REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, INFORMATIQUE, RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

EDITH HEURGON

Un problème de recouvrement : l'habillage des horaires d'une ligne d'autobus

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 6, nº V1 (1972), p. 13-29

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1972__6_1_13_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, N° V-1, 1972, p. 13-29)

UN PROBLEME DE RECOUVREMENT : L'HABILLAGE DES HORAIRES D'UNE LIGNE D'AUTOBUS

par Edith HEURGON (1)

Résumé. — *Cet article se propose d'analyser les méthodes récemment mises au point à la R.A.T.P. afin d'automatiser l'habillage des horaires des lignes d'autobus.*

Après l'avoir succinctement décrit, on formule ce problème comme un programme linéaire à plusieurs milliers de variables bivalentes soumises à une exception près à quelques centaines de contraintes du type «recouvrement». Les techniques mathématiques (programmation linéaire jointe à l'algorithme de Garfinkel et Nemhauser) qui ont permis, dans la grande majorité des cas, d'obtenir rapidement des résultats très satisfaisants, y sont étudiées avec un soin particulier.

SOMMAIRE

(1) Ingénieur chargée de recherches à la R.A.T.P.

Dans toute entreprise de transport, les problèmes d'affectation (de personnel ou de véhicules) suscitent, aujourd'hui, maintes recherches. Depuis bientôt dix ans, la Régie Autonome des Transports Parisiens a mis en route différentes études en vue de l'habillage automatique des tableaux de marche d'une ligne d'autobus. L'échec des premières tentatives, qui ne cherchaient souvent qu'à systématiser la méthode manuelle, incita en 1969 les responsables du Réseau Routier à confier ce problème difficile à une équipe de Recherche Opérationnelle.

I. DESCRIPTION DU PROBLEME

L'exploitation rationnelle d'une ligne d'autobus implique toute une série d'opérations étroitement liées. Complètement automatisée, bientôt, cette chaîne permettra, à partir de comptages de voyageurs directement transmis à l'ordinateur, de reconstituer la demande de transport, déterminer les fréquences de passage des voitures, construire les graphiques de marche, *habiller les horaires*, élaborer les tableaux de roulement, enfin de prévoir les besoins à moyen terme en personnel.

Au centre de cette chaîne, l'habillage des horaires n'en constitue cependant qu'un maillon. Il suppose l'horaire ou tableau de marche (T.M.) préalablement établi. Sur ce dernier figurent, pour chaque autobus et par ordre chronologique, les heures de sorties de dépôt, passages aux terminus, garages ou dégarages en stations, rentrées au dépôt. *Habiller ce T.M. consiste à découper l'horaire en « postes ou services » respectant les conditions statutaires de travail.* C'est l'étape suivante du processus, la construction des tableaux de roulement, qui réalise l'affectation nominative du personnel aux véhicules.

D'un tableau de marche donné, on peut extraire un sous-tableau où seules sont conservées les heures possibles de relève des équipes. Cet horaire réduit (ou T.R.) peut être décrit par un graphe où les sommets sont les heures de relèves éventuelles et les arcs ou tronçons de deux types différents (fig. 1) :

— des *tronçons horizontaux* qui, nécessairement, doivent être couverts (chaque autobus, à un instant donné, doit en effet être doté d'une équipe et d'une seule);

— des *tronçons obliques* qui, éventuellement, peuvent être couverts (ils correspondent à des changements de véhicules au cours d'une même partie de service).

Un *service*, représentant le travail fourni par une équipe au cours d'une journée, est obtenu par combinaison de tronçons élémentaires respectant les réglementations en vigueur. On distingue aujourd'hui deux sortes de services :

— les services *d'une seule traite* ou directs (par exemple, sur la figure 1, celui qui commence à 6 h 03 sur la voiture n° 1 et prend fin à 13 h);

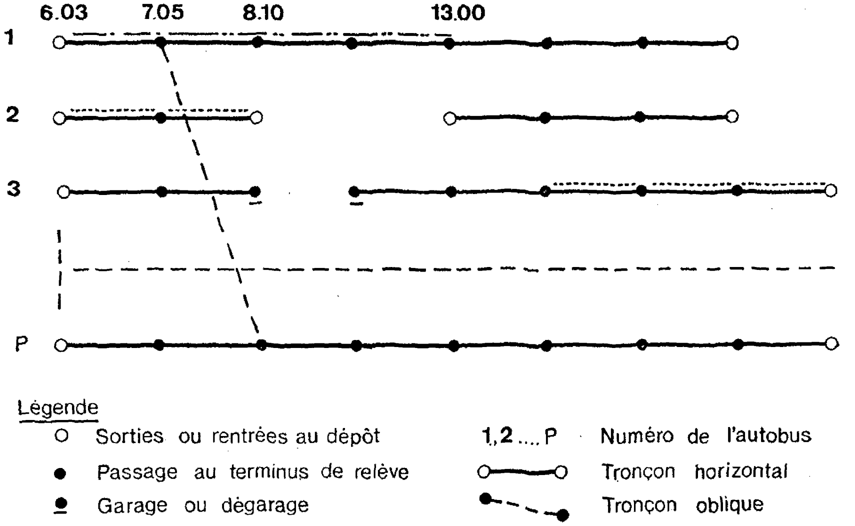

Figure 1

— les services *en deux parties* (comme celui qui, marqué en ... sur la figure 1, effectue sa première partie sur l'autobus n° 2 et la seconde sur la voiture n° 3).

A l'heure actuelle, les conditions statutaires de travail limitent les durées des services, des parties de service, des amplitudes; définissent un intervalle minimal à maintenir entre ces parties, ainsi que diverses contraintes relatives aux heures de repas.

Le problème est donc, tout en n'augmentant pas le nombre d'équipes fixé par des règles impératives, et en minimisant le temps supplémentaire rétribué (accordé si, par exemple, l'amplitude d'un service dépasse 12 h), de construire le meilleur « habillage » possible: celui qui s'adapte le mieux aux convenances du personnel.

II. OBJECTIFS DE L'ETUDE

L'habillage d'une ligne d'autobus s'effectue pour une semaine type; il est formé généralement de trois tableaux : le premier s'applique du lundi au vendredi, les deux autres respectivement le samedi et le dimanche. La durée hebdomadaire de travail étant différente l'hiver et l'été, le trafic variant selon les périodes, ces tableaux sont modifiés trois ou quatre fois par an. Comme la R.A.T.P. exploite près de 200 lignes d'autobus, ce sont environ 2 000 T.M. que, chaque année, le bureau des horaires doit habiller. Bien que les spécialistes obtiennent manuellement des solutions satisfaisantes et qu'une amélioration ne puisse guère se traduire par une réduction du personnel d'exploitation, il est important d'automatiser ce processus principalement pour les trois raisons suivantes :

— diminution de l'effectif employé au bureau des horaires (actuellement cet effectif est d'environ 25 agents);

— exploration systématique de nouvelles conditions de travail et évaluation des avantages et désavantages respectifs pour le personnel et pour la Direction de la Régie;

— insertion de ces programmes dans un projet beaucoup plus vaste de gestion intégrée du personnel.

III. FORMULATION MATHEMATIQUE

Diverses approches du problème peuvent être envisagées. Plus ou moins empiriques, les premières tenteraient de transformer les subtiles méthodes manuelles en algorithmes rigoureux. Les programmes qui en résulteraient, fondés nécessairement sur les réglementations en vigueur, devraient être, après toute modification de celles-ci, profondément remaniés. D'autres, plus globales, utiliseraient des techniques mathématiques comme, par exemple, la théorie des graphes, la programmation linéaire discrète ou encore la simulation. Rentrant alors dans le domaine de l'exploration combinatoire, la plupart suppose l'énumération préalable de tous les services possibles.

Certaines, enfin, pourraient tenter d'allier les deux tendances précédentes restreignant ainsi le champ des combinaisons à étudier. C'est à une méthode de ce type que nous avons entrepris de travailler à la R.A.T.P.

A) Enumération ou « génération »

A partir du tableau de marche réduit, on construit systématiquement un grand nombre de services possibles. Cette opération s'effectue en deux phases :

— *création des parties de services* vérifiant les conditions de travail (à partir du tronçon 1, par exemple, on construit toutes les parties de service le couvrant, puis celles qui couvrent le tronçon 2, etc.) ainsi que des services d'une seule traite;

— *jumelage* des précédentes parties pour constituer des *services* réglementaires.

B) Fonction économique

Pour prendre en considération certains éléments non soumis aux réglementations en vigueur, nous avons associé à tout service engendré un *coût*, tenant compte aussi bien du temps supplémentaire rétribué par la Régie, que de diverses pénibilités supportées par le personnel et attachées aux aspects désagréables de certains horaires (services trop longs, parties déséquilibrées, heures des repas déplacées, etc.). Si ces pénalités, chiffrées comme des coûts réels, ne constituent pas une véritable mesure de la qualité des services proposés, elles permettent néanmoins d'établir entre eux un bon ordre de choix et de construire une fonction économique « homogène ».

C) Formulation

A partir de tous les services possibles engendrés, on construit une matrice d'affectation A : les colonnes figurent les services; les lignes, les tronçons. Son élément général a_{ij} est défini par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si le tronçon } i \text{ est couvert par le service } j, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Notons respectivement J et I les ensembles formés par les services et les tronçons horizontaux. Si, à chaque service j, on associe une variable booléienne x_j telle que :

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ si le service } j \text{ est retenu dans la solution,} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

et un coût c_j, le problème prend la forme *du programme linéaire en variables bivalentes* 0, 1 suivant :

$$(P) \begin{cases} \min f = \sum_{j \in J} c_j x_j & (1) \\ \text{sous les contraintes :} & \\ \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = 1 \quad , \quad \forall\, i \in I & (2) \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 \quad , \quad \forall\, j \in J & (3) \\ \sum_{j \in J} x_j = N & (4) \end{cases}$$

La fonctionnelle (1) à minimiser est la somme des coûts relatifs aux services sélectionnés.

Les contraintes de type (2), *contraintes de recouvrement exact*, imposent à tout tronçon horizontal i d'être couvert par un service j et un seul.

Comme dans la solution de (P), les services ne peuvent être fractionnés, les relations (3) astreignent les variables x_j à ne prendre que les valeurs 0 et 1.

Enfin, si N note le nombre d'équipes (quantité que l'on peut calculer initialement en prenant la valeur maximale résultant des trois formules : temps total de travail/moyenne saisonnière, formule des amplitudes, formule relative aux heures de repas), (4) signifie exactement qu'N services j devront être choisis.

Le problème (P) admet une structure bien particulière : tous les coefficients de la matrice définie par les contraintes, excepté N dans (4), ont les valeurs 0 ou 1. Nous sommes en présence du *problème classique de partition* d'un ensemble en N éléments. La propriété caractéristique des « problèmes de transport » : la solution du programme linéaire continu est toujours entière, ne s'étend pas malheureusement à cette catégorie de programmes.

Une telle formulation d'un problème d'affectation de personnel n'est pas nouvelle; elle a déjà fait l'objet de très intéressants développements dans diverses compagnies aériennes notamment à Air France [1]. Nos recherches, s'en distinguent toutefois, sur deux plans : l'apparition de l'égalité de type (4) d'une part; de l'autre, la taille du programme en nombres entiers à résoudre.

D) Dimensions du problème

Les premiers essais ont été effectués sur une ligne moyenne de Paris : la ligne n° 21 (19 voitures, environ 100 tronçons horizontaux) avec les horaires d'été.

Supposant qu'un seul décalage (changement de véhicule) est admis par partie de service, à partir de 1 500 parties, c'est plus de 150 000 services qui ont été engendrés automatiquement. Il est évident que, dans l'état actuel des possibilités de calcul offertes par les ordinateurs et par les techniques mathématiques connues, la résolution d'un problème de cette taille est impossible.

Aussi, dans la phase suivante de l'étude, avons-nous tenté, par toutes sortes de moyens, de *tronquer ce générateur* et de construire seulement un échantillon représentatif et cohérent de l'ensemble des services possibles. Nous avons bien conscience qu'en réduisant ainsi le nombre des solutions, nous abandonnons la notion d'optimum absolu. Cependant, comme la fonction économique a été mise au point par ajustements progressifs et introduit plus une notion d'ordre qu'une mesure réelle, ce phénomène n'apparaît pas comme essentiel. Il semble, en revanche, beaucoup plus intéressant de pouvoir mettre

(1) Cf. [1] et [2] dans la bibliographie.

en évidence plusieurs « bonnes solutions », permettant ainsi au personnel de choisir la solution qui lui convient. Faisant subir diverses modifications aux pénalités, on pourra calculer plusieurs solutions qui correspondent à des critères de choix différents : par exemple, le maximum de services d'une seule traite, le minimum de temps supplémentaire rétribué, le meilleur équilibrage des parties de service, etc.

Pour réduire le nombre des variables sans supprimer pour autant de bonnes solutions, nous avons entrepris, à partir des résultats manuels obtenus en matière d'habillage, une étude statistique visant à mettre en évidence diverses caractéristiques des tableaux de marche, à déceler des implications voire des périodicités, à déterminer parmi les lignes d'autobus des catégories, enfin à utiliser certaines remarques spécifiques de ce type de problèmes pour en diminuer le caractère combinatoire.

On a constaté notamment qu'il était peu logique de créer systématiquement tous les services avec décalages. Ceux-ci, en effet, nécessairement limités en nombre et en durée dans l'habillage d'un T.M., augmentent la moyenne de travail et occasionnent d'importantes pertes de temps.

En conséquence, compte tenu des résultats de cette étude préliminaire, nous nous sommes donnés comme objectif de mettre au point une méthode de résolution du programme en variables bivalentes (P), supposant que toujours on pourrait ramener ses dimensions à moins de 3 000 variables booléiennes et à moins de 200 contraintes du type « recouvrement » (1).

IV. RESOLUTION DU PROGRAMME LINEAIRE EN VARIABLES BIVALENTES

A) Programme linéaire continu

Au programme (P), faisons correspondre le programme linéaire continu (P_0) :

$$(P_0) \begin{cases} \min f \doteq \sum_{j \in J} c_j x_j & (1) \\ \text{lié à :} & \\ \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = 1 \quad , \quad \forall\, i \in I & (2) \\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1 \quad \forall\, j \in J & (3') \\ \sum_{j \in J} x_j = N & (4) \end{cases}$$

(1) De nouveaux développements nous permettent de réduire davantage encore la taille de ces problèmes.

Il est possible de résoudre (P_0) en un temps raisonnable d'ordinateur par les techniques bien connues de la programmation linéaire. Notons :

$$X^0 = \{ x^0_j \quad , \quad j \in J \}$$

la solution optimale de (P_0). Une alternative se présente alors :

1) Si chacune des composantes x_j^0 de X^0 est entière, X^o est aussi la solution optimale de (P) et le problème est résolu.

Une condition suffisante pour que la solution d'un programme linéaire classique soit entière est que la matrice des contraintes soit totalement unimodulaire (c'est-à-dire que tout sous-déterminant de cette matrice soit -1, $+1$ ou 0). Toutefois, malgré les nombreux travaux de mathématiciens sur ce thème, la caractérisation des matrices totalement unimodulaires, faisant appel à la théorie des modules, demeure un problème fort délicat.

2) Si certaines composantes de X^o sont non entières, *la valeur* f^o de la fonction économique en X^o *constitue* évidemment *une borne inférieure de la valeur de l'optimum.* Pour résoudre le programme (P), cependant, il faut avoir recours à d'autres méthodes.

B) Premières approches

Avant de décrire plus précisément la méthode adoptée aujourd'hui, nous reviendrons brièvement sur les premières approches étudiées.

1) La méthode de Cabot et Hurter

La présence de l'égalité (4) dans la formulation du problème (P) :

$$\sum_{j \in J} x_j = N,$$

où N désigne le nombre d'équipes à affecter au T.M., nous a incité à étudier en détail les recherches de MM. Cabot et Hurter [1]. En effet, l'idée principale peut ainsi se résumer : trouver une solution entière $0 - 1$ au problème linéaire entier (P) équivaut à trouver une solution réalisable de base du problème continu (P^o) avec certaines variables d'écarts strictement positives (donc basiques) à deux conditions :

1) on connaît le nombre de variables devant être arbitrées à 1 dans la solution;

2) on a fait subir une légère modification au vecteur second membre posant $b' = b + \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < 1$, où b note le second membre initial.

(1) Cf. [5] dans la bibliographie.

Malheureusement, après avoir tenté plusieurs approches fondées sur cette idée, nous avons dû admettre que le problème de la détermination d'une solution réalisable avec diverses variables d'écart dans la base, était à peu près aussi complexe que la résolution d'un programme linéaire bivalent.

2) La méthode booléienne de Faure et Malgrange

La méthode que Robert Faure et Yves Malgrange ont présentée dans un numéro spécial de *Gestion* en avril 1963 (cf. [6] et [7] dans la bibliographie) s'inscrit au nombre des *procédures d'exploration arborescente.* C'est une méthode itérative qui, à chaque pas, propose la recherche, dans des sous-ensembles de plus en plus réduits d'un référentiel donné, d'un élément doté de propriétés particulières.

Par le jeu d'attributions successives de valeurs 0 et 1 aux variables, affectations qui, selon les cas, s'effectuent par *choix* ou par *implication*, l'algorithme permet de mettre en évidence une solution ou prouve au contraire qu'il n'en existe aucune. Se traduisant pour l'essentiel par de multiples changements de variables, cette procédure consiste en un travail permanent sur les inéquations mêmes du problème.

L'application d'une telle méthode, méthode d'énumération implicite du type de celle développée en 1964 par E. Balas [3], semblait particulièrement prometteuse pour les problèmes de recouvrement. La structure particulière des contraintes autorise, en effet, une simplification notable du programme comme la suppression de maints tests logiques. En outre, la taille mémoire requise est minime, de l'ordre de 50 K pour 2 000 variables booléiennes.

Comme dans toute procédure énumérative, un facteur spécifique de son efficacité est, naturellement, l'ordre dans lequel les choix doivent s'opérer. En vue d'obtenir une bonne solution dès la première itération, le critère consiste, dans le cas d'une maximisation, à affecter la valeur 1 à la variable dotée du plus grand coefficient dans la fonction économique.

C) Algorithme de Garfinkel et Nemhauser (1)

1) Choix de l'algorithme

Après quelques essais (la taille maximale des problèmes résolus était de 500 variables et d'une centaine de contraintes), cependant, nous avons laissé de côté la méthode booléienne au bénéfice d'une autre procédure, voisine en sa théorie, proposée par R. S. Garfinkel et G. L. Nemhauser (1). Dérivée de l'algorithme de Pierce [12], elle est fondée aussi sur une énumération implicite et présente, nous semble-t-il, divers avantages :

— elle est adaptée *précisément* aux problèmes de partition d'ensemble (et, l'habillage des horaires, nous l'avons vu, appartient à cette catégorie);

(1) Cf. [8] dans la bibliographie.

— elle consiste, en gros, à choisir, pour chaque égalité à 1, la variable disponible la « meilleure », autrement dit, à couvrir chaque tronçon de l'horaire par un service « satisfaisant ».

Là, réside la différence essentielle entre ces deux dernières méthodes. Plutôt que d'affecter successivement les valeurs 0 et 1 à *l'ensemble des variables* (plusieurs milliers dans notre cas), c'est au niveau *des contraintes* à saturer (200 au maximum) que, pour Garfinkel et Nemhauser, le travail s'effectue. Il est clair que les dimensions du problème comme la faible densité de la matrice avantagent nettement une telle approche. Fondamentale aussi demeure la définition des critères :

a) *premier critère :* dans quel ordre les contraintes vont-elles être saturées? les tronçons couverts? Les auteurs proposent de ranger préalablement les lignes de la matrice suivant le nombre de 1 croissant qu'elles contiennent, autrement dit, de couvrir d'abord les tronçons pour lesquels le choix est le plus limité;

b) *second critère :* pour une égalité donnée, quelle va être la variable retenue? pour un tronçon donné, quel sera le service choisi? C'est le critère de la variable de coût minimal qui nous est suggéré dans [8];

Par un important travail préalable sur la présentation de la matrice (tris, préparations des tableaux, rangements des variables en listes), le nombre des tests logiques à effectuer à chaque itération, se trouve notablement réduit.

2) Algorithme proprement dit

Soit (P) le programme suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} f = \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{lié à :} & \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 \quad , & \forall\, i \in I \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 & \forall\, j \in J \\ \sum_{j=1}^{n} x_j = N & \end{array}\right.$$

Il est possible d'effectuer une partition de l'ensemble $\{ A_j,\ j \in J \}$ des colonnes de la matrice d'affectation A en listes. La liste i est alors définie par :

$$A_j \in \text{liste } i < = > \left\{\begin{array}{l} a_{1j} = a_{2j} = \dots = a_{i-1,j} = 0 \\ a_{ij} = 1. \end{array}\right.$$

Parmi les m listes ainsi constituées, certaines peuvent être vides.

● *Critère n° 1 :* les listes i sont classées de façon à ce qu'elles vérifient la propriété suivante :

$$i \leqslant k \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{kj}.$$

● *Critère n° 2 :* dans chaque liste, les colonnes A_j sont rangées selon les valeurs non décroissantes de leurs coefficients dans la fonction économique.

Définissons en outre :

$$S_j = \{ i \in I / a_{ij} = 1 \}, \forall j \in J.$$

Pour toute *solution partielle* de (P) vérifiant les contraintes :

$$\begin{cases} \sum_{j \in J} a_{ij} x_i \leqslant 1 & , \quad \forall i \in I \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 & , \quad \forall j \in J \end{cases}$$

notons :

$$\begin{aligned} W &= \{ j \in J / x_j = 1 \} \quad , \quad f(W) = \sum_{j \in W} c_j \\ T &= \{ i \in I / \sum_{j \in W} a_{ij} = 1 \}, \\ V &= I - T. \end{aligned}$$

Les étapes successives de l'algorithme sont alors :

Etape I. Arrangement des colonnes A_j en listes. Initialisation :

$$T = W = \varnothing; \quad f(W) = 0;$$

$z^0 = \infty$ où z^0 désigne la borne supérieure actuelle de la fonction économique.

Etape II. Choix de la liste :

$$i* = \min \{ i / i \in V \}.$$

Position d'un indicateur, initialisé au « sommet » de la liste $i*$.

Etape III. Examen successif des éléments de la liste $i*$. S'il existe une colonne A_j telle que :

$$T \cap S_j = \varnothing \quad \text{et} \quad f(W) + c_j \leqslant f^0,$$

aller en V sinon en IV.

Etape IV. Si $W = \varnothing$: la dernière *solution* trouvée est *optimale*. Si aucune n'a encore été trouvée, le problème n'admet *pas de solution*. ARRET.

Si $W \neq \varnothing$: soit A_k la dernière colonne choisie. Posons alors :

$$W = W - \{ k \};$$
$$f(W) = f(W) - c_k;$$
$$T = T - S_k.$$

Si $i*$ désigne le numéro de la liste dans laquelle figure la colonne A_k, fixons l'indicateur à la position suivant k dans $i*$. Aller en III.

Etape V. Soient :

$$W = W \cup \{ j \};$$
$$f(W) = f(W) + c_j;$$
$$T = T \cup S_j.$$

Si $| W | \neq N$, aller en II,

sinon $\begin{cases} \text{si } | T | = m, \text{ aller en VI,} \\ \text{si } | T | \neq m, \text{ aller en IV.} \end{cases}$

Etape VI. Une solution réalisable est obtenue.

Posons $z^0 = f(W)$. Aller en IV.

3) Application à l'habillage des horaires (programme HAMILCAR)

C'est cet algorithme « brut » que nous avons appliqué au départ, dans les cas où la solution du programme linéaire continu n'était pas entière. Bien que cette méthode apparaisse plus puissante que les précédentes envisagées, elle s'est révélée encore trop énumérative dès que le nombre des variables était élevé (plus de 1 000). Les temps de calcul requis devenaient, dans la majorité des cas, beaucoup trop importants. Deux moyens de réduire ces temps se sont alors présentés :

a) *Prise en compte des variables arbitrées à 1 dans la solution du programme linéaire*. Comme nous l'avons noté plus haut, bon nombre de variables, dans la solution du problème (P_0), sont fixées à leurs limites supérieures. Il nous a semblé bon d'initialiser, dans l'algorithme de Garfinkel et Nemhauser, le vecteur solution partielle W à l'aide des variables ainsi définies.

A la différence des méthodes employées par certaines compagnies aériennes, ce processus *ne consiste pas à fixer définitivement* les valeurs de ces variables mais seulement à orienter le cheminement dans l'arborescence étudiée. Ces variables, dans la suite de l'algorithme, pourront, comme toute autre, être à l'origine de retours en arrière. Signalons néanmoins que, dans les expériences réalisées, rares sont les fois où ces premiers choix ont été remis en cause. Si l'ordre dans lequel ces variables sont introduites dans W est important, il est clair que leur nombre constitue un des facteurs caractéristiques de la rapidité de cette procédure.

Pour accélérer encore le processus, il est intéressant de trier les lignes de la matrice d'affectation A de façon que les tronçons couverts par les services choisis par la programmation linéaire se trouvent en haut du tableau. On évite ainsi de nombreux tests logiques.

b) *Le calcul est arrêté* dès qu'on a obtenu une solution réalisable à moins de t % de f^0, valeur de la fonction économique à l'optimum continu. En effet, si l'on trouve des solutions réalisables, la vérification de l'optimalité exige un temps d'ordinateur trop important. Ainsi, avons-nous convenu d'arrêter le déroulement de l'algorithme dès qu'une « bonne solution » est atteinte. Le seuil t choisi, 5 % généralement, peut être évalué en fonction des caractéristiques du problème.

Par ces procédés qui transforment sans nul doute cet algorithme rigoureux en « heuristique », nous avons pu résoudre des programmes linéaires qui allaient jusqu'à 3 000 variables bivalentes.

V. CHAINE DE PROGRAMMES HABIT

Quatre programmes (cf. fig. 2) permettent de réaliser l'habillage des horaires d'une ligne d'autobus.

1) A partir des éléments relatifs à une semaine type et des conditions statutaires de travail, le programme PRELUD :

a) vérifie les données; contrôle l'horaire;

b) établit le tableau des amplitudes, calcule diverses caractéristiques de la ligne;

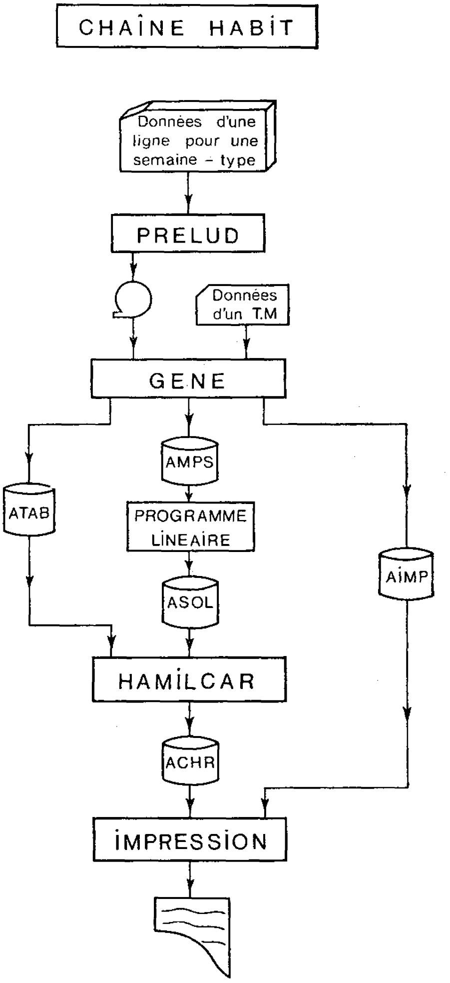

Figure 2

c) détermine le nombre d'équipes nécessaire pour la semaine et le répartit sur les différents T.M.;

d) dispose chaque T.M. pour les opérations suivantes (introduction des tronçons, ...).

2) A partir des résultats du programme précédent, le générateur (GENE) construit successivement les parties de service. puis les services admissibles. Il prépare :

— les données destinées à la résolution du programme linéaire;

— celles exigées par le programme HAMILCAR;

— enfin, les éléments nécessaires à l'édition en clair des résultats.

3) Résolution du programme linéaire continu. (Jusqu'à ce jour, le code IBM MPS a été utilisé; nous espérons prochainement le remplacer par un programme mieux adapté aux problèmes de recouvrement.)

4) Le programme HAMILCAR teste si la solution précédemment obtenue est entière. Si oui, le programme IMPRESSION édite les résultats. Si non, par l'algorithme de Garfinkel et Nemhauser, il détermine une ou plusieurs « bonnes solutions ».

VI. CONCLUSIONS

Pour le service d'été 1971 applicable au 1er mai, parallèlement au travail effectué par le *Bureau des horaires*, nous avons entrepris d'habiller systématiquement par ordinateur toutes les lignes d'autobus de Paris.

Si, au 1er mai, nous n'avions pu, faute de temps, achever tous les passages sur machine relatifs aux 40 lignes et 155 T.M. étudiés, les résultats obtenus peuvent ainsi se résumer :

1) 85 % des T.M. ont été habillés par ordinateur *avant le 1er mai* dont 65 % directement par la programmation linéaire;

2) Sur les 15 % non résolus :

a) 5 % n'avaient pas abouti en raison d'un temps de calcul trop long (plus de 15 mn de C.P.U. sur IBM 360-65) du programme en entiers. Depuis lors, les diverses améliorations apportées aussi bien à la programmation de l'algorithme de Garfinkel et Nemhauser qu'à la définition des critères de choix, ont permis d'obtenir *dans tous les cas* des solutions satisfaisantes en un temps d'ordinateur raisonnable (inférieur à 5 mn C.P.U.). Ainsi, *ces derniers résultats portent à 90 % le taux des T.M. habillés automatiquement.* Naturellement, les recherches consacrées à l'optimisation du programme HAMILCAR se poursuivent.

b) les 10 % restants correspondaient soit à des T. M. non encore étudiés à la date fixée, soit à des problèmes si délicats que, avec le générateur de services

HABILLAGE DE LA LIGNE 21 MARDI A VENDREDI

SCE	COMMENCE		FINIT		TRAVAIL		REPAS	AMPLITUDE	TS
	FND	HEURE	HEURE	END	PARTIEL	TOTAL			
1	D	6H 7	12H19	S	6H12	6H12		6H12	
2	S	12H18	15H35	S	3H17				
	S	17H41	21H15	D	3H34	6H51	2H 6	8H57	
3	D	7H16	12H13	S	4H57				
	S	15H34	19H26	D	3H52	8H49	3H21	12H10	5MN
4	D	6H13	13H11	S	6H58	6H58		6H58	
5	D	6H16	11H 0	S	4H44				
	S	13H10	16H38	S	3H28	8H12	2H10	10H22	
6	S	8H42	13H29	S	4H47				
	S	16H37	20H25	D	3H48	8H35	3H 8	11H43	
7	D	6H26	8H43	S	2H17				
	S	11H39	17H31	S	5H52	8H 9	2H56	11H 5	
8	D	11H39	15H 5	S	3H26				
	S	17H30	20H56	D	3H26	6H52	2H25	9H17	
9	D	6H25	12H43	S	6H18	6H18		6H18	
10	S	12H42	19H32	D	6H50	6H50		6H50	
11	D	7H24	9H14	S	1H50				
	S	13H28	19H 7	D	5H39	7H29	4H14	11H43	
12	D	6H34	10H 3	D	3H29				
	S	12H36	17H51	S	5H15	8H44	2H33	11H17	
13	D	6H58	11H47	S	4H49				
	D	13H57	17H42	S	3H45	8H34	2H10	10H44	
14	D	6H43	10H18	D	3H35				
	S	12H59	16H27	S	3H28	7H 3	2H41	9H44	
15	D	7H28	9H34	D	2H 6				
	D	12H40	18H 8	S	5H28	7H34	3H 6	10H40	
16	S	18H 7	24H54	D	6H47	6H47		6H47	
17	S	11H46	14H59	S	3H13				
	D	17H32	22H19	D	4H47	8H 0	2H33	10H33	
18	S	9H13	12H31	S	3H18				
	S	14H58	20H31	D	5H33	8H51	2H27	11H18	1MN
19	D	7H 7	10H44	D	3H37				
	S	12H48	16H16	S	3H28	7H 5	2H 4	9H 9	
20	D	7H11	12H 7	S	4H56				
	S	15H 4	18H46	S	3H42	8H38	2H57	11H35	
21	S	12H 6	18H57	S	6H51	6H51		6H51	
22	S	18H56	24H32	D	5H36	5H36		5H36	
23	S	12H12	19H 3	D	6H51	6H51		6H51	
24	S	12H30	15H53	S	3H23				
	S	18H21	21H38	D	3H17	6H40	2H28	9H 8	
25	D	7H38	12H37	S	4H59				
	S	15H52	19H45	D	3H53	8H52	3H15	12H 7	4MN
26	S	18H45	25H16	D	6H31	6H31		6H31	
27	D	8H 1	13H 0	S	4H59				
	S	17H50	20H 2	D	2H12	7H11	4H50	12H 1	1MN
28	D	7H43	9H48	D	2H 5				
	D	13H39	19H35	D	5H56	8H 1	3H51	11H52	
29	D	7H52	12H49	S	4H57				
	S	16H26	20H15	D	3H49	8H46	3H37	12H23	12MN
30	D	8H 6	11H33	S	3H27				
	S	16H15	20H 9	D	3H54	7H21	4H42	12H 3	2MN
31	S	11H32	18H22	S	6H50	6H50		6H50	

TEMPS TOTAL DE TRAVAIL232H 1
MOYENNE: 7H29
TS 25MN

utilisé, aucune solution réalisable, même continue, n'avait pu être déterminée. Sans doute, l'introduction de décalages systématiques ou locaux (tronçons obliques de la figure 1) aurait permis de temps à autre de pallier ces difficultés. Toutefois, certains tableaux de marche, compte tenu des conditions de travail qui leur sont scrupuleusement appliquées (il est impossible, en effet, d'accorder une seule minute de dérogation) ne peuvent pas être habillés sans aller, en maints endroits, retoucher l'horaire (minimes modifications des heures de relèves, permutation de voitures, suppression ou ajout de quelque course). Si les spécialistes du Bureau des Horaires excellent dans cette opération, nous n'avions pas admis, initialement, une telle éventualité. On pourrait imaginer une méthode itérative allant de l'habillage à l'horaire et vice-versa et remettant en cause certains éléments de celui-ci. Est-ce cependant une façon rationnelle de procéder?

Les résultats obtenus manuellement et par ordinateur ont fait l'objet d'une minutieuse comparaison. Lorsqu'ils reposaient sur les mêmes horaires, ils n'étaient pas, généralement, au désavantage de l'ordinateur. En outre, après concertation des deux parties, il est toujours possible, évidemment, d'apporter de légères modifications aux poids affectés aux systèmes de pénalités, afin d'atteindre le meilleur compromis.

Signalons enfin que les conditions de travail des machinistes et receveurs en vigueur depuis quelque vingt ans à la R.A.T.P. évoluent rapidement. Les programmes décrits dans cet article sont spécialement appropriés à une exploration méthodique de nouvelles réglementations plus adaptées aux besoins de notre époque.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Agard (J.), Arabeyre (J. P.) et Vautier (J.), « Génération automatique des rotations d'équipages », *Revue d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, n° 6, 1967.

[2] Arabeyre (J. P.), Fearnley (J.), Steiger (F. C.) et Teather (W.), « The airline crew scheduling problem : a survey », *Transportation Science*, volume 3, Number 2, May 1969.

[3] Balas (E.), « On additive algorithm for solving linear programs with 0 — 1 variables », *Operations Research* 13 (4), 1965, pp. 517-688.

[4] Bendahan (S.) et Fayein (V.), Problèmes périodiques d'affectation avec réemploi. Thèse 3e cycle C.U.D., mai 1971.

[5] Cabot (V.) et Hurter (A. P.), « An approach to zero-one integer programming », *Operations Research*, vol. 16, n° 6, 1968.

[6] Faure (R.) et Malgrange (Y.), « Une méthode booléenne pour la résolution des programmes linéaires en nombres entiers », *Gestion* : numéro spécial, avril 1963.

[7] Faure (R.) et Malgrange (Y.), « Nouvelles recherches sur la résolution des programmes linéaires en nombres entiers », *Gestion* : numéro spécial, juin 1965.

[8] GARFINKEL (R. S.) et NEMHAUSER (G. L.), « The set-partitioning problem : set covering with equality constraints », *Operations Research*, vol. 17, n° 5, sept-oct. 1969.

[9] HARRIS (F.) et LANGSFORD (P.), « Etablissement par ordinateur des tableaux de service des équipes d'exploitation », *Revue de l'U.I.T.P.*, volume XVII, 4, 1968.

[10] HEIN, « Un procédé approché pour la détermination des plans de rotation des véhicules », *Cybernétique et électronique dans les chemins de fer*, volume VI, n° 11.

[11] LAMPKIN (W.) et SAALMANS (P. D.), « The design of Routes, Service Frequencies and Schedules for a Municipal Bus Undertaking : a case study », *Operational Research Quaterly*, vol. 18, n° 4.

[12] PIERCE (J. F.), « Application of combinatorial programming to a class of all-zero-one integer programming problems », *Management Science*, vol. 15, n° 3, novembre 1968.

[13] ROTH (R.), « Computer solutions to minimum-cover problems », *Operations Research*, vol. 17, n° 3, 1969.