

CARLO GAVARINI

**Applications de la programmation mathématique
à l'analyse limite des structures**

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 7, n° V3 (1973), p. 55-68

http://www.numdam.org/item?id=RO_1973__7_3_55_0

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPLICATIONS DE LA PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE A L'ANALYSE LIMITE DES STRUCTURES

par Carlo GAVARINI ⁽¹⁾

Résumé. — On indique comment les problèmes d'analyse limite (ou calcul plastique) des structures peuvent, moyennant discrétisation préalable, se poser comme problèmes de Programmation Mathématique. Presque tous les secteurs de la P.M. ayant été utilisés, on donne ici un aperçu des applications de la Programmation Linéaire, Non linéaire, Paramétrique, Stochastique; en ce qui concerne cette dernière on a aussi bien des problèmes de distribution que des problèmes de décision (projet optimal); on entre enfin dans le domaine de la science des contrôles quand on considère des structures soumises à des processus stochastiques.

INTRODUCTION

Pendant que la *Programmation Mathématique* (P.M.), stimulée surtout par les problèmes économiques, se développait de la façon remarquable que l'on sait, l'*Analyse limite* (A.L.) des structures, ou calcul à la rupture des constructions, se développait de façon parallèle et tout à fait indépendante. La période est à peu près la même car c'est à partir de 1950, grâce aussi au développement dans un troisième domaine, celui des *Ordinateurs*, que l'A.L. a fait des progrès décisifs. Les ingénieurs ont mis toute leur habilité à développer des méthodes de calcul spécifiques sans se rendre compte que les problèmes mathématiques qu'ils affrontaient étaient les mêmes que ceux dont s'occupaient mathématiciens et économistes. Il y a bien eu quelques communications à ce propos [1], [2], [3] mais il a fallu attendre environ une dizaine d'années après la publication de la méthode du simplexe [4] pour voir les premières applications systématiques de la *Programmation linéaire* (P.L.) au calcul à la rupture [5 jusqu'à 11]. Tandis que ces premières applications essayaient surtout d'exploiter les avantages numériques du rapprochement, on s'apercevait ensuite qu'il y avait une correspondance très intime entre propriétés physiques et mathématiques; notamment

(1) L'Aquila (Italie), Istituto di Scienza delle Costruzioni Facoltà di Ingegneria.

les deux aspects, statique et cinématique, de l'A.L., apparaissaient reliés par le *théorème de dualité*, tant en P.L. qu'en *Programmation non linéaire* (P.N.L.) [3], [12 jusqu'à 15], [16].

Les difficultés initiales s'expliquent facilement, les ingénieurs étant depuis longtemps habitués à traiter les problèmes d'élasticité, qui comportent des équations, tandis que les problèmes d'A.L. comportent, comme la P.M., des inéquations.

Après ces débuts assez lents les applications se sont développées rapidement et tous les secteurs de la P.M. ont été exploités. La *Programmation Quadratique* (P.Q.) est intervenue dans la théorie de l'élasto-plasticité [17 jusqu'à 24], la *Programmation Dynamique* (P.D.) et la *Programmation Entière* (P.E.) ont été utilisées pour le projet optimal limite [25], [26], la *Programmation Paramétrique* (P.P.) a permis d'encadrer l'A.L. des structures dont le comportement dépend de plusieurs paramètres [27], la *Programmation Stochastique* a été invoquée pour l'analyse limite probabiliste, quand les données du problème ont un caractère aléatoire [28 jusqu'à 32].

Nous allons maintenant essayer de donner un aperçu de quelques unes des applications indiquées ci-dessus, sans entrer dans les détails techniques qui ne sauraient intéresser les lecteurs habituels de cette Revue. Il est toutefois nécessaire de donner quelques définitions indispensables.

I. QUELQUES DÉFINITIONS

Une structure est soumise à des *forces*, réparties ou concentrées. Ces forces provoquent à l'intérieur des corps constituant la structure des *efforts*, représentés par des fonctions. D'habitude on considère les structures comme des *systèmes élastiques linéaires*; on a alors des déformations élastiques et des déplacements qui dépendent des forces appliquées par des relations linéaires. L'A.L. abandonne l'hypothèse d'élasticité et considère la structure comme *rigide-plastique*, chaque élément étant ou parfaitement rigide ou parfaitement plastique; dans le premier cas la déformation est nulle, dans le deuxième cas il y a une déformation quelconque, associée à un effort déterminé : la limite plastique. Cette déformation plastique, indéterminée si on considère l'élément isolé, devient déterminée en certaines circonstances, grâce à des conditions de compatibilité géométrique.

Sauf des cas particuliers (structures en treillis) tout problème structurel se pose dans le *continu*. Pour appliquer la P.M. il faut tout d'abord *discrétiser* le problème; cela se fait plus ou moins facilement et de différentes façons; la méthode qui aujourd'hui est considérée la meilleure est celle des *éléments finis* qui opère en discrétisant *a priori* la structure. On se réduit de cette façon à une description discrète des données et des résultats, au moyen de vecteurs et matrices; on aura donc un vecteur des forces extérieures f , un vecteur des

efforts intérieurs s , un vecteur des déformations plastiques e (associé à s , donc du même ordre).

Nous avons parlé de limite plastique; plus exactement la plasticité impose au vecteur des efforts des limitations, en général non linéaires; si on linéarise ces limitations on obtient un système d'inéquations du type :

$$Ds \leq b; \quad (1)$$

la matrice D et le vecteur b sont des données du problème, étant donnée la structure.

Les conditions d'équilibre (statique) de la structure permettent d'exprimer les efforts de la façon suivante :

$$s = S_0 f + Cx; \quad (2)$$

S_0 et C sont des matrices données tandis que x est un vecteur d'inconnues, les *inconnues hyperstatiques*. C et x disparaissent si la structure est isostatique mais dans ce cas le problème de l'analyse limite devient banal.

Nous avons parlé de déformations plastiques indéterminées dans l'élément isolé; plus exactement le vecteur e peut s'exprimer de la façon suivante :

$$e = D^T u, \quad (3)$$

D étant la même matrice qui figure dans (1) et u étant un vecteur, *a priori* inconnu, des paramètres de la déformation plastique. La présence de D transposé dans (3) exprime une propriété de *normalité* des déformations plastiques par rapport au domaine limite des efforts défini par (1), quand on superpose les deux espaces, de s et de e (1). Cette propriété se perfectionne quand on précise que toute composante de u ne peut être différente de zéro que si l'inéquation correspondante dans (1) est satisfaite comme équation; en termes analytiques cela peut s'écrire, en indiquant par U la matrice diagonale associée à u , de la façon suivante :

$$(Ds - b)^T U = 0. \quad (4)$$

II. APPLICATIONS DE LA PROGRAMMATION LINEAIRE

On considère une structure soumise à un système de forces dépendant d'un paramètre $\mu : \mu f$; on se demande quelle est la limite supérieure de μ : c'est le problème classique du calcul à la rupture qui, grâce aux définitions données, se pose immédiatement comme un problème de P.L. En effet il suffit de substi-

(1) Il s'agit de normale extérieure : $u \geq 0$.

tuer (2) dans (1) et imposer, d'après le *théorème statique* de l'A.L., la condition de maximum pour μ , pour obtenir le *Programme linéaire* suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{D}\mathbf{s}_0\mathbf{f}\mu + \mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ \mu = \max. \end{cases} \quad \begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix}$$

Dans ce programme les inconnues sont μ et $\mathbf{x}$ et la fonction économique se réduit à une inconnue.

Étant ainsi réduit à un problème de P.L. le calcul à la rupture peut exploiter les algorithmes et les codes de cette discipline, en particulier la méthode du simplexe.

Mais l'état limite ne présente pas seulement l'aspect statique; il y a aussi un aspect cinématique, régi par le deuxième théorème fondamental : le *T. cinématique*. En effet à la rupture des déformations plastiques sont présentes et telles qu'il se forme un mécanisme à un degré de liberté : le *mécanisme de rupture* : la déformation du mécanisme est définie à un facteur près. Le *T. cinématique* affirme que parmi tous les mécanismes possibles (à chacun desquels on peut associer, par exemple grâce au principe des travaux virtuels, une valeur μ) le mécanisme de rupture réel est celui qui fournit la plus petite valeur de μ . On peut donc se rendre compte facilement que ce théorème suggère une autre méthode de calcul à la rupture : la méthode cinématique, qui se pose en concurrence avec la méthode statique que nous avons ci-dessus réduite à un problème de P.L.

Et bien passons maintenant au *dual* du programme (5) (6), qui s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{f}^T \mathbf{S}_0^T \mathbf{D}^T \mathbf{u} = 1, \\ \mathbf{C}^T \mathbf{D}^T \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u} \geq 0, \\ \mathbf{b}^T \mathbf{u} = \min. \end{cases} \quad \begin{matrix} (7) \\ (8) \\ (9) \\ (10) \end{matrix}$$

En examinant ce programme on s'aperçoit assez facilement, en tenant compte des relations bien connues de Kuhn et Tucker, qu'il représente une formulation de la méthode cinématique. Il suffit en effet d'attribuer au vecteur des variables duales $\mathbf{u}$ le sens du vecteur $\mathbf{u}$ présent dans (3) : les (8) peuvent alors s'écrire :

$$\mathbf{C}^T \mathbf{e} = 0,$$

et elles prennent le rôle de conditions de compatibilité géométrique pour le mécanisme défini par $\mathbf{u}$; la (7) est une condition de normalisation; les conditions de K. et T. sont tout simplement les (4) et prennent ainsi un sens physique immédiat; les (9) donnent la condition de normale extérieure; enfin on

démontre, avec le principe des travaux virtuels et grâce à la (7), que le premier membre de (10) coïncide avec le facteur μ associé au mécanisme ⁽¹⁾.

Cela établi, les deux théorèmes fondamentaux de l'A.L. deviennent conséquence l'un de l'autre grâce au théorème de dualité de la P.L. et la *dualité* entre les méthodes statique et cinématique prend une forme mathématiquement définie. D'autre part l'emploi des méthodes de calcul de la P.L. permet d'obtenir la *solution complète* du problème physique, dans ses deux aspects, statique et cinématique; l'A.L. d'une structure devient donc très simple, le code pour ordinateur devant tout simplement former la matrice du programme (5) (6) ou (7 jusqu'à 10) (en général il convient de présenter à l'ordinateur le programme dual) et utiliser ensuite un sous-programme de bibliothèque pour la résolution du problème de P.L.

III. APPLICATIONS DE LA PROGRAMMATION NON LINEAIRE

Si les limitations plastiques ne sont pas linéaires comme les conditions (1) et si on ne veut pas les linéariser, le programme (5) (6) se remplace par un programme N.L. où la (6) reste la même, donc un problème avec fonction économique linéaire et inéquations N.L. A ce programme non linéaire, qui exprime la méthode statique, on peut associer le programme dual et on démontre ici aussi, que ce dernier est une formulation cinématique [16].

Au point de vue numérique, la formulation de l'A.L. comme problème de P.N.L., présente un intérêt analogue à celui offert par les applications de la P.L. : l'utilisation de méthodes et de codes déjà connus. Par exemple dans [33] on utilise, pour l'A.L. des plaques, la méthode SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) de Fiacco-Mc Cormick [34]. Par contre dans [35] [36], où l'on considère le même problème physique, la nature du dit problème (en particulier la forme très simple de la fonction économique, qui se réduit à la variable μ) a conduit les auteurs à considérer le problème mathématique comme un problème de *minimax* et à étudier un algorithme *ad hoc* qui a donné des résultats très intéressants ⁽²⁾.

IV. APPLICATIONS DE LA PROGRAMMATION PARAMÉTRIQUE

Dans l'A.L. classique on considère un système de forces dépendant d'un paramètre; cela nous a conduit, au paragraphe II, au programme linéaire (5) (6). Considérons maintenant un système de forces dépendant de plusieurs paramètres, vecteur t_1 ; on se demande quelle est, dans l'espace S_1 des compo-

(1) La démonstration complète est donnée en [12], [13] et [15].

(2) Les aspects mathématiques et numériques sont discutés en [36].

santes de t_1 , la région des points admissibles $\mathcal{D}_1$, c'est-à-dire des points pour lesquels les (1) sont respectées. Avec nos positions le problème se pose tout simplement de la façon suivante :

dans (2) t_1 prend la place de f ,

$$s = A_1 t_1 + Cx; \quad (11)$$

en remplaçant dans (1) on obtient :

$$DA_1 t_1 + DCx \leq b,$$

c'est-à-dire :

$$DCx \leq b - DA_1 t_1. \quad (12)$$

Le problème peut encore se généraliser si l'on suppose que la résistance des éléments constituant le système soit également définie paramétriquement, vecteur t_2 , de telle façon que (1) se remplace par exemple par une expression du type suivant :

$$Ds \leq Tt_2; \quad (13)$$

(12) devient alors

$$DCx \leq Tt_2 - DA_1 t_1,$$

ou bien

$$DCx \leq At, \quad (14)$$

avec

$$t = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}, \quad A = [-DA_1 \mid T]. \quad (15)$$

Dans l'espace $\mathcal{S}$ des composantes de t la région des points admissibles, ou *domaine plastique*, $\mathcal{D}_p$, s'obtient comme lieu des points pour lesquels le système (14) (en particulier (12)) admet des solutions.

La recherche du domaine $\mathcal{D}_p$ peut s'effectuer de la façon suivante. Si on se donne les valeurs de toutes les composantes de t moins une, soit t_i , on peut chercher les valeurs t_+ et t_- correspondantes aux points sur la frontière de $\mathcal{D}_p$ en résolvant le couple de programmes linéaires :

$$\begin{cases} DCx - a_i t_i \leq \bar{A} \bar{t}, \\ t_i = \begin{cases} \max \\ \min \end{cases} \end{cases} \quad (16)$$

($\bar{t}$ est le vecteur défini à partir de t en ôtant t_i ; $\bar{A}$ est la matrice obtenue de A en ôtant la colonne i , qui est a_i). On obtient donc la frontière du domaine $\mathcal{D}_p$ en résolvant deux problèmes couplés de *Programmation paramétrique*, avec paramètres qui apparaissent linéairement seulement dans les seconds membres. La figure 1 illustre la question dans le cas $t \equiv t_1$ d'ordre 2; les détails physiques

mathématiques et numériques (jusqu'à 3 dimensions) sont donnés dans [27], [29] et [31].

Dans le cas général $\mathcal{D}_p$ est illimité selon les axes des composantes de t_2 ; quand t_2 est fixé, $\mathcal{D}_p$ se réduit à $\mathcal{S}_1$ et devient limité. Un exemple de $\mathcal{D}_p$ dans $\mathcal{S}_1$ est donné par les figures 2 et 3, tirées de [31]; la figure 2 représente $\mathcal{D}_p$, la figure 3 donne les régions décisionnelles selon [37].

La correspondance entre propriétés mathématiques et propriétés physiques est remarquable; en particulier chaque face de $\mathcal{D}_p$ (qui évidemment est un hyperpolyèdre) est associée à un mécanisme de rupture. Par exemple la figure 4 présente un portique encastré avec deux paramètres, un de charge, $t_1 = \lambda$, et un de résistance $t_2 = M_p/P_1$; le domaine plastique est illimité selon l'axe t_2 et les 5 côtés de sa frontière sont associés aux 5 mécanismes de rupture indiqués dans la figure.

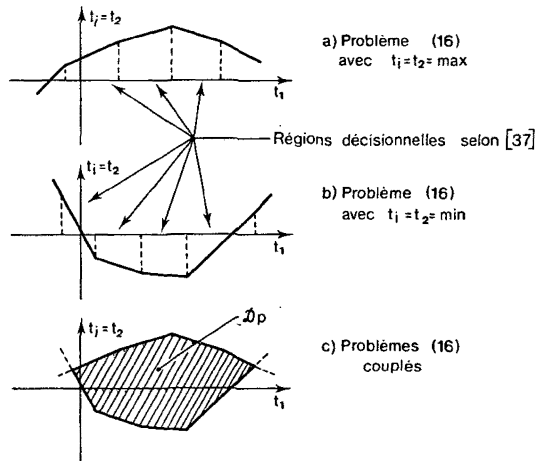


Figure 1.

V. APPLICATIONS DE LA PROGRAMMATION STOCHASTIQUE

La connaissance du domaine plastique $\mathcal{D}_p$ d'une structure peut être, en principe, très intéressante pour l'ingénieur; en effet $\mathcal{D}_p$ décrit complètement le comportement limite de la structure donnée, pour toutes les combinaisons possibles des paramètres qui ont été considérés. En particulier l'examen de $\mathcal{D}_p$ pourrait donner des indications utiles pour le projet.

Mais l'emploi le plus important de la notion de domaine plastique, en général de domaine de sécurité (généralisation de $\mathcal{D}_p$ aux cas où le comportement limite est défini autrement) semble être celui d'instrument pour la *théorie probabiliste de la sécurité* dans le cas où les paramètres sont liés à des gran-

deurs ayant un *caractère aléatoire* (incertitude sur les charges et sur les résistances). Dans cette théorie le domaine $\mathcal{D}_p$ représente la structure au point de vue déterministe paramétrique : tout le comportement limite de la structure est contenu dans la description du domaine; l'analyse probabiliste opère donc directement sur le domaine et non sur la structure. Naturellement l'étude paramétrique préalable doit considérer tous les paramètres auxquels on attribuera ensuite un caractère aléatoire.

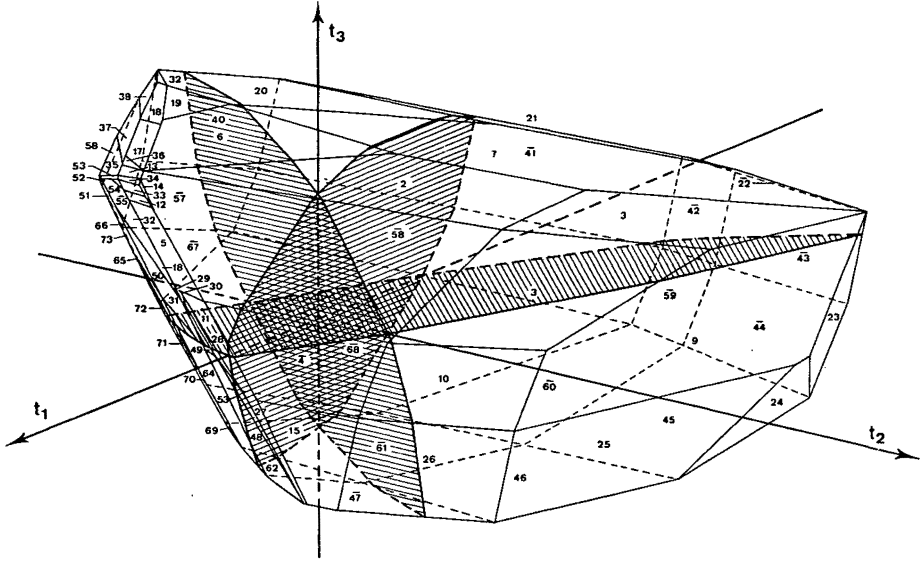


Figure 2

La première donnée du calcul probabiliste étant donc le domaine $\mathcal{D}_p$, les autres données sont les fonctions de distribution des variables aléatoires ou mieux la fonction densité de probabilité composée des variables aléatoires $f_i(z)$ si les variables sont indépendantes on a :

$$f_t(\mathbf{z}) = f_{t1}(z_1) \cdot f_{t2}(z_2) \dots = \prod_i f_{ti}(z_i)$$

On peut maintenant évaluer la probabilité de ruine de la structure comme la probabilité que le point t appartienne à la région $\mathcal{S} - \mathcal{D}_p$ (fig. 5) :

$$p_r = \int_{\mathcal{S} - \mathcal{D}_p} f_t(\mathbf{z}) \, d\mathbf{z}. \quad (17)$$

S'il est raisonnable de considérer les résistances comme des variables aléatoires, les charges ont le plus souvent le caractère de *processus stochastiques* et dans ce cas la (17) perd évidemment sa validité. Si une seule des composantes

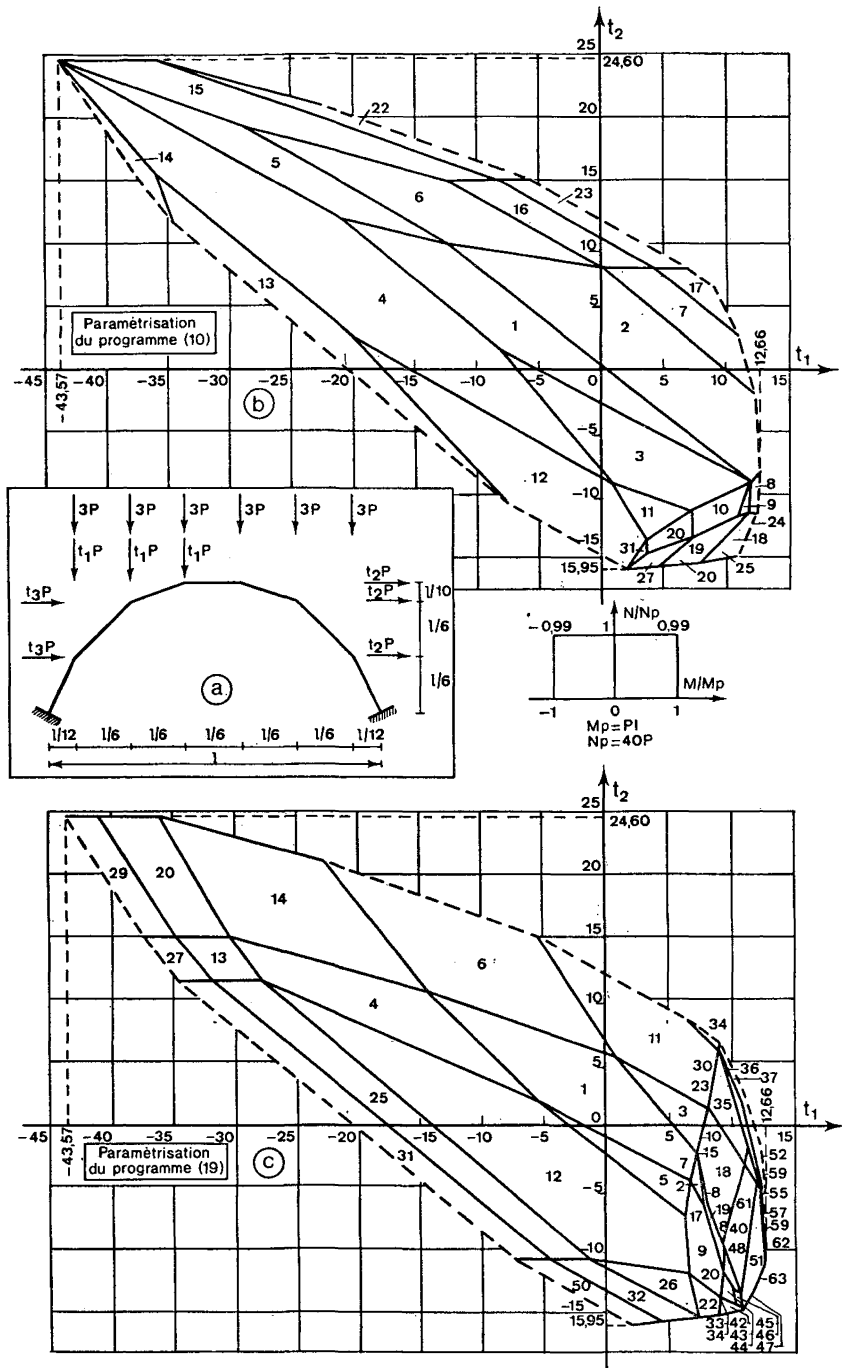


Figure 3

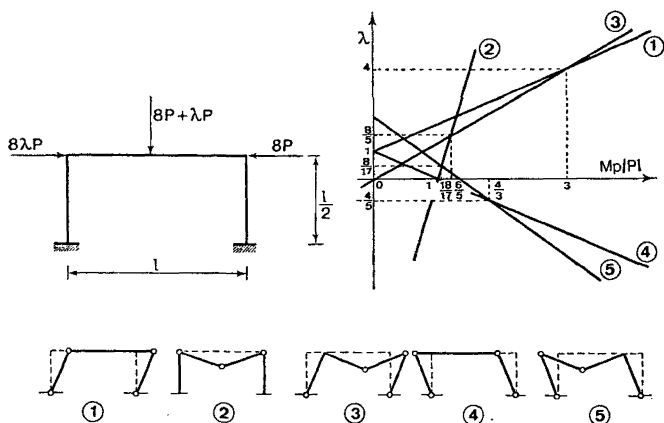


Figure 4

de $\mathbf{t}$ est un processus dont on connaît les distributions des valeurs extrêmes il est encore possible de calculer p_r : la question est traitée en [30]. S'il y a plus d'un processus présent (par exemple la neige et le vent) le problème d'évaluer p_r

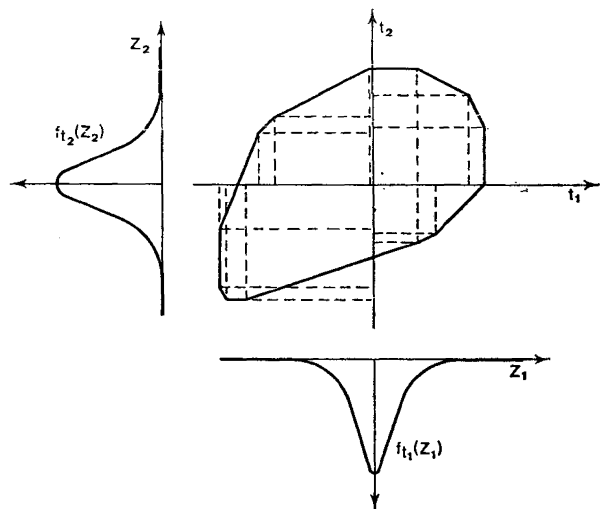


Figure 5

est encore irrésolu, non seulement au point de vue numérique, mais aussi au point de vue théorique. En effet il s'agit de déterminer la probabilité de première sortie du domaine $\mathcal{D}_p$ du point ayant pour coordonnées les composantes du vecteur $\mathbf{t}$, dans le temps T_v choisi comme durée de vie de la structure (fig. 6).

Au point de vue numérique les possibilités de calculer l'intégrale (17) par les moyens classiques sont assez limités dès que le nombre des paramètres augmente; d'autre part nous avons déjà dit qu'il est également difficile de trouver $\mathcal{D}_p$. Il faut donc penser, pour un nombre de paramètres supérieur à 3, à des méthodes approchées qui utilisent par exemple des techniques du type Montecarlo; la question est encore ouverte.

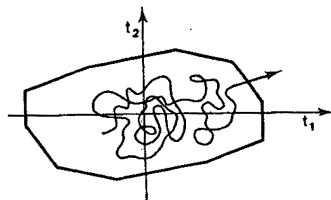


Figure 6

La formulation générale rapidement indiquée ci-dessus admet des développements assez intéressants. Par exemple si l'on revient à l'Analyse limite classique — programme linéaire (5) (6), ou encore programme (16) avec $t_i = \mu = \max$ — on peut se demander, étant donnée la fonction densité de probabilité composée des paramètres contenus dans $\bar{t}_i, f_i(z)$, quelle est la fonction de distribution de μ , c'est-à-dire de la fonction économique du programme linéaire. Il s'agit là d'un problème classique de *Programmation stochastique*, du type « wait and see » ou « distribution problem » [37] [38]. C'est ce type de problème que nous avons d'abord considéré [28] [29], avant de parvenir à la formulation plus générale basée sur la notion de domaine de sécurité, en particulier domaine plastique $\mathcal{D}_p$, [27] [30], dont le dit problème devient un cas particulier [30].

Les deux aspects, « wait and see » et « here and now », qui caractérisent d'habitude les problèmes de P.S. [37], [38], se présentent tous deux quand on se pose le problème du projet optimal limite des structures en conditions aléatoires (problème de décision); on est en outre amené à devoir résoudre un problème d'optimisation, avec une contrainte non linéaire. La question, qui est traitée en [32], se pose en grandes lignes de la façon suivante. Le système (13) devient

$$D(y)s \leq T_2 y$$

où la matrice D est maintenant une fonction, en général non linéaire, du vecteur y des *variables de projet* et T_2 est la matrice diagonale associée à t_2 ; le système (14) devient alors :

$$DCx \leq T_2 y - D(y)A_1 t_1.$$

Naturellement les composantes de y doivent être positives; la condition d'optimum peut se poser de différentes façons, par exemple comme condition de poids — $w = I^T y$ — minimum. Comme les composantes de t_1 et de T_2 sont aléatoires on cherchera la structure de poids minimum pour une *probabilité de ruine donnée* $\bar{p}_r$; on obtient ainsi le problème mathématique suivant :

$$w = I^T y = \min,$$

sous les conditions

$$y \geq 0$$

$$p_r = p(y) = \int_{S - \mathcal{D}_p(y)} f_{t_1, T_2}(z) dz \leq \bar{p}_r \quad (18)$$

avec $\mathcal{D}_p(y) = \{ t_1, T_2 \mid D(y)Cx \leq T_2y - D(y)A_1t_1 \}$.

L'optimum peut se trouver par une des techniques connues de la P.N.L., en tenant compte du fait que la contrainte principale (celle sur la probabilité de ruine) n'a pas une forme analytique explicite.

Un code a été réalisé pour résoudre le problème (18) et quelques résultats numériques ont été obtenus pour des structures simples, avec x d'ordre 2, y d'ordre 6, S à 2 dimensions. La complication du problème a conduit à des temps de calcul assez longs, jusqu'à 14 minutes de UNIVAC 1108. Il faut dire par ailleurs que le code en question est un programme pilote et il pourrait certainement être perfectionné. Deux points méritent encore un commentaire : le code ne requiert pas la paramétrisation (qui est évidemment assez longue) à chaque pas et la complication des calculs ne dépend pas tellement de la complexité de la structure (ordre de x et de y , nombre d'inéquations), mais surtout du nombre de variables aléatoires (dimensions de S).

CONCLUSIONS

Nous avons essayé de donner un aperçu des nombreuses connections entre le problème physique de l'Analyse limite et les problèmes de Programmation Mathématique. Ici comme ailleurs ces connections sont assez variées et intéressantes et telles qu'elles peuvent souvent être utiles pour le progrès des deux secteurs; on doit donc souhaiter, et c'est une des motivations de cet article, une plus étroite collaboration entre ingénieurs et mathématiciens.

REFERENCES

- [1] A. CHARNES-GREENBERG, *Plastic collapse and linear programming*. Preliminary Report. Bulletin of the American Math. Soc., nov. 1951.
- [2] W. S. DORN-GREENBERG, *Linear programming and plastic limit analysis of structures*, An. Appl. Math., vol. 15, 1957.
- [3] A. CHARNES-LEMKE-ZIENKIEWICZ, *Virtual work, linear programming and plastic limit analysis*, Proceeding of the royal Society, Series A, Math. and Phys. Sciences, May 1959.
- [4] G. B. DANTZIG, *Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities*, Chap. 21, in : Activity analysis of production and allocation, New York, 1951.

- [5] PRAGER, *Lineare Ungleichungen in der Baustatik*, Schweizerische Bauzeitung, 10 mai 1962.
- [6] TOCHER-POPOV, *Plastic analysis of rigid frames by modified linear programming*, Symposium on the use of computers in Civ. Eng., Lisbon, 1962.
- [7] MASSONNET-MAUS, *Force portante plastique des systèmes de pieux*, Symposium on the use of Computers in Civ. Eng., Lisbon, 1962.
- [8] WOLFENBERGER-THURLIMANN, *Untere Grenzwerte des Traglast von Platten*, Bulletin C.E.B., n° 43, set. 1964.
- [9] CERADINI, C. GAVARINI, *Calcolo a rottura e programmazione lineare*, Giornale del Genio Civile, n° 1-2, 1965.
- [10] KOOPMAN-LANCE, *On linear programming and plastic limit analysis*, J. Mech Phys. Solids, March 1965.
- [11] CERADINI, C. GAVARINI, *Some applications of linear programming to plastic analysis of structures*, Int. Symp. the use of El. Dig. Comp. in St. Eng. Newcastle, July 1966.
- [12] C. GAVARINI, *Fundamental plastic analysis theorems and duality in linear programming*, Ingegneria Civile, n° 18, 1966.
- [13] C. GAVARINI, *Plastic analysis of structures and duality in linear programming*, Meccanica, n° 3/4, 1966.
- [14] LANCE, *Duality in the finite difference method of plastic limit analysis*, Report NSF GK 687/2, april 1967.
- [15] CERADINI et C. GAVARINI, *Calcolo a rottura e programmazione lineare Continui bi e tridimensionali*, Note I et II. Giornale del Genio Civile, n° 2/3/4, 1968.
- [16] C. GAVARINI, *Calcolo a rottura e programmazione non lineare*, Ist. Lombardo (Rend. Sc.), A 102, 1968.
- [17] CERADINI, *Un principio di massimo per il calcolo dei sistemi elasto-plastici*, Ist. Lombardo (Rend. Sc.), 1965. A maximum principle for the analysis of elastic plastic systems, Meccanica, n° 3/4, 1966.
- [18] CERADINI, *Sul calcolo delle strutture elastoplastiche*, Nota I e Nota II, Costruzioni Metalliche, n° 3 e 5, 1965.
- [19] MAIER, *A quadratic programming approach for certain classes of non linear structural problems*, Meccanica, n° 2, 1968.
- [20] MAIER, *Quadratic programming and theory of elastic-perfectly plastic structures*, Meccanica, n° 4, 1968.
- [21] HODGE, *Numerical applications of minimum principles in plasticity*, Engineering Plasticity, Cambridge Un. Press, 1968.
- [22] MAIER, *Some theorems for plastic strain rates and plastic strains*, Journal de Mécanique, n° 1, 1969.
- [23] CAPURSO, *A general method for the incremental solution of elastic-plastic problems*, Meccanica, n° 4, 1969.
- [24] CARPUSO-MAIER, *Incremental elastoplastic analysis and quadratic optimization*, Meccanica, n° 2, 1970.
- [25] PALMER, *Optimal structure design by dynamic programming*, Proc. ASCE, St 8, 1968.
- [26] TOAKLEY, *Optimum design using available sections*, Proc. ASCE, St 5, 1967.
- [27] C. GAVARINI-VENEZIANO, *On the safety domain of structures*, 1° Convegno Nazionale di Meccanica Teorica ed Applicata, AIMETA, Udine, guigno 1971.

- [28] C. GAVARINI, *Concezione probabilistica del calcolo a rottura*, Giornale del Genio Civile, agosto 1969.
- [29] C. GAVARINI-VENEZIANO, *Calcolo a rottura e programmazione stocastica*. Giornale del Genio Civile, aprile 1970.
- [30] C. GAVARINI-VENEZIANO, *Sulla teoria probabilistica degli stati limite delle strutture*, Giornale del Genio Civile, n° 11/12, 1970.
- [31] VENEZIANO, *Calcolo a rottura probabilistico con più parametri casuali*, Giornale del Genio Civile, n° 2, 1971.
- [32] C. GAVARINI-VENEZIANO, *Minimum weight limit design under uncertainty*, Meccanica, n° 2, 1972.
- [33] HODGE-BELYTSCHKO, *Numerical methods for the limit analysis of plates*, J. Appl. Mech., dec. 1968.
- [34] G. P. MCCORMICK, W. G. MYLANDER et A. V. FIACCO, *Computer program implementing the sequential unconstrained minimization technique for non linear programming*, Tech. paper RAC-TP. 151, Research Analysis, McLean, Va, 1965.
- [35] CASCIARO-DI CARLO, *Formulazione dell'analisi limite delle piastre come problema di minimax mediante una rappresentazione agli elementi finiti del campo delle tensioni*, Giornale del Genio Civile, n° 2, 1970.
- [36] CASCIARO-DI CARLO, *Formulazione dell'analisi limite delle piastre come problema di minimax*, Giornale del Genio Civile, n° 5, 1971.
- [37] B. BEREANU, *On stochastic linear programming, Distribution problems, Non stochastic technological matrix*, Rev. Roumaine Math. pures et appl., tome XI, n° 6, 1966.
- [38] S. VAJDA, *Probabilistic programming*, Academic Press, 1972.