

exprimé en points ROCKWELL.

Pour une cale et un diamant quelconques, on peut tabler sur la valeur approximative $s_R \# 0{,}3$.

2) A cette erreur, s'ajoutent des **variations systématiques d'un jour à l'autre** qui contribuent pour une part importante à la dispersion des mesures.

On peut attribuer, en partie, ces variations systématiques à des variations de température (voir appendice), sans toutefois pouvoir expliquer le mécanisme de cette influence. Il existe d'ailleurs d'autres causes de variations systématiques entre jours pour lesquelles on est réduit aux hypothèses.

3) Les variations systématiques entre jours affectent de la même façon deux cales quelconques, ce qui permet d'**éliminer** ces variations des mesures courantes en effectuant alternativement l'essai de dureté sur l'échantillon inconnu et une cale de référence.

Une telle méthode exige la conservation d'étalons reproductibles de dureté.

Nous avons vu dans la partie C, comment on pouvait constituer, utiliser et remplacer de tels étalons sans nuire à l'exactitude des mesures.

On peut alors déterminer la dureté d'un échantillon inconnu avec une précision aussi élevée qu'on le désire à condition de pouvoir effectuer sur l'échantillon et la cale de référence un nombre suffisamment grand de mesures.

Si R_0 désigne la moyenne des n_0 mesures effectuées sur une cale étalon de dureté nominale N_0 et si R_x désigne la moyenne des n_1 mesures effectuées sur l'échantillon, la dureté corrigée H définie par :

$$\boxed{H = R_x + (N_0 - R_0)}$$

représente la dureté vraie de l'échantillon avec une erreur qui, dans 95 % des cas, ne dépassera pas la valeur ε définie par :

$$\boxed{\varepsilon = 1{,}96\, s_R \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_0}}} \qquad \text{(22 bis)}$$

L'application correcte de cette formule exige, en principe, qu'on réestime l'écart-type s_R chaque fois qu'on change de cale étalon ou de diamant ; c'est ce qui est effectivement réalisé lorsqu'on utilise la formule(22 bis) à la détermination de l'erreur d'étalonnage.

Pour les mesures effectuées sur des plaquettes de fabrication courante, plus ou moins bien rectifiées, la valeur approximative $s_R = 0{,}3$ permet d'obtenir un ordre de grandeur correct de l'erreur ε lorsqu'on ne veut pas se livrer à l'estimation rigoureuse de s_R au moyen de la formule (9).

APPENDICE
CAUSES DES VARIATIONS ENTRE JOURS

Nous supposerons connue dans cet exposé, la théorie de la régression :

[R 4] [R 5] [R 6] [R 7] [R 8]

I. — INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE.

On a vu qu'il était possible d'éliminer les variations entre jours en effectuant des mesures comparatives avec une cale étalon. Néanmoins, il paraissait intéressant de connaître les causes de ces variations et nous avons étudié, en premier lieu, l'influence éventuelle de la température.

Le tableau ci-dessous donne, chaque jour, la somme J_j des 20 observations et la température extérieure t correspondante :

	J	t degrés
J_1	10	25
J_2	38	26
J_3	41	24
J_4	16	25
J_5	48	19.5
J_6	75	20.5
J_7	49	20.5
J_8	47	22
J_9	56	20
J_{10}	62	19.5

Pour simplifier les calculs, on a utilisé pour variables auxiliaires :

$$y = J - 40 \quad \text{et} \quad x = t - 20$$

Il vient alors :

$$\Sigma (J - \bar{J})(t - \bar{t}) = \Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y}) = 349.4$$

$$\Sigma (t - \bar{t})^2 = \Sigma (x - \bar{x})^2 = 58.6$$

$$\Sigma (J - \bar{J})^2 = \Sigma (y - \bar{y})^2 = 3463.6$$

$\bar{J}$ et $\bar{t}$ désignant respectivement les moyennes arithmétiques des 10 valeurs de J et des 10 températures.

Au moyen de ces résultats on peut estimer l'influence (éventuelle) de la température.

Elle est caractérisée par le coefficient angulaire :

$b = \frac{\Sigma (J - \bar{J})(t - \bar{t})}{\Sigma (t - \bar{t})^2} = 5{,}96$; c'est-à-dire que la dureté moyenne $\frac{J}{20} \times 0{,}25$ apparaît abaissée de $\frac{b \times 0{,}25}{20}$ soit 0,075 point, pour chaque augmentation de température de 1 degré.

Pour voir si cet effet est réel ou seulement attribuable aux erreurs de mesures, on est amené au tableau de décomposition de la variance suivant :

Variations	Somme de carrés		ϕ	Quotients
Due à la température . .	$b^2 \Sigma (t - \bar{t})^2$	= 2083,28259	1	2083,283
Non explicable par la température	$\Sigma (J - \bar{J})^2 - b^2 \Sigma (t - \bar{t})^2$	= 1280,31741	8	172,540
Variation totale entre jours.	$\Sigma (J - \bar{J})^2$	= 3463,60000	9	

En comparant les deux premiers quotients, on trouve un rapport :

F = 12,074 significatif à 99 %

ce qui indique une influence très nette de la température.

Pour corriger cette influence, on peut utiliser le coefficient b précédent, c'est-à-dire la formule :

$$\boxed{\Delta R_c = 0{,}075 \ \Delta t}$$

mais la précision du coefficient est faible, l'estimation n'étant basée que sur 8 degrés de liberté.

II. — AUTRES FACTEURS INFLUENTS.

Le quotient de la 2e ligne représente une variation entre jours qu'on ne peut expliquer par la température seule. Il reste à voir si cette variation peut être attribuée uniquement aux erreurs de mesures V.

Pour cela il faut revenir au tableau de décomposition générale de la partie (B).

La première ligne (J) représentait des variations totales entre jours ; la somme des carrés pouvait s'écrire :

$$\frac{\Sigma (J_j)^2}{100} - \frac{T^2}{200} = \frac{\Sigma (J - \bar{J})^2}{20}$$

qui est au facteur 20 près la somme des carrés de la dernière ligne du présent tableau.

On peut donc, au moyen des deux tableaux, obtenir un nouveau tableau de décomposition :

			ϕ	
(J) Entre jours	Influence de la température	104.16	1	104.160
	Autres influences.	69.02	8	8.628
(C) Entre cales		172.98	1	172.980
(C × J) Interaction . .		12.62	9	1.402
(A)	Erreur de mesure V	220.40	180	1.224
(Y × A)				
Erreur corrigée v_e . .				
TOTAL		579.18	199	

Si l'on compare le quotient de la 2e ligne avec l'estimation de la dernière ligne (erreur de mesure), on trouve un rapport F = 7,049 significatif à plus de 99,9 %.

Ce qui montre qu'il existe certainement en dehors de la température d'autres facteurs susceptibles de varier d'un jour à l'autre.

Parmi ces facteurs, il est probable que l'usure progressive du diamant joue un rôle important.

En ce qui concerne l'effet certain de la température, on ne peut donner une explication physique complète, mais il est possible que les variations de viscosité de l'huile des amortisseurs contribuent à expliquer l'influence de la température.

BIBLIOGRAPHIE

R 1 — E. H. SEALY : A first guide to Quality Control (His Majesty's Stationery office), 1945, London 1945.

R 2 — E. L. GRANT : Statistical Quality Control (Mac Graw Hill), New-York, 1946.

R 3 — H. HOTELLING : Selected Techniques of Statistical Analysis (Mac Graw Hill), New-York, 1947, p. 111-182.

R 4 — J. MOTHES : Technique Moderne de Contrôle des Fabrications I. (Dunod), Paris, 1952.

R 5 — G. DARMOIS : Statistique Mathématique (Doin), Paris, 1928.

R 6 — M. G. KENDALL : The Advanced Theory of Statistics I et II (Charles Griffin et C°), London, 1948.

R 7 — H. A. FREEMAN : Industrial Statistics (John Wiley et Sons), New-York, 1947.

R 8 — O. L. DAVIES : Statistical Methods in Research and Production (Oliver et Boyd), London, 1949.

R 9 — A. VESSEREAU : La Statistique (Collection « Que sais-je »), Paris, 1947.

R 10 — A. G. LAURENT : La Méthode Statistique dans l'Industrie (Collection « Que sais-je »), Paris, 1950.

R 11 — G. DARMOIS et F. CHARTIER : Leçons sur l'Estimation Statistique (Imprimerie Nationale), Paris, 1947.

R 12 — R. A. FISHER : Les Méthodes Statistiques adaptées à la Recherche scientifique (Imprimerie Presses Universitaires), Paris, 1947.

R 13 — FISHER et YATES : Statistical Tables for Biological, Agricultural and Médical Research (Oliver et Boyd), London 1949.

R 14 — A. VESSEREAU : Méthodes Statistiques en biologie et en agronomie (J. B. Baillière et Fils), Paris, 1948.

R 15 — SNEDECOR : Calculation and interpretation of analysis of variance and covariance (Collegiate Press), Iowa, 1934.