REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE [SÉRIE VERTE]

B. ROY

Classement et choix en présence de points de vue multiples

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle [Série verte], tome 2, nº V1 (1968), p. 57-75

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1968__2_1_57_0>

R.I.R.O.
(2e année, N° 8, 1968, p. 57-75)

CLASSEMENT ET CHOIX EN PRESENCE DE POINTS DE VUE MULTIPLES (1)

(La méthode ELECTRE)

par B. Roy (2)

Résumé. — *Après des considérations d'ordre général visant à cerner et à catégorier ces problèmes, nous mettrons l'accent sur une méthode (laquelle a donné lieu à un programme baptisé ELECTRE) dont voici l'essentiel :*

Soit E un ensemble d'objets sur lesquels n points de vue permettent de définir n préordres complets. La méthode consiste à élaborer une relation résultante à partir de laquelle on puisse justifier l'élimination d'un sous-ensemble de E afin de restreindre le problème du choix aux sous-ensembles complémentaires, ou encore afin de faire apparaître un classement dichotomique d'un certain type. Deux indicateurs, l'un dit de « concordance », l'autre dit de « discordance » permettent d'introduire cette relation résultante, et de fonder la partition sur la notion de noyau d'un graphe. Quelques exemples serviront à justifier cette démarche.

Une esquisse de quelques généralisations permettant d'aborder des problèmes plus complexes sera présentée en fin d'article.

A. — GENERALITES

1. — La notion d'états multidimensionnels

Plaçons-nous dans la situation très courante que voici : on s'intéresse aux éléments d'un certain ensemble E, et l'on cherche, à partir de considérations objectives, soit à dégager des sous-ensembles homogènes afin de les classer, soit à introduire une notion d'ordre afin de les comparer. Les éléments concernés peuvent être :

— des objets préhistoriques (haches de pierre, fossiles, ...),

— des corps chimiques,

— des êtres vivants appartenant au règne animal ou végétal,

— les candidats à un concours ou à une élection, à un poste dans une entreprise,

— des consommateurs,

---

(1) Metra International-Sema (Directeur de la Direction Scientifique).

(2) Texte d'une conférence prononcée par l'auteur le 22 janvier 1968 au Séminaire d'Économétrie du C.N.R.S., (Paris).

— les distributeurs d'un produit (stations-services, débits de boissons, magasins divers, restaurants, hôtels, ...),

— les marques d'un même produit (lessive, télévision, automobiles, ...),

— les différents types d'emballages, d'affiches, ...,

— des maladies,

— les lecteurs de journaux,

— les tâches à exécuter pour réaliser une production, un immeuble, un aéroport, ...,

— les activités nouvelles pour une entreprise,

— ...

Une telle tentative de classification ou de comparaison conduira le plus souvent à regarder ces éléments de différents points de vue; repérons ceux-ci par un indice i, $i = 1, ..., n$. Chacun de ces points de vue pourra revêtir une signification différente :

— présence ou absence d'une propriété,

— reconnaissance d'une caractéristique ou appréciation d'un facteur qualitatif,

— attribution d'une note ou évaluation d'un facteur quantitatif.

Désignons alors par K_i l'ensemble des résultats auxquels on admet *a priori* que le point de vue i puisse conduire, et utilisons le terme général d'*état* pour désigner un élément de K_i. Citons parmi les ensembles d'états les plus couramment envisagés :

— $B = \{ 0,1 \}$,

— { oui, non, ne sait pas },

— { jamais, rarement, souvent, toujours },

— toutes sortes de parties finies de N et Q.

L'examen selon les n points de vue conduira donc à associer à chaque élément de l'ensemble E une suite de n états pris respectivement dans $K_1, ..., K_n$, autrement dit, un élément du produit cartésien :

$$K = K_1 \times K_2 \times ... \times K_n.$$

Nous verrons plus loin l'intérêt que présente ce concept d'*état multidimensionnel* pour aborder les problèmes de classification et de comparaison qui viennent d'être évoqués. Bornons-nous simplement ici à une rapide incursion dans un domaine précis.

Considérons une entreprise qui souhaite développer une nouvelle activité, ou fabriquer un nouveau produit.

Sur la base d'une analyse de l'entreprise et de son contexte ayant pour but de dégager les contraintes qui lui sont propres ainsi que celles dues à l'environnement, il sera possible de dresser une liste de, disons quelques dizaines, d'activités ou de produits nouveaux qu'il est raisonnable d'envisager. On trouvera (fig. 1) une liste de 49 points de vue qu'il peut être intéressant d'adopter pour porter un jugement sur chacun des éléments de la liste. La plupart d'entre eux ne pouvant conduire qu'à des résultats

Classement en 6 groupes de 49 points de vue
pris en considération dans une méthode d'analyse de recherche
et de sélection d'activités nouvelles

Point de vue du développement

— Unicité du produit.
— Coefficient « offre-demande ».
— Degré d'évolution technique.
— Possibilité d'exportation.
— Opportunité de création d'un service de « Conseil Technique ».
— Ventes complémentaires.
— Incidence sur la politique du personnel.
— Incidence sur la politique du produit de la Compagnie.

Point de vue de la commercialisation

— Relations avec les marchés existants.
— Notoriété dans des domaines voisins.
— Proximité ou éloignement du marché.
— Concurrence prévisible.
— Relations avec d'autres produits fabriqués par la clientèle.
— Possibilités d'achats massifs par certains utilisateurs.
— Diversification des modèles.
— Développement des applications.
— Possibilité de services « Après ventes ».
— Variations saisonnières.

Point de vue de l'assimilation

— Planning escompté pour l'opération.
— Marge escomptable.
— Valeur ajoutée au cours de la production.
— Facilité d'approvisionnement.
— Volume des approvisionnements.
— Possibilité interne de se procurer les composants.

Point de vue de la recherche (de développement)

— Utilisation des connaissances actuelles.
— Relation avec le programme de développement.
— Utilisation de l'équipement de laboratoire et d'essai.
— Disponibilité de personnel de recherche.
— Disponibilité de personnel de conception.

Point de vue de la production

— Utilisation éventuelle d'équipement disponible.
— Utilisation équilibrée des différents services de l'usine.
— Utilisation de l'outillage standard.
— Utilisation de matériaux familiers.
— Utilisation de techniques familières.
— Disponibilité de main-d'œuvre appropriée.
— Conséquence sur l'organisation de l'usine.
— Frais généraux.
— Taille du produit.
— Facilité d'accès et de transport.
— Sécurité.
— Impératifs d'entretien.
— Déchets et rebuts.
— Utilisation de sous-produits.

Point de vue de la stabilité

— Stabilité du marché.
— Étendue du marché.
— Effet sur la gamme de produits.
— Possibilité de marché complémentaire.
— Difficulté pour la concurrence de copier le produit.
— Stabilité de la demande en cas de récession économique ou de crise.

Extrait de la méthode M.A.R.S.A.N.

Figure 1

qualitatifs, on pourra retenir comme ensemble d'états $K_i (i = 1, ..., 49)$ le suivant :

(mauvais, passable, moyen, bon, très bon)

qu'il sera plus commode de représenter par :

$$\{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Une fois en possession des suites de 49 nombres associés aux divers éléments de la liste il restera à en sélectionner un qui pourra raisonnablement être considéré comme l'un des meilleurs. Nous reviendrons sur ce problème par la suite.

2. — Les problèmes de typologie

Intéressons-nous maintenant aux éléments d'un certain ensemble E, avec pour finalité précise de dégager, sur des bases objectives, des sous-ensembles (familles, agrégats, classes, catégories) à peu près homogènes, auxquels on donnera ici le nom général de types. Nous allons esquisser une approche à partir de laquelle il est possible d'asseoir de façon opérationnelle l'idée de ressemblance qui doit justifier une typologie. Pour cela il est essentiel de bien définir et formaliser l'information qui permettra précisément de cerner cette idée de ressemblance.

C'est l'observation ou l'étude des éléments de E selon divers points de vue qui fournira cette information. Supposons qu'il soit possible, pour chacun des points de vue retenus $i = 1 \dots n$, de définir l'ensemble K_i des résultats appelés états (cf. § 1) auxquels peut conduire l'examen selon le point de vue i d'un élément quelconque de E, et cela de telle sorte qu'un état déterminé unique $\gamma_i(e) \in K_i$ puisse ensuite être associé à chaque élément $e \in E$.

Dans ces conditions les n applications γ_i traduisant cette association :

$$\gamma_i : E \to K_i \qquad i = 1 \dots n$$

jointes à la structure éventuelle dont peuvent être naturellement dotés les ensembles K_i, constituent l'information nécessaire.

Examinons plus particulièrement quatre cas se distinguant précisément d'après les propriétés structurelles des ensembles K_i.

a) K_i est dépourvu de structure

Il n'existe autrement dit aucun lien qui mérite d'être considéré, entre les divers états relatifs à un même point de vue, ce sera le cas lorsque :

— E est un ensemble de « foyers » que l'on cherche à stratifier en vue de dégager des habitudes de consommation ; les points de vue à retenir pourront être la composition du foyer, sa localisation géographique, l'âge et la catégorie socio-professionnelle du chef de famille, les quotidiens habituellement lus au foyer, les appareils possédés, ...

— E est un ensemble d'individus, que l'on cherche à classer d'après le jugement qu'ils émettent à propos d'objets ou de comportements qui leur sont décrits au cours d'une interview ; si K_i désigne la liste des réponses proposées à propos de l'objet ou du comportement i, $\gamma_i(e)$ désignera la réponse choisie par l'individu e.

b) $K_i = B$

Ce cas est celui où l'on cherche à classer d'après des propriétés que possèdent ou ne possèdent pas les éléments de E. Citons par exemple :

— le classement de maladies mentales d'après certaines propriétés de tableaux non figuratifs peints par les malades ;

— le classement des marques d'un même produit (cigarettes) en considérant pour divers couples de pôles antagonistes (populaire-luxueux, traditionnel-moderne, bon marché-cher, ...) celui qui paraît significativement convenir le mieux à chacune.

Comme le laisse pressentir ce dernier exemple, il sera souvent préférable de substituer à B l'ensemble :

$$\{0, ?, 1\}$$

qui permettra de compléter « vrai » ou « faux » par « ne sait pas ».

c) K_i est une échelle

Sous le terme d'*échelle* nous désignerons un ensemble fini dont les éléments sont tous rangés (à la manière des échelons d'une échelle) dans un ordre (généralement traduit par un numérotage) auquel on attache une certaine signification : échelle de préférence, échelle hiérarchique, échelle de valeur, ... Précisions toutefois qu'il faut se garder de considérer comme nécessairement égaux les écarts qui séparent les paires d'échelons consécutifs ; le plus souvent, rien ne permettant de conférer à de tels écarts un sens qui soit indépendant de leur position dans l'échelle, parfois il ne sera même pas possible de les comparer entre eux. Le cas envisagé ici est donc, par exemple, celui où :

— les éléments de E seraient des assurés contre un certain risque : chaque application γ_i pourrait alors avoir comme ensemble cible une échelle servant à apprécier, au moins qualitativement, la gravité du risque en fonction d'un certain indicateur bien corrélé avec lui, et constituant le point de vue i, c'est ainsi qu'en assurance automobile les risques sont classés d'après la puissance fiscale du véhicule, son âge, la profession de son propriétaire, un lieu de résidence, ... ;

— les éléments de E seraient des emballages sélectionnés comme possibles pour un produit donné : $\gamma_i(e)$ pourrait alors désigner le rang attribué à l'emballage e, par un individu i, dans un classement de tous les éléments de E qui traduirait sa propre préférence.

d) **K_i est muni d'une métrique** (1)

Considérons enfin le cas où, non seulement il est possible de dire entre deux états de K_i lequel est jugé le meilleur du point de vue i, mais encore si ces deux états sont plus proches ou plus éloignés l'un de l'autre que le sont deux autres états quelconques. La notion de proximité ainsi introduite peut fréquemment être fondée sur une métrique dont on dote K_i. Développer ce point sortirait du cadre de cette communication, nous nous bornerons ici encore à deux exemples :

— les éléments de E sont des restaurants d'entreprise, les divers points de vue conduisent à définir pour chacun d'eux : un prix (pour un repas type), le nombre de kilos de viande d'une certaine qualité servis en moyenne par repas, le nombre de kilos de féculents servis en moyenne par repas, un indicateur de propreté ou de confort ...,

— les éléments de E sont des individus que l'on cherche à classer d'après leurs lectures : $\gamma_i(e)$ pourra désigner le temps hebdomadaire passé par l'individu e à un type i de lecture, ou encore la proportion de numéros de l'hebdomadaire i qu'il prend en main.

D'une façon générale, une typologie se présentera comme une famille de parties de E constituant un recouvrement de E, voire une partition ; choisir une typologie revient donc à choisir parmi tous les recouvrements de E celui qui paraît être le plus en accord avec l'information sur la ressemblance contenue dans les applications γ_i et les structures éventuelles des cibles K_i (sans pour autant conduire à un nombre excessif de types réduits à un très petit nombre d'éléments).

Pour préciser un peu ces considérations générales, faisons observer qu'étant donné deux n-tuples d'images $\gamma_i(e)$ et $\gamma_i(e')$, $(i = 1, ..., n)$, c'est la coïncidence dans chacun des ensembles cibles K_i des états considérés, ou encore leur position relative ou leur proximité, qui doit servir à juger de l'opportunité qu'il y a à mettre deux éléments tels que e et e' dans un même type. De là, on peut déduire quelques principes de bon sens, adaptés à chaque cas, grâce auxquels on pourra comparer deux recouvrements quelconques du point de vue de cet accord avec la ressemblance que l'on cherche à cerner. Cependant, cela conduira le plus souvent à considérer une typologie d'autant plus satisfaisante qu'elle est plus fine, c'est-à-dire que ses types sont plus nombreux et moins fournis, et l'on risque ainsi d'être conduit à une « meilleure » typologie comportant autant de types qu'il y a de familles d'éléments identiques, c'est-à-dire dont les n images coïncident. Pour éviter ce phénomène il est donc nécessaire d'introduire des considérations supplémentaires sur lesquelles fonder l'exclusion des typologies trop fines. L'introduction *a priori* d'un maximum pour le nombre des types, et surtout d'un minimum pour l'effectif de chacun réclame des précautions et de sérieuses justifications. En général, ces considérations nouvelles rendront insuffisants les principes

---

(1) Il est parfois intéressant d'introduire des structures intermédiaires entre échelle et ensemble métrique ; nous serons précisément conduits à en introduire une à la section B ci-après.

de bon sens évoqués ci-dessus pour définir une typologie unique, meilleure que toutes les autres. Néanmoins, une telle approche pourra permettre d'isoler un sous-ensemble restreint de recouvrements de E au sein duquel il restera à choisir de façon plus ou moins arbitraire.

3. — Les problèmes de comparaison

Soient E un ensemble d'objets du type de ceux évoqués au début du § 1 et n points de vue (repérés par un indice i) selon lesquels il apparaît intéressant de juger ces objets. Introduisons encore pour chaque point de vue un ensemble fini K_i d'états possibles, ainsi que l'application γ_i spécifiant l'état attribué à tout objet $e \in E$ dans un jugement selon le point de vue i. Supposons enfin que l'on se préoccupe maintenant non plus comme au § 2 de regrouper ces objets en classes à peu près homogènes, mais de les comparer deux à deux :

— soit en vue de les ranger dans un *préordre complet*, c'est-à-dire en une suite laissant place aux ex-æquo (préfixe « pré »), et grâce à laquelle n'importe quel objet peut être comparé (de par sa position dans la suite) à n'importe quel autre (qualificatif « complet »),

— soit plus simplement, en vue d'éliminer la majeure partie d'entre eux afin d'en sélectionner un ou quelques-uns.

C'est ainsi par exemple que :

α) E peut désigner l'ensemble des candidats à un concours : les points de vue seront alors les matières ou épreuves du concours, K_i sera l'échelle des notes possibles pour la matière i (de 0 à 20 avec 41 échelons correspondants au demi point, ou toute autre si l'on y intègre le coefficient marquant l'importance attribuée à la matière i), γ_i est l'action qui conduit à attribuer un échelon de K_i à chacun des candidats ; il s'agit ici, sur la base de la gamme de notes obtenues par chaque candidat, de lui affecter un rang de classement (les ex-æquo étant en général tolérés sous l'hypothèse implicite qu'ils sont peu nombreux).

β) E peut concerner un ensemble d'activités ou de produits nouveaux envisagés par une entreprise, les points de vue étant ceux énumérés (fig. 1), chacun d'eux donnant lieu (par l'intermédiaire d'un expert, d'une enquête, d'un test, d'un essai, ...) à une appréciation $\gamma_i(e)$ (de tout élément $e \in E$) sur une échelle telle que :

$$K_i = \{ \text{mauvais, passable, moyen, bon, très bon} \} ;$$

il sera alors souhaitable, sur la gamme d'appréciations associées à chaque activité ou produit, de pouvoir justifier l'élimination d'activités ou de produits (en nombre aussi grand que possible) comme étant « surclassés » par au moins l'un de ceux que l'on conserve, le choix entre ces derniers ne pouvant alors qu'être le fruit d'une analyse complémentaire qu'il aurait été trop coûteux d'entreprendre sur la totalité des éléments de E.

Il est bien clair qu'une comparaison des éléments de E d'après l'état multidimensionnel de K :

$$K = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_n$$

qui leur est associé par l'intermédiaire des applications γ_i, n'est concevable que si l'on sait, déjà, comparer ces mêmes éléments d'après l'état unidimensionnel relatif à un seul point de vue, quel qu'il soit. K_i ayant déjà été supposé fini, nous considérerons désormais qu'il s'agit au moins d'une échelle (cf. § 2.c) : ceci revient à regarder chaque point de vue comme révélant une dimension sur laquelle les échelons marquent un jalonnement qui autorise à les ordonner complètement en une suite ; il peut toutefois être impossible d'attribuer à celle-ci une signification plus précise (notamment quant à la proximité des échelons, cf. Roy B. [14]). Nous supposerons que pour chaque point de vue, le sens favorable qui doit servir à fonder le classement général (cas α ci-dessus) ou la sélection finale (cas β ci-dessus), est marqué dans chaque échelle par le sens montant des échelons. Dans ce qui suit, le signe $>$ pourra donc se lire « favorable à » ou « plus haut que » et $\geqq$ « non défavorable à » ou « au moins aussi haut que ».

Dans ces conditions, n'importe quelle application γ_i permet de définir sur E un graphe : $G_i = (E, U_i)$ en posant (voir fig. 2) :

$$(e', e) \in U_i \Leftrightarrow \gamma_i(e) \geqq \gamma_i(e')$$

la flèche allant par convention de la valeur la plus haute vers la valeur la plus basse, l'égalité entraînant l'existence de deux flèches en sens opposés. On remarquera que ce graphe est loin d'être quelconque :

— en premier lieu, chaque fois qu'il existe entre deux sommets e et e' un chemin (au moins) allant du premier au second, il en existe alors nécessairement un, réduit à un seul arc : propriété de *transitivité* ;

— en second lieu, deux sommets e et e' sont toujours adjacents, autrement dit, G_i est complet.

A moins que γ_i ne soit injective, G_i ne sera pas antisymétrique : la présences de deux arcs entre e et e' traduit en effet précisément le fait que $\gamma_i(e) = \gamma_i(e')$. Il est très facile de vérifier que, dès l'instant où il existe dans G_i de tels circuits de deux sommets, il peut en exister portant sur plus de deux sommets, et qu'alors le sous-graphe qu'engendrent ceux-ci est complet symétrique (car les éléments concernés ont tous la même image dans K_i).

Le graphe G_i permet donc une représentation claire de la relation (de préordre complet) définie sur E du fait du $i^{\text{ième}}$ point de vue. Il suffit d'adjoindre en chaque sommet e de chacun des graphes G_i l'indication de l'échelon $\gamma_i(e)$ attribué dans l'échelle K_i, pour symboliser (voir fig. 2, page suivante) la totalité de l'information, de laquelle on souhaiterait déduire une nouvelle relation (éventuellement de préordre complet) opérant la synthèse des n points de vue. Notons : $G = (E, U)$ cette relation inconnue.

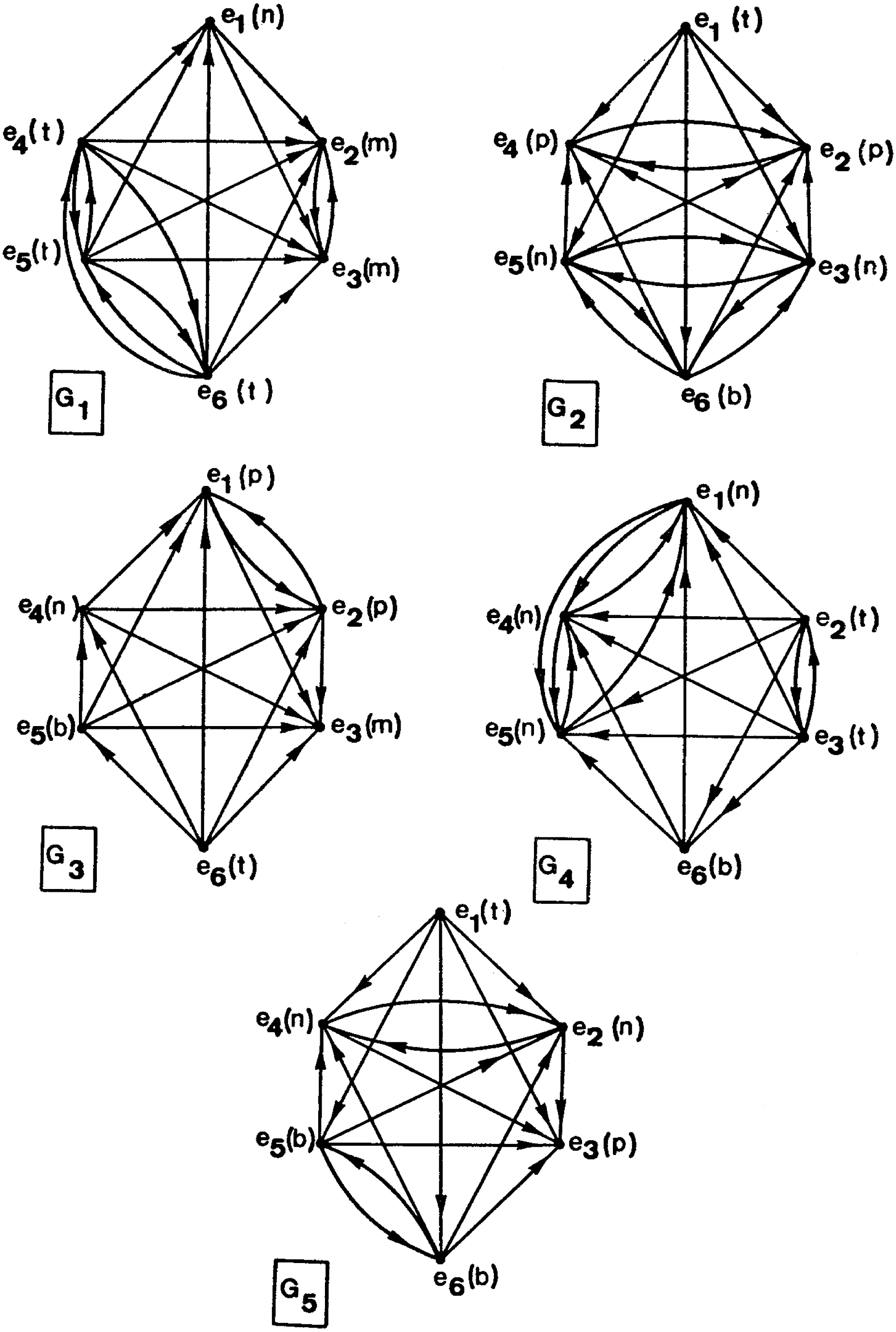

Figure 2

Comparaison de 6 objets e_1 ... e_6 d'après 5 points de vue — les lettres entre parenthèses indiquent l'échelon attribué à l'objet pour le point de vue concerné — ces lettres sont les initiales de *m*auvais, *p*assable, *n*eutre, *b*on, *t*rès bon.

Observons tout d'abord que, s'il existe deux objets e et e' pour lesquels l'échelon attribué à e' est toujours — quel que soit le point de vue — au moins égal à celui attribué à e, alors, l'intégration de tous les points de vue que doit représenter G ne peut que respecter cette unanimité, autrement dit :

$$(e, e') \in U_i \, \forall \, i = 1, ..., n \Rightarrow (e', e) \in U.$$

Soit alors (voir fig. 3) :

$$G_0 = (E, U_0) \qquad \text{avec} \qquad U_0 = \bigcap_{i=1}^{i=n} U_i,$$

le graphe qui rassemble les comparaisons que l'on peut ainsi fonder sur ce respect de l'unanimité (il est facile de vérifier que c'est encore un préordre mais qu'en général il est loin d'être complet).

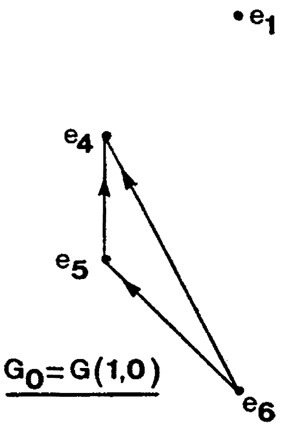

Figure 3

Le problème du choix de G peut maintenant être formulé de la manière suivante :

En vertu de quels principes peut-on caractériser les arcs qu'il convient d'adjoindre à G_0 pour en déduire un graphe G qui soit en aussi « bon accord » que possible avec les divers points de vue, sans être pour cela « trop pauvre » en couples comparables ?

Comparaisons unanimes dans les 5 points de vue de la figure 2.

Des approches assez différentes (voir la bibliographie) ont été proposées pour trouver une réponse à cette question, cela tient sans doute à la diversité des réalités qu'elle concerne ; aucune ne paraît toutefois avoir pleinement abouti. La solution que nous allons présenter ci-après a été conçue plus particulièrement dans le cadre de l'exemple β ci-dessus.

B. — LA METHODE ELECTRE

1. — Les indicateurs de concordance et de discordance

Considérons deux objets quelconques $e, e' \in E$. Le couple (e, e') permet de répartir les points de vue dans deux classes disjointes. L'une, $C(e, e')$:

$$C(e, e') = \{ i / (e, e') \in U_i \}$$

rassemble ceux des points de vue qui sont en concordance avec une relation qui serait vérifiée par (e, e') ; les autres points de vue, qui seraient donc en discordance avec une telle relation, constituent l'autre classe $D(e, e')$:

$$D(e, e') = \{ i / (e, e') \notin U_i \}$$

Faisons observer que :

$$C(e, e') \supset D(e', e) \text{ sans qu'il y ait toujours égalité}$$
$$C(e, e') = \{ 1, ..., n \} \Leftrightarrow (e, e') \in U_0.$$

Il est, en premier lieu, assez naturel d'imposer aux arcs de $U - U_0$ d'être relatifs à des couples (e, e') pour lesquels $C(e, e')$ fait apparaître une « concordance suffisante » en leur faveur. Il est bien clair que pour donner un sens opérationnel à cette notion vague de concordance suffisante ou non, il devient indispensable d'introduire des hypothèses sur l'importance relative que l'on attache aux divers points de vue. Nous admettrons donc que celle-ci peut être traduite par des coefficients c_i, $i = 1, ..., n$, qui sont des nombres réels positifs quelconques dont nous noterons c la somme. C'est ainsi par exemple que si tous les points de vue sont jugés d'une égale importance on posera $c_i = 1$ (d'où $c = n$) ; si au contraire ils sont très fortement hiérarchisés de telle sorte que l'importance accordée à l'un d'entre eux soit toujours plus grande que celle accordée à tous les suivants réunis, on pourra poser $c_i = 2^{n-i}$ (d'où $c = 2^n - 1$) ; les coefficients affectés aux matières d'un concours fournissent un exemple intermédiaire.

On peut alors juger de la concordance plus ou moins bonne des divers points de vue en faveur d'une relation vérifiée par (e, e'), grâce à un *indicateur de concordance* $c(e, e')$ tel que le suivant inspiré des idées de A. de Condorcet [7] :

$$c(e, e') = \frac{1}{c} \sum_{i \in C(e,e')} c_i.$$

Cet indicateur présente les trois propriétés suivantes :

— il varie de 0 à 1 de façon non décroissante avec l'enrichissement de $C(e, e')$;

— il vaut 1 si et seulement si $(e, e') \in U_0$;

— il conserve sa signification, et ne conduit à aucune incohérence lorsqu'on subdivise un point de vue i en plusieurs autres que l'on met à sa place ; il faut naturellement que la somme des nouveaux coefficients égale c_i.

La figure 4 montre le tableau de concordance à double entrée $C = \{ c(e, e') \}$ relatif à l'exemple de la figure 2.

$$C = \begin{bmatrix} * & 0{,}40 & 0{,}10 & 0{,}70 & 0{,}70 & 0{,}70 \\ 0{,}90 & * & 0{,}60 & 0{,}90 & 0{,}90 & 0{,}90 \\ 0{,}90 & 0{,}80 & * & 0{,}70 & 0{,}90 & 0{,}90 \\ 0{,}40 & 0{,}40 & 0{,}30 & * & 1 & 1 \\ 0{,}40 & 0{,}10 & 0{,}30 & 0{,}40 & * & 1 \\ 0{,}30 & 0{,}10 & 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}60 & * \end{bmatrix}$$

Figure 4

Tableau de concordance déduit des données de la figure 2 et du système des coefficients :

$c_1 = 3$; $c_2 = 2$; $c_3 = 3$; $c_4 = 1$; $c_5 = 1.$

Il apparaît, en second lieu, difficile de négliger complètement ce à quoi conduisent les points de vue en discordance avec une relation vérifiée par (e, e'). En effet, même si l'indicateur de concordance est suffisamment proche de 1, on peut être fondé à vouloir tenir compte de la position dans les échelles K_i, $i \in D(e, e')$, des échelons $\gamma_i(e)$ et $\gamma_i(e')$ car, tout en vérifiant : $\gamma_i(e) < \gamma_i(e')$ ceux-ci peuvent être voisins, ou au contraire chacun à l'une des deux extrémités de l'échelle.

Pour apprécier une plus ou moins grande discordance sur la base des couples $(\gamma_i(e), \gamma_i(e'))i \in D(e, e')$, il est naturel de postuler (cf. Roy B. [14]) l'existence d'une relation permettant de comparer n'importe quelle paire d'échelons distincts pris dans une échelle K_i quelconque, à n'importe quelle autre paire d'échelons distincts pris dans une échelle K_j pour j quelconque, mais différent de i. Le préordre complet ainsi introduit traduit une hiérarchie des divergences des appréciations de deux aspects quelconques, point de vue par point de vue ; préordre dont on admet par conséquent, l'existence significative. Pour définir un tel préordre complet, il est commode de supposer (ce que nous ferons désormais bien que cela ne soit pas indispensable) que chaque échelon de chaque échelle peut être repéré par un nombre — appelé *repère* — et cela de telle sorte que la comparaison de deux paires d'échelons résulte directement de la comparaison des valeurs absolues des différences des repères associés aux échelons de chaque paire. La divergence — selon le point de vue i — d'appréciation de deux objets e et e' se trouve ainsi caractérisée par une telle différence ; celle-ci sera notée $|\gamma_i(e) - \gamma_i(e')|$ et appelée *écart*. Les repères servant à définir ces écarts pourront résulter dans certains cas d'un simple numérotage des échelons (propre à chaque échelle), alors qu'il faudra, dans d'autres cas, recourir à un « échelonnage » plus subtil.

Dans ces conditions, on peut introduire un indicateur de discordance $d(e, e')$ défini par :

$$d(e, e') = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad D(e, e') = \varnothing \\ \dfrac{1}{d} \operatorname*{Max}_{i \in D(e,e')} |\gamma_i(e') - \gamma_i(e)| & \text{si} \quad D(e, e') \neq \varnothing, \end{cases}$$

d désignant l'écart maximum qui existe entre les échelons extrêmes d'une même échelle. Ce nouvel indicateur présente des propriétés analogues à celles du précédent :

— il varie de 0 à 1 de façon non croissante avec l'appauvrissement de $D(e, e')$;

— il vaut 0 si et seulement si (1) $(e, e') \in U_0$;

— il conserve sa signification, et ne conduit à aucune incohérence ; lorsque l'on affine l'échelle K_i en insérant des échelons intermédiaires

(1) Les repères associés à deux échelons d'une même échelle étant supposés toujours différents.

entre les anciens, pourvu naturellement que les nouveaux repères soient cohérents avec les anciens.

Les valeurs de cet indicateur pour tous les couples (e, e') peuvent encore être rassemblées en un tableau de discordance D (cf. fig. 5).

$$D = \begin{bmatrix} * & 0{,}75 & 0{,}50 & 0{,}75 & 0{,}50 & 0{,}50 \\ 0{,}30 & * & 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}15 \\ 0{,}30 & 0{,}25 & * & 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}15 \\ 0{,}50 & 0{,}10 & 0{,}10 & * & 0 & 0 \\ 0{,}50 & 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}25 & * & 0 \\ 0{,}75 & 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}50 & 0{,}25 & * \end{bmatrix}$$

Figure 5

Tableau de discordance déduit de la figure 2 avec les repères suivants :

— points de vue 1, 2, 3 : $m = 0$, $p = 5$, $n = 10$, $b = 15$, $t = 20$;

— points de vue 4, 5 : $m = 4$, $p = 7$, $n = 10$, $b = 13$, $t = 16$.

2. — La relation de surclassement

Considérons maintenant deux nombres, compris entre 0 et 1, l'un p plutôt voisin de 1, l'autre q relativement proche de 0. Nous dirons, sur la base des n points de vue considérés et des seuils p et q, qu'on objet e *surclasse* un objet e' si et seulement si le couple (e, e') conduit à :

— un indicateur de concordance au moins égal à p ;

— un indicateur de discordance au plus égal à q.

La relation de surclassement ainsi définie est représentée par un graphe $G(p, q)$ (voir fig. 6) :

$$G(p, q) = (E, U(p, q))$$

avec :

$$(e, e') \in U(p, q) \Leftrightarrow c(e, e') \geqq p \qquad \text{et} \qquad d(e, e') \leqq q.$$

Ce graphe appelle trois remarques importantes que le lecteur justifiera sans peine :

— si $p \leqq p'$ et $q \geqq q'$, alors $G(p, q)$ admet $G(p', q')$ comme graphe partiel ;

— $G(1, q) = G(p, 0) = G_0$ qui est donc graphe partiel de $G(p, q)$ quels que soient p et q ;

— dès que $p < 1$ et $q > 0$, $G(p, q)$ n'est plus forcément transitif (bien que tous les G_i le soient) : ceci signifie tout simplement que si l'accord des divers points de vue est suffisant pour que e' surclasse e et e'' surclasse e', il n'en découle pas logiquement un accord suffisant pour que e'' surclasse e (voir fig. 6).

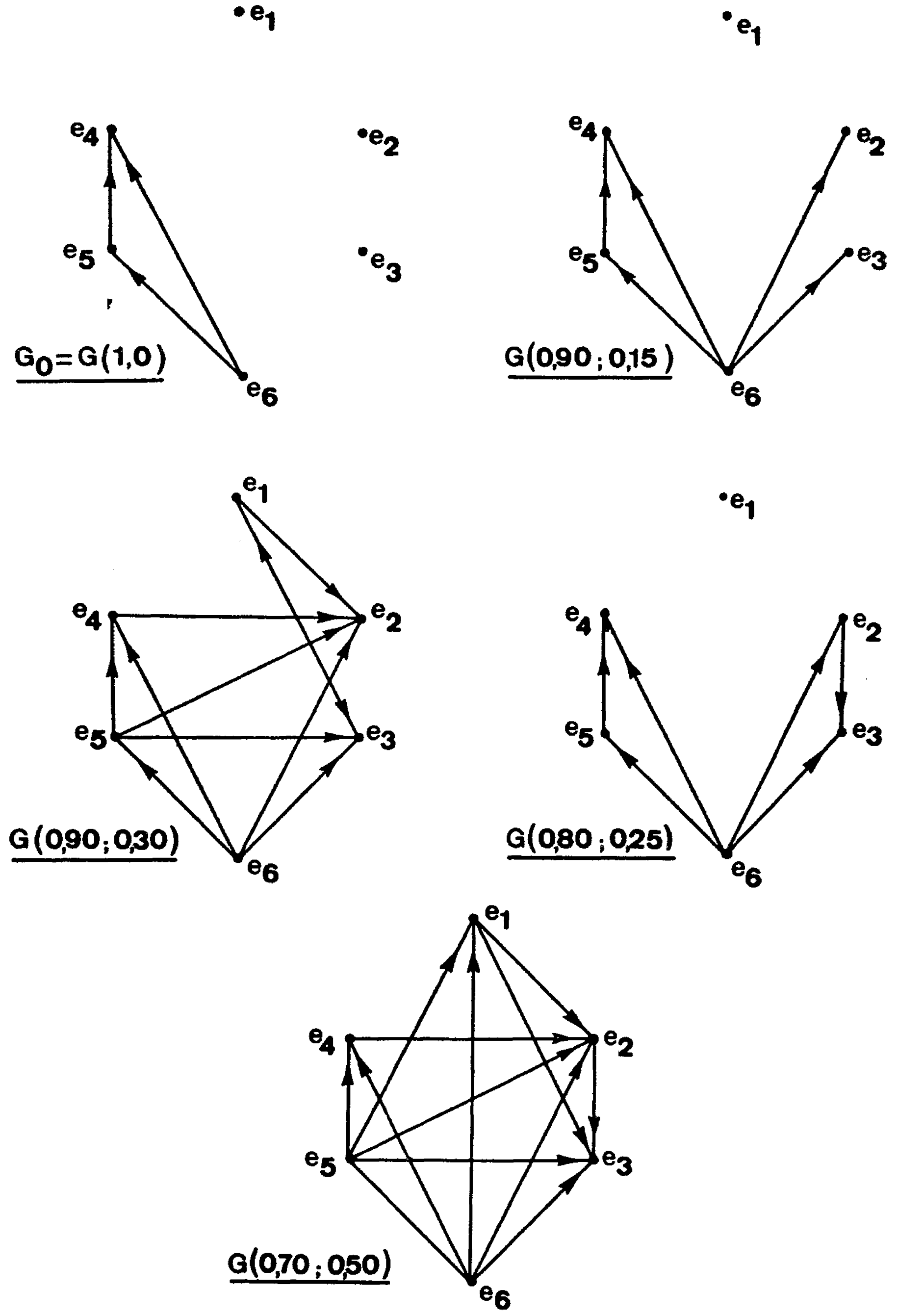

Figure 6
Exemples de relations de surclassement déduites des figures 4 et 5.

Il découle de cette définition qu'un objet e en surclasse un autre e', si et seulement si :

— une majorité suffisante (seuil p) se dégage parmi les points de vue (intervenant chacun comme autant de points de vue élémentaires que l'indique leur coefficient) pour placer e au moins aussi haut que e' ;

— aucun des points de vue en désaccord avec cette majorité ne révèle une supériorité trop fort (seuil q) de e' par rapport à e.

C'est en ce sens que la relation de surclassement peut apparaître comme une résultante convenable des divers points de vue sur laquelle on peut, pour des valeurs appropriées de p et de q, fonder une réponse aux problèmes posés au commencement du paragraphe A.3.

En fait, cette relation est bien adaptée (comme nous allons le montrer) au problème de la sélection de quelques-uns des objets de E (cf. exemple β du A.3). En revanche, elle l'est peut-être moins au problème de rangement en préordre complet de tous les objets de E (cf. exemple α du A.3) ; le lecteur trouvera quelques suggestions en fin d'article permettant de progresser vers des solutions originales de ce second problème.

3. — Le noyau comme base d'une dichotomie

Revenons donc, pour terminer, à l'exemple β du A.3. Supposons que l'on puisse raisonnablement se donner un seuil p tel que, pour déclarer un produit e prioritaire (quant à son lancement) par rapport à un produit e', il apparaisse nécessaire que la proportion (compte tenu des coefficients) des points de vue qui conduisent à juger e au moins aussi bon que e', dépasse p. Cette condition peut ne pas être jugée suffisante en raison de la faiblesse relative (par rapport à e') que peut présenter e sur certains points de vue. Supposons encore que l'on puisse définir un nouveau seuil q tel que la priorité paraisse pleinement justifiée si, la condition précédente étant remplie, cet écart relatif normé ne passe pas q. On sera alors en droit, pour tout arc $(e, e') \in U(p, q)$ *d'éliminer e' dès l'instant où l'on conserve e.*

Il ne reste plus qu'à examiner comment cette dernière proposition peut conduire à la sélection des produits appartenant à un sous-ensemble défini S et à l'élimination de ceux appartenant à $E - S$.

Il est assez naturel de vouloir imposer au sous-ensemble S les deux propriétés suivantes :

— *propriété de stabilité externe :*

$$\forall e' \in E - S \; \exists \, e \in S \qquad \text{tel que} \qquad (e, e') \in U(p, q)$$

ce qui signifie que tout produit éliminé est surclassé par au moins un des produits conservés ;

— *propriété de stabilité interne :*

$$\forall e' \in S \qquad \text{et} \qquad \forall e'' \in S : (e', e'') \notin U(p, q)$$

ce qui signifie qu'aucun produit sélectionné n'est surclassé par un autre produit sélectionné.

Les sous-ensembles de sommets d'un graphe qui possèdent conjointement ces deux propriétés de stabilité portent le nom de *noyau.* Or, on sait qu'un graphe quelconque n'admet pas nécessairement un noyau, et aussi qu'il peut en avoir plusieurs. Toutefois (et le lecteur voudra bien l'admettre), l'absence de circuits dans le graphe entraîne l'existence et l'unicité du noyau.

Seulement, il n'est pas impossible que le graphe $G(p, q)$ comporte quelques circuits. Leur présence suppose néanmoins des conditions très particulières qui expliquent leur rareté.

Soit néanmoins σ un éventuel circuit élémentaire de $G(p, q)$. La succession fermée de surclassements qu'expriment ses arcs fait apparaître une sorte de symétrie, d'indifférence, entre ses produits dont aucun, de par ses seules relations avec les autres, ne peut se différencier pour être choisi ou éliminé. Les produits de σ peuvent donc être regardés comme autant de variantes d'un produit fictif s qui leur serait globalement substituable.

Il est donc raisonnable de songer à substituer au sous-ensemble des produits formant σ, un seul produit s, soit que l'on remette à plus tard le choix, soit que l'on opte dès ce stade pour l'un d'entre eux. Il reste cependant à préciser dans quels cas s surclasse, ou est surclassé par un produit quelconque de $E - \sigma$. Il est naturel de poser :

— s surclasse $e \in E - \sigma$ s'il existe $e' \in \sigma$ tel que e' surclasse e,

— s est surclassé par $e' \in E - \sigma$ s'il existe $e \in \sigma$ tel que e est surclassé par e'.

On remarquera que cette transformation n'est autre que ce que l'on appelle en théorie des graphes le rétrécissement du circuit σ.

On peut ainsi justifier l'élimination progressive des divers circuits éventuels de $G(p, q)$ par simple rétrécissement (l'ordre dans lequel on procède est indifférent, comme le lecteur pourra s'en assurer). Ce travail peut d'ailleurs être exécuté de manière systématique en même temps que la recherche du noyau s'opère.

Il est ainsi possible d'isoler, de façon certaine et sans ambiguïté, un noyau S, sinon de $G(p, q)$ tout au moins du graphe sans circuit qui s'en déduit par rétrécissement de ceux qu'il pourrait posséder.

Il se peut que S n'ait qu'un seul élément, celui-ci surclassant tous les autres. C'est le cas de e_6 dans le graphe $G(0{,}70 ; 0{,}50)$ de la figure 6. Il suffit d'être plus exigeant sur l'un quelconque des deux seuils pour que le noyau englobe e_1 en plus de e_6. C'est évidemment là un phénomène très général. Lorsque pour des seuils retenus *a priori*, on est conduit à sélectionner un ensemble S ayant trop d'éléments, il faut en conclure que l'antagonisme des points de vue est tel que ces seuils ne peuvent donner lieu à une synthèse suffisamment riche en couples comparables. On renforcera en général l'élimination en étant moins exigeant sur l'un ou l'autre ou les deux seuils de concordance et de discordance. C'est ainsi que le noyau de $G\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ est toujours réduit à un seul élément, comme il est facile de le démontrer.

Un programme (disponible à la S.I.A.) écrit pour ordinateur C.D.C. permet lorsque :

$$|E| \leq 100 \qquad \text{et} \qquad n \leq 100$$

de calculer :

— les tableaux de concordance et de discordance,

— la relation de surclassement pour une série de couples p, q,

— les circuits éventuels du graphe pour chacun des couples p, q, considérés ;

— le noyau, après rétrécissement des éventuels circuits pour chacun des couples p, q, considérés (tout en mettant en évidence pour chacun des sommets du noyau ceux des autres sommets qu'il surclasse).

Pour :

$$|E| \# 25,\ n \# 50, \text{ et 5 couples } p,\ q$$

ces calculs sont effectués par l'ordinateur, en un temps de l'ordre de la minute. Le programme prévoit quelques possibilités supplémentaires pour lesquelles nous renvoyons aux documents de la SEMA [3] et [4].

C. — QUELQUES EXTENSIONS POSSIBLES

L'intérêt de la relation de surclassement déborde, en fait, le cadre du problème qui vient d'être étudié : grâce à cette relation on peut en effet aborder d'autres problèmes tels que ceux évoqués au A.2 et au A.3.α. Nous nous limiterons ici à quelques réflexions et remarques relatives à la définition de préordres (éventuellement complets) sur E, préordres non nécessairement réduits à deux classes comme c'était le cas ci-dessus.

1) Il est en premier lieu un préordre — non complet en général — qui mérite une attention particulière : c'est celui que l'on obtient par fermeture transitive du graphe $G(p, q)$. Nous le noterons $\widehat{G(p, q)}$. Faisons observer que ce préordre ne diffère pas de celui introduit par la fermeture transitive du graphe $G^0(p, q)$ déduit de $G(p, q)$ par rétrécissement de ses éventuels circuits. Or, l'ordre $\widehat{G^0(p, q)}$ est précisément celui qui est à distance minimum, au sens de la différence symétrique, de $G^0(p, q)$ (cf. Barbut [2]).

2) La première idée qui vient à l'esprit, pour définir un préordre complet sur E, suggère de prendre :

— pour première classe, le noyau S d'un graphe $G^0(p, q)$,

— pour seconde classe, le noyau S_2 du sous-graphe de $G^0(p, q)$ engendré par $E - S_1$,

— ...

Il est facile de vérifier que le préordre obtenu de la sorte risque fort d'être, à propos de nombreux couples d'éléments E, en contradiction avec la relation de surclassement. Toutefois, si on substitue à $G^0(p, q)$ sa fermeture transitive $G^0(p, q)$, le préordre obtenu par le procédé qui vient d'être décrit sera compatible avec la relation de surclassement. Ce préordre peut d'ailleurs s'obtenir directement : il regroupe en effet dans une première classe tous les éléments de E n'ayant aucun précédent dans $G^0(p, q)$, dans une seconde classe tous ceux n'ayant aucun précédent en dehors de la première classe, et ainsi de suite.

3) Une autre voie consiste à exploiter le fait que, à condition de ne pas être trop sévère sur les seuils p, q, ceux-ci peuvent toujours être choisis de telle sorte que $G(p, q)$ soit complet. Or, tout graphe complet définit un préordre complet. On peut donc se proposer de chercher un couple (voire tous les couples) p^*, q^* que nous qualifierons d'efficace et cela, relativement soit au graphe G^0, soit au graphe $\widehat{G^0}$.

Par couple (de seuils) efficace relativement au graphe G^0 (par exemple) il faut entendre deux valeurs p^*, q^* de p et q, telles que :

— $G^0(p^*, q^*)$ est complet,

— quel que soit $\varepsilon > 0$, ni $G^0(p^* + \varepsilon, q^*)$, ni $G^0(p^*, q^* - \varepsilon)$ ne sont complets.

Ces différentes façons de faire, pour obtenir un préordre complet, apparaissant en quelque sorte comme la résultante des préordres complets traduits par les graphes G_i, mériteraient d'être étudiés tant du point de vue de leur signification que d'un point de vue opératoire (pour trouver, par exemple, un couple efficace p^*, q^* particulièmreent intéressant, ou mieux encore tous les couples efficaces).

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. J. Arrow, *Social choice and individual values*, Wiley.

[2] M. Barbut, Note sur les ordres totaux à distance minimum d'une relation binaire donnée (Cas fini-distance de la différence symétrique), *Mathématiques et Sciences Humaines*, n° 17, 1967.

[3] R. Benayoun, B. Roy, B. Sussmann, *ELECTRE : Une méthode pour guider le choix en présence de points de vue multiples*, Note de travail n° 49 de la Direction Scientifique de la SEMA, juin 1966.

[4] R. Benayoun, B. Sussmann, *Manuel de référence du programme ELECTRE*, Note de Synthèse et Formation n° 25 de la Direction Scientifique de la SEMA, mai 1966.

[5] P. Bod, *Linearis programozas tobbn Egyidejuleg adott Celfüggvény szerint*, Hungarian Academy of Sciences, vol. VIII, séries B, fasc. 4, 1963.

[6] P. Buffet, *Algèbre moderne et théorie des graphes* (Applications aux sciences économiques et sociales), à paraître chez Dunod, 1968.

[7] A. de Condorcet, *Essai d'application de l'analyse à la probabilité des décisions prises à la pluralité des voix* (1786).

[8] P. C. Fishburn, *A note on recent developments in additive utility theories for multiple-factor situations*, Operations Research, vol. 14, n° 6, november-december 1966, Printed in U.S.A.

[9] P. C. FISHBURN, Methods of estimating additive utilities, *Management Science*, vol. 13, nº 7, march 1967, Printed in U.S.A.

[10] M. G. KENDALL, *Rank correlation methods*, Griffin.

[11] R. LAFFY, *La méthode MARSAN pour la recherche de produits nouveaux*, Communication au congrès ESOMAR, Copenhague, septembre 1966.

[12] M. MARC, *La recherche opérationnelle appliquée à l'élaboration des plans média*, Actes du Séminaire de l'Institut de Recherches et d'Études Publicitaires, octobre 1966.

[13] B. ROY, *Algèbre moderne et théorie des graphes* (Applications aux sciences économiques et sociales), à paraître chez Dunod, 1968.

[14] B. ROY, *A propos de l'agrégation d'ordres complets : quelques considérations théoriques et pratiques*, Colloque du C.N.R.S. sur la décision, Aix-en-Provence, juillet 1967.

[15] E. VALETTE, *Le classement selon plusieurs critères*, compte rendu du Séminaire sur les modèles mathématiques dans les sciences sociales, 1962-1963.