Revue d'histoire des mathématiques,
3 (1997), p. 99–136.

LES PREMIÈRES DÉMONSTRATIONS DE LA FORMULE INTÉGRALE DE FOURIER

Silvia ANNARATONE (*)

RÉSUMÉ. — Fourier, Cauchy et Poisson ont à la même époque et, semble-t-il, indépendamment, introduit la transformée intégrale qui est devenue depuis l'un des outils les plus féconds de l'analyse et de ses applications. Plusieurs démonstrations de convergence de la formule intégrale correspondante ont été proposées par Cauchy et Poisson, alors que Fourier, auquel est attribuée la paternité de la formule, n'en a donné qu'une seule. Une autre preuve est due à un mathématicien peu connu, Camille Deflers.

Une comparaison des diverses démonstrations présentées dans les années 1810 et 1820 conduit à en proposer une classification d'après la méthode utilisée. On repère ainsi les preuves utilisant la technique du facteur auxiliaire (Cauchy, Poisson), celles fondées sur une « évaluation du poids de l'intégrale » (Deflers, Fourier, Poisson), et enfin celle de Cauchy de 1827 utilisant le calcul des résidus.

ABSTRACT. — THE INITIAL PROOFS FOR THE FOURIER INTEGRAL THEOREM. — Fourier, Cauchy and Poisson, working during the same period of time, and – so it would appear – independently, introduced the integral transform which has, over the years, proved itself to be one of the most powerful instruments to gain new results in the field of analysis and its applications. A number of proofs of the convergence of the corresponding integral formula were adduced by Cauchy and Poisson, whereas Fourier, to whom paternity of the formula is ascribed as a matter of course, only presented the single one. Yet another proof was arrived at by a little known mathematician, Camille Deflers.

The paper proceeds with a comparative survey of the various proofs propounded in the 1810s and 1820s, leading to a suggested classification of such proofs, on the basis of the method involved. One may thus distinguish those proofs using the auxiliary factor technique (Cauchy, Poisson), those relying on an "evaluation of the weight of the integral" (Deflers, Fourier, Poisson), and finally that presented by Cauchy, bringing in the calculus of residues.

INTRODUCTION

La *Théorie analytique de la chaleur*, publiée par Fourier en 1822, constitue, on le sait, un texte novateur et fondamental, à la fois dans

(*) Texte reçu le 4 juillet 1994, révisé le 19 février 1997.
Silvia ANNARATONE, Dipartimento di matematica, via Saldini 50,
20133 Milano (Italia).
Courrier électronique : annaratone@vmimat.mat.unimi.it.

le domaine de la physique et dans celui des mathématiques. On y trouve notamment l'utilisation systématique de la représentation d'une fonction « arbitraire » par une série « de Fourier »[1] ou à l'aide d'une intégrale « de Fourier »[2]. Ces innovations analytiques étaient déjà présentes, en 1807 et 1811 respectivement, dans des mémoires non publiés alors (un résumé étant paru en 1816) ; mais c'est seulement dans son ouvrage de 1822 que Fourier aborde la question de la convergence des séries et de l'intégrale.

S'il existe de nombreux travaux sur l'histoire des séries de Fourier et de leur convergence[3], l'intégrale de Fourier a, par contre, assez peu attiré l'attention des historiens des mathématiques. Citons cependant le célèbre mémoire de H. Burkhardt[4] sur les développements en séries de fonctions oscillantes, ainsi qu'un article d'A. Dahan Dalmedico [1992] qui évoque

---

[1] Par l'expression « série de Fourier de la fonction f », on désigne de manière générale une série trigonométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ où les coefficients a_n et b_n sont définis par

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n \geq 1),$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

On sait que de telles séries avaient déjà été utilisées au XVIII^e siècle, notamment par Euler.

[2] L'« intégrale de Fourier de la fonction f » est une expression du type

$$k\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\,\mathrm{e}^{-i\alpha x}\,\mathrm{d}\alpha$$

où k est une constante que l'on peut choisir opportunément. Aujourd'hui, l'intégrale de Fourier de la fonction f est plutôt appellée la « transformée de Fourier » de f et on la note souvent $\hat{f}$. Cette notion n'a évidemment d'intérêt que si l'intégrale est convergente presque partout.

[3] Voir notamment : Riemann [1857], Sachse [1880], Gibson [1893], et, plus récemment, Grattan-Guinness [1970, ch. 5 ; 1990, ch. 9], Mackey [1980], Bottazzini [1986, p. 57–78, 183-196 ;1990, p. 83–87].

[4] Burkhardt consacre à l'intégrale de Fourier quelques paragraphes dans le chapitre « Darstellung willkürlicher Functionen durch bestimmte Integrale. Fortbildung der Reihenentwicklungen » [Burkhardt 1908, p. 423–447]. Il ne mentionne que deux démonstrations de convergence, celles de Cauchy et de Poisson de 1815–1816, et ceci dans le cadre de l'étude d'équations aux dérivées partielles liées à la résolution de problèmes physiques : c'est ce qui intéresse particulièrement Burkhardt.

l'application de la transformée de Fourier à la résolution des équations aux dérivées partielles chez Cauchy. On trouve aussi des éléments sur l'histoire de l'intégrale de Fourier dans des ouvrages plus généraux, notamment ceux d'I. Grattan-Guinness[5], mais, il n'y a pas, pour autant que nous le sachions, de monographie consacrée au problème de la convergence de la formule intégrale. D. Laugwitz formule aussi d'intéressantes considérations sur ce thème dans un article consacré à la convergence des séries et des intégrales vers 1820. Il interprète certaines intégrales en termes de fonctions delta et d'analyse non standard [1989, p. 219, 227–232] ; ce sont, en grande partie, les mêmes intégrales que Fourier, Cauchy et Poisson utilisent dans leurs démonstrations de convergence de la formule de représentation.

Afin d'unifier les diverses terminologies et notations utilisées par Fourier, Cauchy et Poisson, l'expression « formule intégrale » sera ici toujours entendue comme l'une des égalités équivalentes suivantes[6]

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}q \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\cos q(x-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha, \tag{1}$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\,\mathrm{e}^{iq(x-\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}q, \tag{2}$$

tandis que l'expression « démonstration de convergence », rapportée à la formule intégrale, renverra à tout processus démonstratif de cette formule visant à en attester la validité. Même si les théorèmes sont nombreux, et les techniques utilisées par chaque auteur différentes, dans tous les cas examinés ici, démontrer l'égalité (1) équivaut à démontrer la convergence d'une suite d'intégrales impropres, ou généralisées, par des passages à la limite sous le signe intégral.

Dans cet article, nous considérons seulement la période de l'histoire de la théorie qui va de la découverte de l'intégrale de Fourier, en 1811, à la démonstration de convergence donnée par Cauchy en 1827. Comme

[5] Voir Grattan-Guinness [1970, p. 42–44 ; 1990, vol. 2, § 9.3.2, 10.3.6 et 11.6.1], et aussi Kline [1972, p. 679–681].

[6] Cauchy est le premier à avoir introduit la notation exponentielle, dans son mémoire de 1823 consacré à la résolution des équations aux dérivées partielles [Cauchy 1823a, p. 276]. Nous appelons quelquefois « formule de représentation » la formule intégrale (1) ou (2).

on le verra, cette période, même brève, est d'un grand intérêt pour le sujet. Nous rappellerons d'abord les circonstances de la découverte de la formule intégrale chez Fourier, Cauchy et Poisson, avant d'étudier en détail la question de la convergence.

1. LA DÉCOUVERTE DE LA FORMULE INTÉGRALE

Même si elle porte traditionnellement le nom de Fourier, on ne peut pas attribuer de manière exclusive à celui-ci la découverte de la formule intégrale. En effet, à la même époque et au sein du même milieu scientifique et académique, Cauchy et Poisson sont parvenus indépendamment, semble-t-il, à un résultat analogue.

Fourier

En 1812, Fourier remporte le prix de l'Institut de France pour son manuscrit, déposé en 1811, sur la transmission de la chaleur entre des masses disjointes ou dans les corps continus de dimension finie ou infinie. La partie consacrée aux corps continus de dimension finie est de loin la plus développée. On y trouve l'utilisation systématique du développement des fonctions en série « de Fourier ». L'intégrale n'apparaît que dans le chapitre XI du manuscrit où il traite de la transmission de la chaleur dans les corps dont une dimension est infinie[7]. Dans le mémoire de 1811, Fourier aborde ce problème sous la seule forme unidimensionnelle[8].

---

[7] Le manuscrit de 1811 n'est en fait que l'extension d'une précédente recherche transmise en 1807 par Fourier à l'Académie des sciences. Cette version de 1807 a rencontré la ferme opposition de Lagrange et n'a pas alors été acceptée. (Elle n'a été publiée qu'en 1972, par I. Grattan-Guinness et J.R. Ravetz.) Dans le texte de 1807, qui ne contient pas la partie relative aux corps continus de dimension infinie, l'intégrale de Fourier ne figure pas. Grattan-Guinness [1970, p. 42] a signalé l'influence de Laplace sur Fourier dans le passage à l'expression intégrale des fonctions.

[8] Dans sa *Théorie analytique de la chaleur*, Fourier étend le problème au cas tridimensionnel [Fourier 1822, p. 427–461]. En 1811, il se limite à examiner la transmission de la chaleur dans un prisme de faible épaisseur et de longueur infinie dont seule une partie intermédiaire est initialement chauffée. Fourier imagine que le prisme coïncide avec un axe de coordonnées dont l'origine est le milieu de la partie

Après une série de considérations sur la nature physique du problème[9], Fourier [1811/1824, p. 486–487] se ramène à la recherche d'une fonction $u(x,t)$ satisfaisant à la double condition suivante

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ &u(x,0) = \varphi(x). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

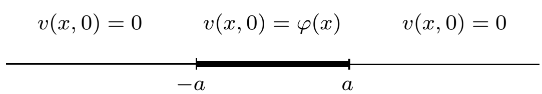
L'absence de limitations spatiales dans la description du problème physique, correspond analytiquement à l'absence de conditions aux limites.

Fourier considère d'abord une fonction paire φ et écrit la solution sous la forme d'une série infinie

$$u(x,t) = a_1\,\mathrm{e}^{-kq_1^2 t}\cos q_1 x + a_2\,\mathrm{e}^{-kq_2^2 t}\cos q_2 x + \text{etc.}, \tag{4}$$

comme il l'avait déjà fait en présence de conditions aux limites[10]. Puis il suppose que

chauffée. En notant $v(x,t)$ la température au temps t du point dont l'abscisse est x, on peut représenter la situation physique examinée de la manière suivante :



En posant $v(x,t) = \mathrm{e}^{-ht}u(x,t)$, où h désigne une constante physique, il parvient au système (3) qui correspond à ce qu'on appelle aujourd'hui un « problème de Cauchy ».

[9] Nous n'exposerons pas ici la manière dont Fourier, Cauchy et Poisson sont parvenus aux équations différentielles qui décrivent le modèle physique. On peut se reporter, par exemple, à l'ouvrage où G. Bachelard traite de l'histoire de la théorie physique de la chaleur [1928].

[10] Dans le chapitre V du mémoire de 1811, Fourier, dans l'hypothèse où la fonction $u(x,t)$ est périodique par rapport à x (de période $2\pi r$), exprime la solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sous la forme (nous utilisons une notation un peu modernisée) :

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-k(i^2/r^2)t}\Big(a_i\cos(i/r)x + b_i\sin(i/r)x\Big)$$

où les a_i et b_i sont calculés (une fois posée la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$) par les formules intégrales rappelées *supra* note 1 [Fourier 1811/1824, p. 320 *sq.*].

«*les valeurs* q_1, q_2, q_3, *etc., croissent par degrés infiniment petits, comme les abscisses* q *d'une certaine courbe en sorte qu'elles deviennent égales à* $\mathrm{d}q$, $2\,\mathrm{d}q$, $3\,\mathrm{d}q$, *etc.,* $\mathrm{d}q$ *étant la différentielle constante de l'abscisse et que les valeurs* a_1, a_2, a_3, *etc. sont proportionnelles aux ordonnées* Q *de la même courbe, et qu'elles deviennent égales à* $Q_1\,\mathrm{d}q$, $Q_2\,\mathrm{d}q$, $Q_3\,\mathrm{d}q$, *etc.,* Q *étant une certaine fonction de* q» [Fourier 1811/1824, p. 487].

Il obtient ainsi la solution sous la forme

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} Q(q)\,\mathrm{e}^{-kq^2t}\cos qx\,\mathrm{d}q.$$

Une fois la condition initiale posée

$$\varphi(x) = u(x,0) = \int_0^{+\infty} Q(q)\cos qx\,\mathrm{d}q, \tag{5}$$

il lui reste à déterminer la fonction $Q(q)$ qui satisfait à (5), $\varphi(x)$ étant une fonction donnée. Utilisant encore une fois le développement en série (4), il parvient à

$$Q(q) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos q\alpha\,\mathrm{d}\alpha. \tag{6}$$

Substituant l'expression (6) dans l'égalité (5), Fourier obtient la formule intégrale (relative à une fonction paire) :

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}q\cos qx\int_0^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos q\alpha\,\mathrm{d}\alpha.$$

Il établit ensuite la formule intégrale analogue lorsque la fonction donnée φ est impaire

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}q\sin qx\int_0^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin q\alpha\,\mathrm{d}\alpha. \tag{7}$$

Fourier n'écrit pas alors la formule intégrale (1), mais il indique qu'en ajoutant les deux formules correspondant aux cas pair et impair, «*on a en cosinus l'expression* [de la somme], *qui peut être une fonction quelconque*» [1811/1824, p. 500][11].

[11] La formule intégrale (1) apparaît pour la première fois explicitement dans la *Théorie* [Fourier 1822, p. 408].

Bien que ce mémoire de 1811 vaille à Fourier le prix de l'Institut de France, il n'a paru qu'en 1824 et 1826, en deux parties, dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences.* Entre-temps, en 1822, Fourier a publié la *Théorie analytique de la chaleur*, qui, pour ce qui touche notamment à la formule intégrale, constitue une extension significative du manuscrit de 1811. Dans la *Théorie*, on trouve entre autres la première et unique démonstration donnée par Fourier de la convergence de la formule intégrale, démonstration absente du texte de 1811.

Cauchy

La découverte de la formule de représentation par Cauchy a une histoire étonnamment similaire. En 1815, à l'occasion du Grand Prix de Mathématiques, Cauchy adresse à l'Académie des sciences un manuscrit relatif à la propagation des ondes à la surface d'un liquide. Celui-ci contient une formulation et la première démonstration de convergence de la formule intégrale. Dans ce mémoire, Cauchy utilise la formule intégrale une première fois dans le cas stationnaire. Il se propose de décrire l'état initial du liquide, c'est-à-dire, l'impulsion initiale en chaque point, lorsqu'on connaît à l'origine la forme de la surface extérieure (exprimée par l'équation $y = F(x,z)$) et les forces qui agissent sur elle (c'est-à-dire l'impulsion initiale à la surface $q_0(x, F(x,z), z) = f(x,z)$) [Cauchy 1815/1827, p. 7].

En éliminant d'abord l'une des dimensions pour simplifier et en supposant que la surface est, au début, en état de repos, il parvient à un système du type suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 q_0}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 q_0}{\partial y^2} = 0, \\ q_0(x,0) = f(x). \end{cases}$$

En supposant de plus que l'impulsion q_0 ne devient pas infinie pour y tendant vers $-\infty$ (c'est-à-dire, physiquement, pour de très grandes profondeurs), on obtient l'intégrale de l'équation aux dérivées partielles sous la forme

$$(8)\qquad q_0(x,y) = \int_0^{+\infty} \cos mx\, \mathrm{e}^{my} \varphi(m)\, \mathrm{d}m + \int_0^{+\infty} \sin mx\, \mathrm{e}^{my} \psi(m)\, \mathrm{d}m,$$

où φ et ψ sont des fonctions arbitraires. La condition initiale conduit à

$$(9)\qquad f(x) = \int_0^{+\infty} \cos mx\, \varphi(m)\, \mathrm{d}m + \int_0^{+\infty} \sin mx\, \psi(m)\, \mathrm{d}m$$

et il s'agit à nouveau de résoudre un problème d'inversion, apparemment plus compliqué que celui de Fourier.

En réalité, Cauchy le ramène à un problème tout à fait analogue, en observant que l'expression (9) est équivalente aux égalités

$$\int_0^{+\infty} \cos mx\, \varphi(m)\, \mathrm{d}m = \tfrac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) = F_1(x), \tag{10}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin mx\, \psi(m)\, \mathrm{d}m = \tfrac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) = F_2(x). \tag{11}$$

Il obtient alors les solutions des équations (10) et (11)

$$\varphi(m) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos m\mu\, F_1(\mu)\, \mathrm{d}\mu, \tag{12}$$

$$\psi(m) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin m\mu\, F_2(\mu)\, \mathrm{d}\mu, \tag{13}$$

en renvoyant, pour la démonstration, à la note VI du mémoire[12].

Comme précédemment pour Fourier, le mémoire de Cauchy, bien que remportant le prix de l'Académie des sciences en 1815, n'est publié que tardivement, en 1827, bien après que le lauréat ait, à plus d'une occasion, démontré et utilisé la formule intégrale. Historiquement, les causes de ce retard ne sont pas simples à reconstituer[13]. Quoi qu'il en soit, juste avant l'échéance du concours, Poisson, qui en tant qu'académicien ne pouvait pas concourir, annonce la rédaction d'un mémoire sur le même thème (la propagation des ondes à la surface d'un liquide) où il utilise et démontre à son tour la formule intégrale.

Poisson

Son travail a paru assez rapidement dans les *Mémoires de l'Académie des sciences* [Poisson 1816] ; c'est la première publication de la formule

[12] Le manuscrit de 1815 est composé de trois parties et de treize notes. La première partie est consacrée au problème dont nous venons de parler. Dans la deuxième, Cauchy donne « *les équations qui déterminent, à une époque quelconque du mouvement, l'état de la masse fluide et celui de sa surface* » ; la troisième partie contient « *les lois générales qui résultent des formules données dans la seconde* » [Cauchy 1815/1827, p. 7]. Au cours des années suivantes, Cauchy a écrit sept notes supplémentaires qui, au moment de la publication du mémoire en 1827, ont été ajoutées aux notes originelles.

[13] Pour des détails sur les vicissitudes du manuscrit après 1815, nous renvoyons à la biographie de Cauchy par B. Belhoste [1991, p. 87–90].

intégrale dans le monde académique. Poisson utilise la formule intégrale au cours d'un processus démonstratif assez obscur et parfois difficile à suivre. Au point de vue physique, il s'agit de décrire le mouvement d'un fluide incompressible et homogène dont la densité δ est constante et la profondeur h finie. Le fluide, dont la surface est supposée voisine de son état de repos, n'est soumise ensuite qu'à la force de gravité.

Poisson, dans le cas d'une seule dimension horizontale, parvient au système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \\ \varphi(x,0,0) = F(x), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0,0) = f(x), \end{cases}$$

auquel s'ajoutent les conditions aux limites[14]

$$\begin{cases} g\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 & \text{pour} \quad z = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 & \text{pour} \quad z = h. \end{cases}$$

$F(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions données et la fonction $\varphi(x,z,t)$ représente, à une constante près, l'impulsion des points de coordonnées (x,z) à l'instant t.

Poisson fournit la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\varphi(x,z,t) = \big[A(t)\,\mathrm{e}^{-a(t)z} + A'(t)\,\mathrm{e}^{a(t)z}\big]\cos\big[a(t)x + a'(t)\big]$$

où A, A', a, a' sont des fonctions de t.

En imposant les conditions aux limites et grâce à la linéarité de l'équation, il détermine la solution suivante du problème

$$\begin{aligned} \text{(14)} \qquad \varphi(x,z,t) = \sum \big[\mathrm{e}^{a(h-z)} + \mathrm{e}^{-a(h-z)}\big]\cos(ax + a') \\ \times (B\sin ct + B'\cos ct), \end{aligned}$$

[14] Même si le problème physique est non stationnaire, la présence d'une équation aux dérivées partielles elliptique se justifie par l'hypothèse implicite d'un mouvement irrotationnel ($\operatorname{rot}\boldsymbol{u} = 0$, où $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y)$ désigne le vecteur vitesse). La variable temporelle fait par contre son apparition dans la première des conditions aux limites, dite aujourd'hui « condition de Bernoulli ». Enfin, c'est à l'hypothèse de profondeur finie (Cauchy la supposait infinie) que l'on doit la deuxième condition aux limites.

où a, a', B et B' sont maintenant des constantes, le symbole $\sum$ indiquant des sommes calculées par rapport à toutes les valeurs possibles de ces constantes.

L'introduction des conditions initiales donne

$$F(x) = \sum B'(\mathrm{e}^{ah} + \mathrm{e}^{-ah})\cos(ax + a'), \tag{15}$$

$$f(x) = \sum Bc(\mathrm{e}^{ah} + \mathrm{e}^{-ah})\cos(ax + a'), \tag{16}$$

ce qui correspond à un problème d'inversion. Même si apparemment les conditions (15) et (16) ont peu à voir avec l'intégrale de Fourier, c'est ici que Poisson introduit la formule intégrale dont il donne alors une démonstration de convergence et énonce :

« *Quelle que soit la fonction fx, continue ou discontinue, pourvu qu'elle ne devienne infinie pour aucune valeur réelle de x, on aura, pour toutes les valeurs réelles de cette variable,*

$$fx = \frac{1}{\pi}\iint f\alpha.\cos.(ax - a\alpha).\,\mathrm{e}^{-ak}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}\alpha \tag{17}$$

cette intégrale double étant prise depuis $\alpha = -1/0$ jusqu'à $\alpha = +1/0$, et depuis $a = 0$ jusqu'à $a = 1/0$ » [Poisson 1816, p. 85], (k étant une quantité positive qu'il supposera infiniment petite ou nulle après l'intégration).

Une fois la formule intégrale introduite, et sa convergence démontrée, Poisson donne l'impression de vouloir l'utiliser à tout prix, même lorsque cette utilisation peut paraître forcée. Considérant les signes de sommation dans les formules (15) et (16) comme des signes d'intégration double, il fait en sorte que les deuxièmes membres de ces formules prennent la forme (17). À cette fin, il pose

$$\begin{aligned} a' &= -a\alpha, \\ B' &= \frac{F(\alpha)\,\mathrm{e}^{-ak}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}a}{\pi(\mathrm{e}^{ah} + \mathrm{e}^{-ah})}, \\ B &= \frac{f(\alpha)\,\mathrm{e}^{-ak}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}a}{\pi c(\mathrm{e}^{ah} + \mathrm{e}^{-ah})}. \end{aligned}$$

En remplaçant les expressions de a', B et B' dans la solution (14), il obtient finalement

$$\varphi(x,z,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{a(h-z)} + \mathrm{e}^{-a(h-z)}}{\mathrm{e}^{ah} + \mathrm{e}^{-ah}} \cos(ax - a\alpha)\,\frac{\sin ct}{c}\,\mathrm{d}a$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{a(h-z)} + \mathrm{e}^{-a(h-z)}}{\mathrm{e}^{ah} + \mathrm{e}^{-ah}} \cos(ax - a\alpha)\cos ct\,\mathrm{d}a.$$

Comparaisons

Les analogies entre les trois découvertes sont nombreuses. Elles se situent d'abord au sein du même contexte scientifique. Il s'agit, dans chacun des cas, de décrire, puis de résoudre un problème issu de la physique. En outre, la description de l'état du système physique conduit dans les trois cas à des équations aux dérivées partielles du second ordre, linéaires, à coefficients constants (l'équation « de la chaleur » pour Fourier et celle dite « de Laplace » pour Cauchy et Poisson) dont la solution est exprimée sous la forme d'une représentation intégrale. Au cours de la résolution, la transformée « de Fourier » apparaît lorsque sont posées les conditions initiales, et que se présente un problème d'inversion.

La manière d'introduire et d'utiliser la formule intégrale est cependant différente chez les trois auteurs. Pour Fourier il s'agit d'étendre la méthode du développement en série trigonométrique, utilisée pour obtenir la solution du problème physique dans le cas discret, en une méthode de représentation intégrale dans le cas continu[15]. Fourier est explicite à ce propos ; il est convaincu que chaque développement en série de Fourier peut se transformer en une représentation sous la forme d'une intégrale :

---

[15] Dans le cas du mouvement de la chaleur dans une armille, Fourier résout l'équation $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, avec la condition aux limites $u(x) = u(x+2\pi r)$, en exprimant la solution sous la forme d'une série trigonométrique (cf. *supra* note 10).

Pour décrire le mouvement de la chaleur dans une barre infinie, il utilise la même équation, mais sans condition aux limites. Cela signifie que les coefficients $h = i/r$ (i entier) peuvent prendre toutes les valeurs réelles, c'est-à-dire appartiennent à un ensemble continu. Du fait de cette propriété (et de la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$), au lieu de la série, solution du cas « discret », Fourier [1822, p. 401] obtient l'intégrale double

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha)\,\mathrm{e}^{-kq^2t}\cos q(x-\alpha)\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}\alpha,$$

qui est solution du problème « continu ».

«*Lorsque, dans les séries convergentes que cette analyse fournit* [il se réfère au développement en série des solutions des problèmes physiques abordés précédemment]*, on donne aux quantités qui désignent les dimensions une valeur infinie, chacun des termes devient infiniment petit, et la somme de la série n'est autre chose qu'une intégrale. On pourrait passer directement de la même manière, et sans aucune considération physique, des diverses séries trigonométriques que nous avons employées aux intégrales définies*» [Fourier 1811/1824, p. 496].

Comme on l'a déjà remarqué, en 1811 Fourier ne s'est pas interrogé sur la convergence de la formule intégrale. Si, dans la *Théorie analytique de la chaleur*, il donne plus d'importance à ces questions, son attitude reste pourtant plutôt celle d'un physicien. Les équations différentielles considérées proviennent toutes de problèmes physiques et, même s'il utilise en pratique une méthode standard pour chercher les solutions, il ne s'intéresse pas à la généralisation de cette méthode en l'étendant à des classes plus générales d'équations. La question de la généralité des solutions trouvées, ou de l'unicité, ne semble pas avoir d'importance pour Fourier : la solution est unique parce qu'elle décrit un phénomène physique qui est lui-même unique.

À la différence de Fourier, Cauchy est très attentif aux questions proprement mathématiques qui concernent la formule intégrale. Chez lui, la découverte de cette formule, même si elle découle de la résolution d'un problème de mécanique, se produit d'une manière relativement autonome. Il ne s'agit pas cette fois d'une extension du cas discret au cas continu et sa démonstration de convergence est sans rapport avec le problème physique originel. À la fin de cette démonstration, Cauchy [1815/1827, note VI] cherche à établir quelles sont les conditions de régularité de la fonction à intégrer dans la formule intégrale. En général, pour que la formule de représentation soit vraie, il faut que la fonction $F(\alpha)$ dans l'expression (1) ait une valeur finie pour toutes les valeurs positives de α et, implicitement, il la considère comme infiniment petite pour α tendant vers l'infini. Dans le cas où la fonction $F(\alpha)$ n'est pas infiniment petite, mais seulement bornée pour α tendant vers l'infini, Cauchy suggère de la multiplier par $\mathrm{e}^{-k\alpha}$. De cette façon, l'intégrale devient convergente et, pour k tendant vers zéro, on retrouve bien la formule de représentation (1). De manière analogue, si la fonction $F(\alpha)$ ne reste pas bornée pour α tendant vers l'infini, on peut la multiplier[16] par le facteur $\mathrm{e}^{-k\alpha-k[F(\alpha)]^2}$. Comme on le verra par la suite, ce type de considération servira de fondement à ses trois premières démonstrations de convergence.

En ce qui concerne les équations aux dérivées partielles, la tendance de Cauchy à rechercher la plus grande généralité est encore plus nette. Dans son mémoire[17] de 1823, il parvient à trouver une méthode de résolution pour toutes les équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants de n'importe quel ordre et, pour cela, il utilise d'une façon déterminante les propriétés de la formule intégrale.

Le contenu du mémoire de Poisson sur la théorie des ondes peut laisser à penser que l'auteur, au cours de sa rédaction, a lu le mémoire de Cauchy sur le même sujet (voir, par exemple, [Poisson 1816, p. 85–86]). Il s'agit d'abord de la façon générale et *a priori* dont il introduit la formule intégrale. Chez Poisson, la découverte de cette formule ne semble être l'aboutissement ni d'une extension du discret au continu comme chez Fourier, ni directement de la résolution du problème d'inversion. Une deuxième raison concerne la démonstration de convergence de la formule donnée par Poisson au cours du même mémoire. Les conditions imposées, comme la technique du facteur auxiliaire utilisée, sont les mêmes que celles de Cauchy[18]. La différence entre les deux démonstrations réside en ce que

---

[16] Même si cette dernière observation est intéressante, la suggestion qu'elle offre est assez difficile à appliquer. En effet, une fois la fonction $F(\alpha)$ multipliée par le facteur $\mathrm{e}^{-k\alpha-k[F(\alpha)]^2}$, il n'est pas simple de prévoir le comportement de l'intégrale lorsque k tend vers zéro.

[17] Voir Cauchy [1823a]. Il s'agit d'un mémoire très structuré : Cauchy consacre essentiellement la deuxième partie à la résolution des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants, après avoir donné dans la première tous les outils mathématiques qui lui paraissent nécessaires pour cette résolution. Parmi ces outils, il y a, avant tout, la formule intégrale de Fourier dont il donne à cette occasion une nouvelle démonstration de convergence (la troisième).

Dans la dernière partie du mémoire, Cauchy donne des résultats concernant la valeur principale d'une intégrale et les intégrales singulières, qu'il a aussi exposés dans [1814/1827, p. 388-394] et dans [1823b, leçons 24, 25 et 34]. Il utilise ces résultats pour donner des formules qui permettent d'exprimer, par des intégrales, des sommes de fonctions des racines d'une équation algébrique ou transcendante, et applique cela aux équations aux dérivées partielles.

[18] Les deux auteurs imposent que la fonction F sous le signe d'intégration dans la formule (1) soit finie pour toutes les valeurs réelles (positives dans le cas de Cauchy) de la variable et, comme on le verra par la suite, ils utilisent le même facteur auxiliaire e^{-kq} pour démontrer la convergence de l'intégrale double dans (1).

celle de Cauchy apparaît plus précise[19].

Au-delà de ces considérations, il y a toutefois une circonstance matérielle qui rend chronologiquement assez improbable une influence de Cauchy sur Poisson. Ce dernier présente la formule intégrale à l'Académie des sciences le 2 octobre 1815, lors de la lecture de la première partie de son manuscrit sur la théorie des ondes (déposé en août), alors que Cauchy avait envoyé en juillet à l'Académie des sciences le manuscrit (anonyme) qui renferme la formule intégrale. Même si cet élément ne constitue pas une preuve absolue, compte tenu de l'ensemble des données historiques disponibles, nous faisons l'hypothèse d'une indépendance de la découverte de la formule intégrale chez nos trois auteurs[20], dont les finalités apparaissent assez différentes.

2. LES DÉMONSTRATIONS DE CONVERGENCE DE LA FORMULE INTÉGRALE

Nous dirions aujourd'hui que l'intégrale située au second membre de la formule (5) (et également de la formule (12)) est, à une constante près, la transformée cosinus de Fourier[21] de la fonction Q (respectivement F_1), de même que la formule (1) peut être considérée comme une représentation intégrale de la fonction F par sa transformée de Fourier. L'exactitude de cette représentation est assurée par le théorème d'inversion qui garantit, dans l'hypothèse où la fonction F et sa transformée appartiennent

[19] Par exemple, comme nous l'avons déjà remarqué, Cauchy prend en considération les cas où la fonction à intégrer n'est pas infiniment petite, ni même bornée. On verra plus tard qu'au cours de la démonstration la démarche de Cauchy est aussi plus rigoureuse.

[20] Pour des détails supplémentaires, notamment sur des aspects biographiques concernant Fourier, Cauchy et Poisson, et donc sur les circonstances qui pourraient avoir porté à la connaissance de l'un d'eux les travaux des autres, voir Grattan-Guinness [1970, p. 43–45], Grattan-Guinness et Ravetz [1972, p. 1–25, 421–490], Belhoste [1991] et Costabel [1981]. Nous avons consacré le premier chapitre de notre thèse de doctorat [Annaratone 1994] à la question de l'indépendance de ces trois découvertes.

[21] On appelle « transformée cosinus de la fonction f » une expression de la forme

$$k \int_0^{+\infty} f(\alpha) \cos \alpha x \, \mathrm{d}x$$

pourvu que l'intégrale soit convergente presque partout.

Dans le cas où f est une fonction paire, la transformée cosinus coïncide avec la transformée de Fourier.

à $L^1(\mathbb{R})$, que la transformée inverse[22] de la transformée de Fourier est, à une constante près, la fonction F elle-même.

L'expression « transformée de Fourier » suggère évidemment l'idée de transformation : d'une équation aux dérivées partielles à une équation ordinaire et surtout d'une fonction à une autre qui n'appartient pas nécessairement à la même classe[23]. Il s'agit d'une notion qui se forme et se développe progressivement au cours du XIX^e^ siècle, même si l'expression elle-même semble assez tardive[24]. Pour comprendre comment Fourier, Cauchy et Poisson interprétaient les formules (1) et (2), par exemple, le meilleur moyen est, à notre avis, d'analyser la manière dont ils les ont traitées dans les démonstrations de convergence.

Remarquons tout d'abord les différences quant aux nombres de démonstrations de convergence données suivant les auteurs : Cauchy en fournit quatre dont la première remonte à 1815 ; Poisson, lui, en donne trois dont une est manifestement inspirée de celle de Camille Deflers[25], un mathématicien aujourd'hui presque inconnu ; Fourier, enfin, donne une seule démonstration, en 1822 dans la *Théorie analytique de la chaleur*. La question se pose de comprendre le pourquoi de telles variations.

Par ailleurs, si chaque auteur manie, dans ses démonstrations de convergence, les différentes techniques d'une façon assez personnelle, des analogies apparaissent cependant entre les différentes démonstrations, ce qui permet de les regrouper en trois classes, selon les méthodes employées. La première, dans l'ordre chronologique est celle où est utilisé un facteur auxiliaire (voir, par exemple, [Cauchy 1823a]). La deuxième,

---

[22] Étant donnée une fonction f, on appelle « transformée inverse de la fonction f » la fonction

$$\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\, \mathrm{e}^{i\alpha}\, \mathrm{d}\alpha$$

pourvu que l'intégrale soit convergente presque partout.

[23] Si, par exemple, la fonction f appartient à $L^1(\mathbb{R})$, sa transformée existe toujours, mais elle n'appartient pas nécessairement à $L^1(\mathbb{R})$.

[24] Afin de déterminer le moment où ce terme a été introduit, nous avons passé en revue les plus importants textes sur ce sujet depuis le début du XX^e^ siècle. Nous avons trouvé pour la première fois les expressions « transformée de Fourier » (*Fourier transform* et *Fourier transformation*) dans le livre de Wiener [1933, p. x] où cependant l'expression « intégrale de Fourier » (*Fourier integral*) figure encore dans le titre.

[25] Voir *infra* la note biographique sur Deflers.

que nous avons appelée technique « d'évaluation du poids de l'intégrale », est notamment utilisée par Fourier [1822]. La troisième enfin, fondée sur le calcul des résidus, se trouve chez Cauchy [1827b]. Même si en pratique les distinctions ne sont pas toujours aussi strictes, cette division se fonde sur trois points de vue différents qui, à leur tour, mettent en jeu des propriétés différentes des intégrales impropres et généralisées.

Dans ce cadre, on peut poser la question de l'influence réciproque de ces quatre mathématiciens dans le cas des démonstrations de convergence, réparties sur une période de temps assez longue pour qu'il y ait eu plusieurs occasions d'échanges.

Repères chronologiques

Pour permettre au lecteur de suivre plus facilement, nous donnons un bref schéma chronologique de toutes les démonstrations de la formule intégrale que nous analysons ici. Les expressions entre crochets font référence au type de technique utilisée (leur signification sera éclaircie par la suite).

1815. — Première démonstration de Cauchy dans son mémoire sur la propagation des ondes [Cauchy 1815/1827, note VI, p. 133–139] transmis à l'Académie des sciences à l'occasion du Prix d'analyse mathématique, publié par la suite en 1827. [Facteur auxiliaire du type $F(k,q) = \mathrm{e}^{-kq}$.]

1816. — Première démonstration de Poisson dans son article sur la propagation des ondes [Poisson 1816, p. 85 *sq.*], annoncé en 1815 à l'échéance du concours remporté par Cauchy. [Facteur auxiliaire $F(k,q) = \mathrm{e}^{-kq}$.]

1818. — Seconde démonstration de Cauchy [1818, p. 228–232] dans un article sur les fonctions réciproques[26]. [Facteur auxiliaire $F(k,q) = \mathrm{e}^{-kq}$.]

1819. — Démonstration par Camille Deflers [1819, p. 161–166] qui anticipe, bien que de manière souvent obscure, l'idée directrice utilisée par Fourier dans sa *Théorie* et par Poisson dans une des démonstrations de 1823. [Évaluation du poids de l'intégrale.]

1822. — Unique démonstration de Fourier, dans la *Théorie analytique de la chaleur* [1822, p. 494–502]. [Évaluation du poids de l'intégrale.]

1823. — Deux nouvelles démonstrations de Poisson dans la « Suite du mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries » [1823,

[26] Ce que Cauchy appelle fonctions réciproques de première ou de seconde espèce sont les fonctions qui interviennent dans la transformée cosinus ou sinus de Fourier, respectivement.

p. 452–456]. La première utilise un facteur auxiliaire différent de celui utilisé par Cauchy; l'autre est explicitement inspirée de la démonstration de Deflers. [Facteur auxiliaire $F(k,q) = \mathrm{e}^{-kq^2}$; évaluation du poids de l'intégrale.]

1823. — Troisième démonstration de Cauchy, de forme plus générale [1823a, p. 276–280], dans un long article consacré à la résolution des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. [Facteur auxiliaire $F(k,q) = \psi(kq)/\psi(0)$.]

1827. — Dernière démonstration de Cauchy [1827b, p. 146–153] contenue dans un mémoire « Sur la transformation des fonctions d'une seule variable en intégrales doubles », dans un cadre théorique totalement nouveau. [Calcul des résidus.]

À l'exception des premières démonstrations de Cauchy, Poisson et de celle de Fourier, nées dans un contexte d'étude d'un problème physique, les autres démonstrations apparaissent toutes dans des articles au contenu strictement mathématique. Dans la suite, nous entrerons dans le détail de ces méthodes en consacrant une section à chacune des trois techniques de démonstration indiquées. Nous les présentons dans l'ordre chronologique induit par la première démonstration utilisant la technique considérée.

3. LA TECHNIQUE DU FACTEUR AUXILIAIRE

L'introduction d'un facteur auxiliaire dans la formule intégrale est le moyen auquel Cauchy et Poisson ont recours le plus souvent dans leurs démonstrations de convergence et c'est aussi, chronologiquement, la première technique employée. Parmi les nombreuses démonstrations dont on dispose, nous en exposerons deux : celles données par Cauchy, respectivement en 1815 et 1823. Cette dernière est sans doute la plus générale de toutes. Le facteur auxiliaire utilisé à cette occasion est tout à fait abstrait et le point de vue de Cauchy, même s'il ne s'agit que d'une généralisation de la technique employée dans les démonstrations de 1815 et 1818 (voir les *repères chronologiques* dans la précédente section), est assez moderne : la formule intégrale est considérée, d'une certaine façon, comme un opérateur fonctionnel.

Cauchy 1815

La première démonstration, de 1815, par laquelle nous commencerons est la moins élaborée de toutes, mais en revanche l'utilisation du facteur auxiliaire s'y manifeste de la façon la plus claire. (Les autres démonstrations, dont nous ne parlerons pas, sont assez semblables à celle-ci.) Dans son mémoire sur la théorie de la propagation des ondes, Cauchy est confronté à un problème d'inversion : il s'agit de calculer la fonction φ à partir de l'équation (10), la fonction F_1 étant connue[27]. Comme nous l'avons déjà dit, Cauchy donne tout de suite la solution (12) renvoyant la démonstration à la note VI du même mémoire.

Pour que l'expression (12) soit solution du problème d'inversion (10), il suffit de démontrer que l'égalité[28]

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \cos m\mu \cos mx\, F_1(\mu)\, \mathrm{d}\mu\, \mathrm{d}m = \frac{\pi}{2} F_1(x) \tag{18}$$

est vraie. Dans ce but Cauchy introduit d'abord le facteur auxiliaire $\mathrm{e}^{-\alpha m}$ et montre (notation modernisée)

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\mu \int_0^{+\infty} \cos m\mu \cos mx\, F_1(\mu)\, \mathrm{e}^{-\alpha m}\, \mathrm{d}m = \lim_{\alpha\to 0} I_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} F_1(x).$$

Cette égalité serait équivalente à (18), si on avait la possibilité de passer à la limite sous le signe d'intégration

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\mu \int_0^{+\infty} &\cos m\mu \cos mx\, F_1(\mu)\, \mathrm{e}^{-\alpha m}\, \mathrm{d}m \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \lim_{\alpha\to 0}\big[\cos m\mu \cos mx\, F_1(\mu)\, \mathrm{e}^{-\alpha m}\big]\, \mathrm{d}\mu\, \mathrm{d}m\end{aligned} \tag{19}$$

ce qui, nous le savons, n'est pas vrai en général (condition d'uniformité). Cependant, Cauchy, comme Poisson après lui, juge ce passage évident et il l'utilise chaque fois qu'il en a besoin.

Le choix du facteur auxiliaire semble d'ailleurs être assez naturel : Poisson utilisera le même type de facteur $\mathrm{e}^{-\alpha m}$ dans sa première démons-

[27] La résolution de l'équation (11) est tout à fait analogue.

[28] L'égalité (18) est la formule intégrale relative à la fonction $F_1(x)$ qui, par définition, est paire.

tration, et le facteur $F(\alpha, m) = \mathrm{e}^{-\alpha m^2}$ dans la deuxième[29]. À l'aide de la relation trigonométrique

$$2 \cos m\mu \cos mx = \cos\bigl[m(\mu + x)\bigr] + \cos\bigl[m(\mu - x)\bigr],$$

Cauchy peut utiliser les égalités bien connues[30]

$$\int_0^{+\infty} \cos m(\mu \pm x)\, \mathrm{e}^{-\alpha m}\, \mathrm{d}m = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\mu \pm x)^2}\cdot$$

Ce faisant, il obtient

$$I_\alpha(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\mu\, F_1(\mu) \Bigl[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\mu + x)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\mu - x)^2}\Bigr].$$

Cauchy observe que le premier terme entre crochets est infiniment petit quand α tend vers zéro, μ étant positif, et que l'on peut donc l'éliminer. (C'est la première fois que Cauchy utilise implicitement le passage à la limite (19).) Par contre, la valeur du deuxième terme à l'intérieur des crochets peut être très grande pour des valeurs de μ peu différentes de x. Il s'agit donc finalement de calculer l'intégrale

$$I_\alpha(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\mu\, F_1(\mu)\, \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\mu - x)^2}\cdot \tag{20}$$

Pour dégager la fonction F_1 du signe d'intégration, Cauchy fait la

---

[29] Comme l'indique Laugwitz, à propos des résultats obtenus par Cauchy et Poisson à l'aide des facteurs auxiliaires : « *they give some support to an analogous conjecture on divergent series in place of integrals* » [1989, p. 222]. Les séries auxquelles il se réfère sont les séries de Fourier. Poisson [1820] et Cauchy [1827a] donneront en effet des démonstrations de la convergence de ces séries par le biais de facteurs auxiliaires analogues à ceux qu'ils utilisent pour la convergence de l'intégrale.

[30] Voir [Euler 1768, p. 157–158]. Cauchy lui-même consacre un paragraphe de son « Mémoire sur les intégrales définies » de 1814 à une famille d'intégrales plus générales dont celles-ci sont un cas particulier [Cauchy 1814/1827, p. 353]. D'une manière analogue, dans sa deuxième démonstration de convergence de 1823, Poisson utilise les égalités

$$\int_0^{+\infty} \cos m(\mu \pm x)\, \mathrm{e}^{-\alpha m^2}\, \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(\mu \pm x)^2}{4\alpha}}$$

qui avaient aussi été étudiées par Euler.

substitution $\mu = x + \alpha\xi$, et obtient[31]

$$I_\alpha(x) = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x+\alpha\xi)\,\frac{\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2}\cdot$$

Considérant que lorsque α est très petit, la fonction $F_1(x+\alpha\xi)$ est très proche de $F_1(x)$, il sort ce facteur du signe intégral, et on a finalement les égalités suivantes

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0} I_\alpha(x) &= \frac{1}{2} \lim_{\alpha\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x+\alpha\xi)\,\frac{\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2}\\ &= \frac{1}{2} F_1(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{2} F_1(x).\end{aligned}$$

Cauchy 1823

Pour comprendre l'essence de la méthode du facteur auxiliaire, on peut s'en remettre aux propres termes de Cauchy. Il en décrit en effet les traits généraux dans son mémoire consacré aux équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants [Cauchy 1823a]. À cette occasion, il introduit la formule intégrale pour des fonctions de n variables[32]

$$\begin{aligned}f(x,y,z,\ldots) = \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^n \int\!\!\ldots\!\!\int f(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)\cos q(x-\alpha)&\\ \times \cos\rho(y-\beta)\cos r(z-\gamma)\cdots&\\ \times\ \mathrm{d}q\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}r\cdots\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\gamma\cdots&\end{aligned}\tag{21}$$

---

[31] Dans sa deuxième démonstration de convergence de 1818, Cauchy, plus rigoureusement, prend $-x/\alpha$ comme borne inférieure de l'intégrale et change la suite de la démonstration en décomposant l'intégrale

$$\int_{-x/\alpha}^{+\infty} F_1(x+\alpha\xi)\,\frac{\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2}$$

en la somme

$$\int_{-x/\alpha}^{-x/\sqrt{\alpha}} F_1(x+\alpha\xi)\,\frac{\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2} + \int_{-x/\sqrt{\alpha}}^{+x/\sqrt{\alpha}} F_1(x+\alpha\xi)\,\frac{\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2} + \int_{+x/\sqrt{\alpha}}^{+\infty} F_1(x+\alpha\xi)\,\frac{\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2}\cdot$$

Il utilise alors le théorème de la valeur moyenne (sous forme intégrale) pour chaque terme de la somme.

[32] Par rapport à la formule intégrale (1), Cauchy a doublé l'intervalle d'intégration de la variable q et a divisé le tout par 2. Dans le cas unidimensionnel on pourrait ainsi écrire

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\cos q(x-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}q.$$

l'intégration étant effectuée de $-\infty$ à $+\infty$ par rapport à $q, \rho, r, \ldots$ et, par rapport à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ entre des limites comprenant $x, y, z, \ldots$ (par exemple, $-\infty$ et $+\infty$).

Observant que les fonctions situées sous le signe intégral oscillent constamment entre des valeurs positives et négatives quand $q, \rho, r, \ldots$ varient, il souligne que «*ces intégrales multiples pourront devenir indéterminées mais jamais infinies*»[33]. Mais «*pour faire cesser l'indétermination*», il suffit de multiplier la fonction par un «*facteur auxiliaire*» de la forme

$$\frac{\psi(kq, k'\rho, k''r, \ldots)}{\psi(0,0,0,\ldots)} = F(k, k', k'', \ldots, q, \rho, r, \ldots), \tag{22}$$

où $k, k', k'', \ldots$ sont des quantités positives qui tendront vers zéro et ψ une fonction «*convenablement choisie*» [Cauchy 1823a, p. 277].

Le facteur auxiliaire, introduisant un paramètre dans la fonction à intégrer, permet de considérer l'intégrale comme limite d'une suite d'intégrales et, comme on l'a déjà vu dans un cas particulier, la démonstration de la formule de représentation se réduit à la démonstration de l'égalité (nous nous restreignons au cas unidimensionnel)

$$\lim_{k \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}q \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) F(k, q) \cos q(x-\alpha) \, \mathrm{d}\alpha = 2\pi f(x).$$

Finalement, le facteur auxiliaire sert (Cauchy l'indique ici explicitement) à «*régulariser*» la fonction à intégrer dans l'éventualité où elle ne serait pas intégrable au voisinage d'un point, ou à l'infini[34], c'est-à-dire qu'il rend convergente une intégrale qui ne l'est pas en général.

Le problème ainsi posé, on s'attendrait à ce que le choix du facteur auxiliaire F dépende, sinon directement de la fonction f qui apparaît sous le

[33] Une intégrale est indéterminée, pour Cauchy, lorsque la fonction à intégrer est indéterminée pour certaines valeurs entre les limites d'intégration (voir, par exemple, [Cauchy 1814/1827, p. 379–380]). Comprendre ce qu'il entend par fonction indéterminée est par contre plus difficile. Il semble alors se préoccuper de savoir si la fonction à intégrer admet une limite finie à l'infini.

[34] À propos du concept d'intégrabilité chez Cauchy, voir, par exemple, Bottazzini [1986, ch. 4] et Belhoste [1991, ch. 7]). Dans ses démonstrations de convergence, Cauchy multiplie la fonction à intégrer par un facteur auxiliaire de façon à obtenir une fonction dont il connaît la valeur de l'intégrale entre $-\infty$ et $+\infty$. Nous avons déjà signalé, dans la première section, les conditions que Cauchy impose à la fonction sous le signe d'intégration.

signe d'intégration, du moins de la classe des fonctions à laquelle f appartient, et que F ait certaines caractéristiques de régularité correspondant à ce qu'aujourd'hui nous appelons des noyaux de sommation. Cauchy, pour sa part, est convaincu que pour chaque fonction f il est toujours possible de trouver un facteur auxiliaire :

«*Est-il possible, dans tous les cas, de choisir la fonction ψ de manière à faire cesser l'indétermination ? Si cette question était résolue négativement, il est clair qu'on devrait restreindre les applications des formules* [(21)] *aux seuls cas pour lesquels la condition qu'on vient d'énoncer serait satisfaite. Mais rien jusqu'à présent ne nous porte à croire que l'on se trouve jamais dans l'impossibilité de la remplir*» [Cauchy 1823a, p. 277, note 1].

Pour mieux nous convaincre de cette possibilité, Cauchy donne alors une démonstration de la convergence où il utilise effectivement un facteur auxiliaire abstrait de la forme (22), c'est-à-dire qu'il démontre que l'expression

$$X_k(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}q \int_{\alpha'}^{\alpha''} \frac{\psi(kq)}{\psi(0)} \cos q(x-\alpha)\, f(\alpha)\, \mathrm{d}\alpha$$

tend vers $2\pi f(x)$ quand k tend vers zéro, x étant compris entre α' et α'' (α' et α'' pouvant être pris égaux à $-\infty$ et $+\infty$ respectivement).

Le début est analogue à la démonstration de 1815. Le but est toujours de « libérer » la fonction f du signe intégral. À cette fin, Cauchy remplace α par l'expression $x + k\nu$ et pose $kq = \beta$. L'intégrale $X_k(f)$ devient alors

$$X_k(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\beta \int_{(\alpha'-x)/k}^{(\alpha''-x)/k} \frac{\psi(\beta)}{\psi(0)} \cos \beta\nu\, f(x + k\nu)\, \mathrm{d}\nu.$$

Puis, en utilisant la décomposition de l'intégrale en une somme de trois termes comme en 1818 (voir note 31), Cauchy obtient l'égalité « fonctionnelle »

$$(23) \qquad \lim_{k\to 0} X_k(f) = Af \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{\psi(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\beta) \cos\beta\nu\, \mathrm{d}\nu,$$

où la constante A est à déterminer. Mais, note Cauchy, comme une telle quantité ne dépend plus de f, on peut dans la relation (23) utiliser une fonction convenablement choisie. Cauchy prend la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.

Une fois cette fonction substituée dans chacun des membres de la relation (23), et en prenant les bornes $\alpha' = -\infty$, $\alpha'' = +\infty$, il obtient l'égalité

$$A\,\mathrm{e}^{-x^2} = \lim_{k\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(kq)}{\psi(0)} \cos q(x-\alpha)\,\mathrm{e}^{-\alpha^2}\,\mathrm{d}\alpha.$$

Faisant tendre alors k vers zéro, la relation précédente devient (en permutant les signes de limite et d'intégration)

$$\begin{aligned} A\,\mathrm{e}^{-x^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}q \int_{-\infty}^{+\infty} \cos q(x-\alpha)\,\mathrm{e}^{-\alpha^2}\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}q \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha^2} \cos q\alpha \cos qx\,\mathrm{d}\alpha. \end{aligned}$$

En utilisant la formule connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\beta\nu\;\mathrm{e}^{-\nu^2}\,\mathrm{d}\nu = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\beta^2},$$

Cauchy obtient finalement $A = 2\pi$.

4. L'ÉVALUATION DU POIDS DE L'INTÉGRALE

Poisson, Deflers ou Fourier n'utilisent pas l'expression « évaluation du poids de l'intégrale » dans leurs travaux. Nous l'avons empruntée à la théorie de la mesure pour interpréter le procédé sur lequel se fondent les démonstrations de ce deuxième groupe. Intuitivement, la méthode consiste à considérer la valeur d'une certaine intégrale comme concentrée dans le voisinage d'un point en négligeant les contributions infiniment petites.

Cette technique est employée par Poisson dans ses deux nouvelles[35] démonstrations de 1823 [Poisson 1823, p. 425–426]. Dans un cas il utilise, à coté de la technique d'évaluation du poids de l'intégrale, le facteur auxiliaire $F(k,q) = \mathrm{e}^{-kq^2}$ déjà évoqué, et dans l'autre cas, il s'inspire, comme il l'affirme lui-même, de la démonstration de Deflers. Ce dernier peut être considéré de plein droit comme l'inventeur, avec Fourier, de cette technique de démonstration, alternative à celle du facteur auxiliaire.

Bien que Fourier et Deflers aient des points de vue assez différents, géométrique et descriptif pour le premier, plus analytique pour le second,

[35] Une autre démonstration étant identique à celle qu'il a donnée dans son mémoire sur la propagation des ondes en 1816.

l'idée directrice dont ils s'inspirent est identique. Il s'agit de démontrer l'égalité suivante

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\alpha \int_0^k f(\alpha) \cos q(x-\alpha)\, \mathrm{d}q.$$

À cette fin tous deux effectuent l'intégration par rapport à q dans le second membre et il ne leur reste plus qu'à évaluer la limite suivante

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \frac{\sin k(x-\alpha)}{x-\alpha}\, \mathrm{d}\alpha.$$

On est ainsi ramené, dans ce deuxième groupe de démonstrations, à une famille d'intégrales du type

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) G_k(x-\alpha)\, \mathrm{d}\alpha$$

dont il s'agit de calculer la limite lorsque k tend vers l'infini[36]. Le fait toutefois que k devienne infiniment grand, et non infiniment petit comme dans la méthode précédente, conduit à des considérations tout à fait originales.

Fourier

Bien qu'elle soit postérieure à la démonstration de Deflers de 1819, nous commencerons par la démonstration de Fourier pour illustrer la méthode. La démarche de Fourier est en effet plus claire et justifie bien l'expression « évaluation du poids de l'intégrale » que nous utilisons. La propriété fondamentale sur laquelle elle se fonde est que, lorsque k tend vers l'infini, la limite de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{\sin k(x-\alpha)}{x-\alpha}\, \mathrm{d}\alpha \tag{24}$$

[36] On peut faire une comparaison avec la formule (20) et le calcul qui suit. Dans ce cas, on avait

$$G_k(x-\alpha) = \frac{k}{k^2 + (x-\alpha)^2}$$

avec k tendant vers zéro.

vaut π ou 0 selon que l'intervalle d'intégration contient x ou non. Fourier parvient à ces conclusions en considérant d'abord l'intégrale[37]

$$\int \frac{\sin px}{x}\,\mathrm{d}x \tag{25}$$

dont la valeur, entre 0 et $+\infty$, est connue (elle vaut $\frac{1}{2}\pi$). Il observe que, lorsque p tend vers l'infini :

« *Les sinuosités de la courbe dont* $\dfrac{\sin px}{x}$ *est l'ordonnée sont infiniment voisines. Leur base est une longueur infiniment petite égale à* $\dfrac{\pi}{p}$. *Cela étant, si l'on compare l'aire positive qui repose sur un de ces intervalles* $\dfrac{\pi}{p}$ *à l'aire négative qui repose sur l'intervalle suivant, et si l'on désigne par* X *l'abscisse finie et assez grande qui répond au commencement du premier arc, on voit que l'abscisse* x*, qui entre comme dénominateur dans l'expression* $\dfrac{\sin px}{x}$ *de l'ordonnée, n'a aucune variation sensible dans le double intervalle* $\dfrac{2\pi}{p}$ *qui sert de base aux deux aires. Par conséquent l'intégrale est la même que si* x *était une quantité constante. Il s'ensuit que la somme des deux aires qui se succèdent est nulle* » [Fourier 1822, p. 496].

La situation est tout à fait différente si dans l'intégrale (25) on prend une borne X infiniment petite. Dans ce cas, note Fourier, l'intervalle $[0, X]$ n'est même pas suffisamment grand pour sous-tendre deux « *sinuosités* » et donc l'intégrale (25) a une valeur différente de zéro. En bref, la valeur de cette intégrale, lorsque p tend vers l'infini, « *est entièrement formée de la somme de ses premiers termes qui répondent à des valeurs extrêmement petites de* x » [Fourier 1822, p. 497]. C'est-à-dire que

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin px}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\omega} \frac{\sin px}{x}\,\mathrm{d}x$$

avec ω infiniment petit. Fourier étend ensuite à l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$$

[37] À propos de la fonction

$$\frac{\sin px}{x}$$

où p devient infiniment grand, Laugwitz parle de « *first appearance of a delta function* » [1989, p. 219].

dans un voisinage de x, les considérations relatives à l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin px}{x}\,\mathrm{d}x$$

dans un voisinage de zéro. Doublant l'intervalle d'intégration, il obtient que l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}\,\mathrm{d}\alpha,$$

pour p tendant vers l'infini, qui vaut π, coïncide avec l'intégrale définie

$$\int_{x-\beta}^{x+\beta} \frac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}\,\mathrm{d}\alpha \tag{26}$$

où β représente une quantité infiniment petite.

Si on veut intégrer maintenant l'expression $f(\alpha)\dfrac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}$, la fonction f valant approximativement $f(x)$ dans l'intervalle $[x-\beta, x+\beta]$, peut « sortir » du signe intégral, et on a donc la succession d'égalités suivante

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\frac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}\,\mathrm{d}\alpha &= \lim_{p\to\infty}\int_{x-\beta}^{x+\beta} f(\alpha)\frac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}\,\mathrm{d}\alpha\\ &= f(x)\Big[\lim_{p\to\infty}\int_{x-\beta}^{x+\beta}\frac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}\,\mathrm{d}\alpha\Big]\\ &= f(x)\Big[\lim_{p\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin p(x-\alpha)}{x-\alpha}\,\mathrm{d}\alpha\Big]\\ &= \pi f(x),\end{aligned}$$

ce qui démontre la formule intégrale.

Deflers [38]

La propriété « fondamentale » précédente utilisée par Fourier n'est jamais exprimée par Deflers d'une manière claire et précise. Il est probable

[38] Le nom de Deflers n'apparaît pas dans les dictionnaires, y compris ceux qui sont spécialisés dans le domaine scientifique. Dans un recueil de notices biographiques consacré au département de Seine- et-Oise [Daniel 1832, p. 143], on apprend cependant que Deflers se prénommait Camille et qu'il était né à Versailles en 1794. Il fut élève de l'École normale puis y devint maître de conférences (c'est ce titre qui apparaît en tête de son article de 1819). Il fut aussi professeur au collège royal de Bourbon (c'est le titre que lui donne Poisson dans son article de 1823 ; rappelons que l'École normale a été fermée en 1822 pour plusieurs années). La consultation aux Archives Nationales, à Paris, du dossier relatif à la comptabilité du collège de Bourbon (cote AJ^{16} 99) permet d'apporter quelques informations supplémentaires. Sur les listes trimestrielles

qu'il arrive à ce résultat par analogie avec un autre cas qu'il avait traité avec plus d'attention. Il s'agit de l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin kz}{\sin z}\,\mathrm{d}z.$$

Si k tend vers l'infini, affirme Deflers, une telle intégrale est «*nulle pour toutes les limites qui ne comprennent pas les valeurs* $0, \pi, 2\pi, \ldots, -\pi, \ldots$ *qui seules rendent le multiplicateur de* $\sin kz$ *infini*» [Deflers 1819, p. 163]. Si l'on applique ce raisonnement à l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin kz}{z}\,\mathrm{d}z,$$

on parvient à la conclusion de Fourier selon laquelle pour k tendant vers l'infini, cette intégrale devient nulle dans tous les intervalles $[\alpha, \beta]$ qui ne contiennent pas zéro.

Pour ce qui concerne la valeur de l'intégrale sur un voisinage de zéro, au lieu d'observer, comme avait fait Fourier, que, pour k infini, elle est la même que sur tout l'axe réel, il se propose de la calculer directement en démontrant que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-x'}^{x''} \frac{\sin kz}{z}\,\mathrm{d}z = \pi, \tag{27}$$

avec x' et x'' compris entre 0 et π. Pour parvenir à ce résultat, il écrit la relation

$$\int_{-x'}^{x''} \frac{\sin kx}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-x'}^{x''} \frac{\sin kx}{\sin x}\,\mathrm{d}x - \int_{-x'}^{x''} \sin kx\,\frac{x-\sin x}{x\sin x}\,\mathrm{d}x$$

des traitements versés pour les années 1821 à 1824, Deflers apparaît comme professeur agrégé de mathématiques. En octobre 1824 cependant, c'est le proviseur du collège qui signe le registre, «*pour M. Deflers décédé*». Mort prématurément en 1824, Deflers ne semblait pas isolé du milieu mathématique français de l'époque. L'introduction de son mémoire de 1819 témoigne de sa connaissance des travaux effectués récemment sur le sujet traité, et même du mémoire que Poisson a publié seulement l'année suivante dans le *Journal de l'École polytechnique*. Cela laisse supposer l'existence de contacts directs entre les deux hommes. Signalons par ailleurs que Deflers apparaissait, comme «*rédacteur principal*» de la partie mathématique, dans la liste des collaborateurs figurant dans les tomes 1 et 2 (1824) du *Bulletin universel des sciences et de l'industrie*, (*section I*), publié par le baron de Férussac.

et observe que l'intégrale

$$\int_{-x'}^{x''} \sin kx \, \frac{x - \sin x}{x \sin x} \, \mathrm{d}x$$

est nulle pour k tendant vers l'infini[39]. Il lui suffit alors de démontrer que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-x'}^{x''} \frac{\sin kz}{\sin z} \, \mathrm{d}z = \pi. \tag{28}$$

La démonstration, certes longue et laborieuse, est intéressante. C'est la seule qui utilise le développement de la fonction en série de Fourier, en l'intégrant terme à terme. Ce faisant, Deflers essaie de fonder sur une base rigoureuse le lien (en général seulement perçu intuitivement) entre les séries et l'intégrale de Fourier. L'« erreur » que fait alors Deflers est bien sûr typique de son époque : il permute les signes d'intégration et de sommation[40].

Il considère pour $j \in \mathbb{N}$ les relations trigonométriques

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2j+1)x}{\sin x} &= 2\sum_{k=1}^{j} \cos 2kx + 1, \\ \frac{\sin 2jx}{\sin x} &= 2\sum_{k=1}^{j} \cos(2k-1)x, \end{aligned} \tag{29}$$

puis en intégrant chacun des membres dans l'intervalle $[-x', x'']$, il obtient

$$\begin{aligned} \int_{-x'}^{x''} \frac{\sin(2j+1)x}{\sin x} \, \mathrm{d}x &= 2\sum_{k=1}^{j} \frac{\sin 2kx''}{2k} + x'' + 2\sum_{k=1}^{j} \frac{\sin 2kx'}{2k} + x', \\ \int_{-x'}^{x''} \frac{\sin 2jx}{\sin x} \, \mathrm{d}x &= 2\sum_{k=1}^{j} \frac{\sin(2k-1)x''}{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{j} \frac{\sin(2k-1)x'}{2k-1}. \end{aligned} \tag{30}$$

[39] Il avait en effet démontré [*Ibid.*, p. 161–162] que les intégrales du type

$$\int f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x$$

tendent vers 0 lorsque k tend vers l'infini, si $f(x)$ satisfait à certaines conditions de régularité entre les bornes d'intégration.

[40] On trouve la même erreur dans un mémoire de Lagrange [1759, p. 89] où il exprime la solution du problème de la corde vibrante sous la forme d'une intégrale renfermant une série de Fourier. C'est aussi l'erreur commise par Cauchy et Poisson dans leurs démonstrations de la convergence des séries de Fourier.

En faisant tendre j vers l'infini, les sommes finies se transforment en séries infinies et les relations (30) en les égalités

$$
(31)\quad
\begin{aligned}
&\lim_{j\to\infty}\int_{-x'}^{x''}\frac{\sin(2j+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\\
&\qquad\qquad = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx''}{2k}+x''+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx'}{2k}+x',\\
&\lim_{j\to\infty}\int_{-x'}^{x''}\frac{\sin 2jx}{\sin x}\,\mathrm{d}x\\
&\qquad\qquad = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x''}{2k-1}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x'}{2k-1}.
\end{aligned}
$$

Deflers utilise alors les développements en série de Fourier[41]

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{2}-x &= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k},\\
\frac{\pi}{2} &= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}
\end{aligned}
$$

valables pour x non nul compris entre $-\pi$ et π, pour conclure que les seconds membres des égalités (31) valent chacun π et qu'ainsi l'égalité (28) est vraie.

[41] En évaluant l'intégrale indéfinie de chacun des membres des égalités (29) et en faisant tendre j vers l'infini, Deflers [*Ibid.*, p. 163] obtient

$$
\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty}\int\frac{\sin(2j+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x &= 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}+x+c,\\
\lim_{j\to\infty}\int\frac{\sin 2jx}{\sin x}\,\mathrm{d}x &= 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+c'.
\end{aligned}
$$

Il a remarqué précédemment que, si x est compris entre 0 et π, les premiers membres sont nuls. En faisant $x=\frac{1}{2}\pi$, il obtient $c=c'=-\frac{1}{2}\pi$ (en utilisant le fait que la somme de la série alternée des inverses des entiers impairs vaut $\frac{1}{4}\pi$) et, par conséquent, les développements en série de Fourier qui suivent.

Le deuxième de ces développements se trouve dans le premier mémoire de Fourier [1807/1972, p. 165]. Quant au premier, il peut s'obtenir en faisant $t=\pi-2x$ dans

$$\frac{t}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kt}{k},$$

lequel figure dans Fourier [1807/1972, p. 163] ainsi d'ailleurs que dans Euler [1760, p. 584].

Une fois la propriété (27) démontrée, il pose $\alpha = x + u$ dans l'intégrale $\int_{x-\beta}^{x+\beta} f(\alpha) \frac{\sin k(x-\alpha)}{x-\alpha} \, \mathrm{d}\alpha$, qui se transforme en l'intégrale

$$\int_{-\beta}^{+\beta} f(x+u) \frac{\sin ku}{u} \, \mathrm{d}u. \tag{32}$$

Deflers développe alors la fonction $f(x+u)$ en série de puissances de u

$$f(x+u) = f(x) + Au^{\alpha} + Bu^{\alpha'} + \cdots$$

et, substituant ce développement dans l'intégrale (32), il obtient la somme infinie

$$f(x) \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{\sin ku}{u} \, \mathrm{d}u + A \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{\sin ku}{u} u^{\alpha} \, \mathrm{d}u + \cdots .$$

Chaque terme de cette somme étant nul[42], sauf le premier qui, comme on l'a vu précédemment, est égal à $\pi f(x)$, il obtient ainsi la formule intégrale (1). Considérant de manière analytique ce qui, pour Fourier, était surtout une intuition d'ordre géométrique, le procédé de Deflers, même s'il est assez laborieux, a le mérite de l'originalité.

Remarquons que si la technique du facteur auxiliaire sera reprise par Cauchy et Poisson pour démontrer la convergence de la série de Fourier, ce sera une méthode analogue à celle de l'évaluation du poids de l'intégrale qui sera choisie par Dirichlet en 1829 et développée de manière particulièrement rigoureuse dans sa démonstration de la convergence des séries de Fourier[43].

5. LE CALCUL DES RÉSIDUS

La dernière technique que l'on va considérer se fonde sur la théorie des résidus ; elle est utilisée dans une seule démonstration, celle de Cauchy de 1827. Le cœur de la démonstration est constitué par le théorème suivant [Cauchy 1827b, p. 146].

Cauchy considère des fonctions φ, χ de deux variables réelles, f une

[42] Voir *supra* la note 39.

[43] Voir [Dirichlet 1829]. Si Dirichlet n'y considère pas la formule intégrale, il est clair que l'on peut étendre sans problème à ce cas sa démonstration de la convergence des séries de Fourier. Ce faisant, on voit que le procédé de Dirichlet est, en gros, le même que celui de Deflers et de Fourier.

fonction d'une variable complexe et pose

$$F(p,r) = \varphi(p,r) + i\chi(p,r).$$

En supposant implicitement que la fonction $f \circ F$ a uniquement des pôles $z_1, \dots, z_k$ simples dans le rectangle $Q = \{(p,r) \in [p_0, P] \times [r_0, R]\}$, il affirme que la formule suivante est vraie

$$\begin{aligned}(33)\qquad &\int_{p_0}^{P} \Big[\Big(\frac{\partial F}{\partial p} f \circ F\Big)(p,R) - \Big(\frac{\partial F}{\partial p} f \circ F\Big)(p,r_0)\Big]\,\mathrm{d}p \\ &\quad + \int_{r_0}^{R} \Big[\Big(\frac{\partial F}{\partial r} f \circ F\Big)(P,r) - \Big(\frac{\partial F}{\partial r} f \circ F\Big)(p_0,r)\Big]\,\mathrm{d}r \\ &\qquad = \pm 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}_i(f)\end{aligned}$$

où $\mathrm{Res}_i(f)$ désigne le résidu de la fonction f au point $w_i = F(z_i)$ et où le signe $\pm$ du second membre dépend du signe de la quantité

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p}\,\frac{\partial \chi}{\partial r}(p,r) - \frac{\partial \varphi}{\partial r}\,\frac{\partial \chi}{\partial p}(p,r)$$

évaluée successivement aux pôles[44] $z_1, \dots, z_k$.

Dans cette dernière démonstration de la formule intégrale, Cauchy utilise en fait la relation (33) dans l'hypothèse où f «*ne devient pas infinie*» entre les limites d'intégration et donc où la quantité $\sum \mathrm{Res}_i(f)$ est nulle. Il est clair que dans ce cas le calcul des résidus est loin d'être indispensable pour montrer la formule (33) : elle s'obtient en effet par une simple opération de double intégration, comme Cauchy l'a lui-même montré dans la 34[e] leçon du *Résumé*[45] de son cours de l'École polytechnique.

---

[44] Si on suppose que F est une fonction holomorphe, on peut reconnaître dans ce qu'on vient d'énoncer le théorème dit aujourd'hui « des résidus » concernant la fonction f dans l'ouvert $F(Q)$. En effet, le premier membre de la formule (33) n'est rien d'autre que l'expression explicite de

$$\int_{F(Q)} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_Q f\big(F(z)\big)F'(z)\,\mathrm{d}z.$$

[45] Remarquons d'abord que, en posant $H = \dfrac{\partial F}{\partial p} f \circ F$ et $K = \dfrac{\partial F}{\partial r} f \circ F$, l'égalité $\dfrac{\partial H}{\partial r} = \dfrac{\partial K}{\partial p}$ est vraie.

Dans la 33[e] leçon du *Résumé*, Cauchy a montré que l'on peut échanger l'ordre

Le lien entre le théorème énoncé au début et la formule intégrale n'est d'ailleurs pas immédiat. La formule

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}r \int_0^{+\infty} \cos r(x-\mu)\,\phi(\mu)\,\mathrm{d}\mu \tag{34}$$

que Cauchy va démontrer[46] n'est que le dernier maillon d'une chaîne d'égalités dont la première est la formule (33) et les suivantes sont chacune un cas particulier de la précédente.

En posant dans (33), $\varphi(p,r) = ar$, $\chi(p,r) = pr$, $[p_0, P] = [c, b]$, $[r_0, R] = [0, 1/\varepsilon]$, où ε est une quantité infiniment petite, il obtient[47]

$$\begin{aligned}\int_0^{1/\varepsilon} \Big\{(a+ib)f\big[(a+ib)r\big] - (a+ic)f\big[(a+ic)r\big]\Big\}\,\mathrm{d}r \\ = i\int_c^b f\Big(\frac{a+ip}{\varepsilon}\Big)\,\frac{\mathrm{d}p}{\varepsilon}\cdot\end{aligned} \tag{35}$$

Il évalue ensuite l'intégrale située au deuxième membre de la formule (35), en attribuant à la fonction f l'expression

$$f(t) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-t(x-\mu)}\phi(\mu)\,\mathrm{d}\mu \tag{36}$$

puis l'expression[48]

$$f(t) = \int_{x}^{X} \mathrm{e}^{-t(\mu-x)}\phi(\mu)\,\mathrm{d}\mu \tag{37}$$

d'intégration chaque fois que la fonction à intégrer est continue par rapport à chacune des variables entre les limites d'intégration [Cauchy 1823b, p. 197]. Grâce à cette propriété on trouve la formule (33) (dans le cas où $\sum \mathrm{Res}_i(f) = 0$) en intégrant le premier membre de $\dfrac{\partial H}{\partial r} = \dfrac{\partial K}{\partial p}$, d'abord par rapport à r dans l'intervalle $[r_0, R]$, puis par rapport à p dans l'intervalle $[p_0, P]$, et le second membre dans l'ordre inverse.

[46] Cauchy suppose que la fonction $\phi(x)$ est nulle pour x négatif. C'est pour cette raison que les extrémités de la seconde intégrale sont 0 et $+\infty$, au lieu de $-\infty$ et $+\infty$.

[47] La formule (35) équivaut à l'égalité suivante

$$\int_T f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

où T est le triangle dont les sommets sont les points de coordonnées $O(0,0)$, $A(a/\varepsilon, b/\varepsilon)$ et $B(a/\varepsilon, c/\varepsilon)$.

[48] Le texte de Cauchy comporte x_0 comme borne inférieure de l'intégrale dans ce deuxième cas ; il ressort de la suite de la démonstration qu'il faut en fait prendre x.

sous l'hypothèse que $\phi(\mu)$ ne devient pas infinie entre les limites $\mu = x_0$, $\mu = X$. Il obtient finalement, dans le cas où $x_0 < x < X$, et en faisant tendre ε vers zéro

$$\phi(x) = \frac{1}{2(B+iA)} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}r \int_{x_0}^{X} \big[(a+ib)\,\mathrm{e}^{-(a+ib)r|x-\mu|} - (a+ic)\,\mathrm{e}^{-(a+ic)r|x-\mu|}\big]\,\phi(\mu)\,\mathrm{d}\mu \tag{38}$$

où

$$A = \arctan\frac{b}{a} - \arctan\frac{c}{a}, \quad B = \frac{1}{2}\log\Big(\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}\Big).$$

En posant, dans (38), $a = 0$, $b = 1$ et $c = -1$, Cauchy parvient à la formule intégrale

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}r \int_{x_0}^{X} \cos r(x-\mu)\,\phi(\mu)\,\mathrm{d}\mu.$$

Ceci est encore vrai pour $x_0 = 0$ et $X = +\infty$, et l'on a la formule (34).

On peut s'interroger sur les motivations qui ont conduit Cauchy à donner cette dernière démonstration. Rappelons qu'à cette époque, il avait non seulement déjà publié trois autres démonstrations de la formule intégrale, mais qu'il l'avait utilisée avec succès dans différents champs de l'analyse, en tout premier lieu, pour la résolution des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. Pourquoi donc publier une nouvelle démonstration ?

Remarquons que cela ne constitue pas un fait isolé. Dans son « Mémoire sur le développement des fonctions en séries périodiques », lu à l'Académie des sciences en 1826, et se rapportant à la convergence des séries de Fourier, Cauchy énonce également un cas particulier du résultat exprimé par la formule (33). Dans la démonstration de la convergence, il l'utilise aussi dans le cas où les résidus sont nuls [Cauchy 1827a, p. 14]. Evidemment, l'importance qu'il attribue à la formule (33) va bien au-delà des applications à la convergence de l'intégrale et de la série de Fourier. Cela est sans doute lié à l'importance croissante que prend dans les travaux de Cauchy la théorie des fonctions de variable complexe, et notamment la théorie des résidus, à partir de 1825.

En janvier et février de cette année-là, Cauchy présente à l'Académie des sciences trois mémoires sur ce sujet. L'un d'eux, consacré précisément à la théorie des résidus, contient une vue programmatique sur l'avenir de ce nouveau domaine. Cauchy déclare explicitement qu'il veut constituer un nouveau calcul qui ait la portée et l'étendue d'application du calcul infinitésimal. Pour lui, les applications possibles de cette nouvelle découverte peuvent intéresser toutes les branches des mathématiques : de la décomposition des fractions rationnelles à la détermination des intégrales définies, de la sommation des séries périodiques à l'intégration des équations différentielles et à la résolution des équations algébriques et transcendantes [Cauchy 1826, p. 24]. Il retrouve ainsi beaucoup de résultats qu'il avait déjà obtenus à diverses occasions[49].

CONCLUSION

La comparaison de leur attitude par rapport à la démonstration de la formule intégrale illustre la différence de style entre Cauchy, Poisson et Fourier. L'abondance du nombre de démonstrations proposées par Cauchy, leur longueur, sa recherche d'une généralité croissante, son souci de rigueur, soulignent son intérêt pour les questions de pure analyse. Au contraire, pour Fourier, dont la seule démonstration est donnée plus de dix ans après la découverte de la formule intégrale, l'essentiel semble être de parvenir à la résolution du problème physique considéré. Chaque tentative effectuée dans cette direction conduit à élaborer des techniques analytiques *ad hoc* dont l'efficacité pour le problème en question en garantit à ses yeux la validité. S'attachant à publier plusieurs démonstrations de la formule intégrale (dont l'une inspirée par Deflers), mais les présentant de manière brève, la démarche de Poisson nous semble intermédiaire entre les deux précédentes.

La nature des démonstrations de la formule de Fourier, les innovations analytiques qui y apparaissent, sont symptomatiques de l'évolution de l'analyse dans les années 1810 et 1820, avec notamment la genèse d'une théorie de l'intégration au sens moderne du terme. L'utilisation d'un facteur auxiliaire pour rendre convergente une intégrale qui ne l'était pas,

---

[49] L'un des aspects les plus intéressants de ce mémoire est l'analogie signalée par Cauchy entre ce qu'il appelle les *coefficients différentiels* de la fonction et ses résidus. Pour le reste, il se limite à décrire quelques techniques de calcul des résidus de fonctions à l'infini ou aux extrémités de l'intervalle d'intégration. Pour de plus amples détails sur ce mémoire et sur les motivations qui ont amené Cauchy à le rédiger, voir [Belhoste 1991, p. 122–123].

est à l'origine de ce qu'on appelle aujourd'hui les fonctions « test ». Avec la méthode d'évaluation du poids de l'intégrale, c'est le concept d'intégrale généralisée qui est en jeu[50]. On a vu aussi le lien qui s'établit, chez Cauchy, avec la théorie naissante des fonctions de variable complexe et notamment le calcul des résidus.

Il ne faut pas, cependant, sous-estimer la distance entre la théorie « de Fourier » à l'époque que nous avons considérée ici et ce qu'elle est devenue ensuite. Nous avons pu ainsi constater que les démonstrations de la formule intégrale comportaient des lacunes importantes au plan de la rigueur, même chez Cauchy qui est celui qui s'en est le plus préoccupé. En outre, le statut de l'intégrale de Fourier doit être situé dans les limites qui étaient alors celles de l'analyse. Une propriété essentielle de la formule intégrale qui apparaît est qu'elle permet de représenter une fonction à l'aide d'une expression où les variables ne figurent que dans des fonctions élémentaires (trigonométriques ou exponentielles). De là résultent des relations algébriques simples entre la transformée de Fourier d'une fonction et celles de ses dérivées, sur lesquelles se fonde l'efficacité de l'application de la formule intégrale à l'étude des diverses équations différentielles. Mais, malgré la modernité de travaux comme ceux de Cauchy [1818] sur la réciprocité des fonctions dites de première ou de seconde espèce, la transformée de Fourier n'est pas vraiment utilisée à l'époque comme un opérateur entre fonctions. Le rôle central joué par la formule intégrale, à la fois dans la théorie et dans les applications, correspond, nous semble-t-il, au fait que c'est encore la notion de représentation, plutôt que celle de transformation, qui domine alors.

BIBLIOGRAPHIE

Annaratone (S.)
[1994] *L'integrale di Fourier nelle opere di Fourier, Cauchy e Poisson*, thèse, Università degli Studi di Firenze, 1994.
Belhoste (B.)
[1991] *Augustin-Louis Cauchy. A biography*, New York : Springer, 1991.
Bachelard (G.)
[1928] *Étude sur l'évolution d'un problème de physique. La propagation thermique dans les solides*, Paris : Vrin, 1928 ; 2e éd., 1973.

[50] Cauchy a effectué une étude systématique de la notion d'intégrale généralisée dans son cours d'analyse de l'École polytechnique [1823b, leçons 24–25].

Bottazzini (U.)
[1986] *The higher calculus : A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, New York : Springer, 1986.
[1990] *Il flauto di Hilbert*, Torino : Utet, 1990.

Burkhardt (H.)
[1908] Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, X_2 (1908), p. 1–1804.

Cauchy (A.-L.)
[*Œuvres*] *Œuvres complètes*, 27 vol. en deux séries, Paris : Gauthier-Villars, 1882–1974.
[1813] Exposé sommaire d'une méthode pour déterminer a priori le nombre des racines réelles positives et le nombre des racines réelles négatives d'une équation d'un degré quelconque, *Procès-verbaux de l'Académie des sciences*, V (1813), p. 214 ; *Œuvres* (II) 15, p. 11–16.
[1814/1827] Mémoire sur les intégrales définies, *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, 1 (1827), p. 599- 799 ; *Œuvres* (I) 1, p. 329–506.
[1815/1827] Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie, *Ibid.*, 1 (1827), p. 3–312 ; *Œuvres* (I) 1, p. 4–318.
[1817] Sur une loi de réciprocité qui existe entre certaines fonctions, *Bulletin des sciences par la Société philomatique de Paris*, (1817), p. 121–124 ; *Œuvres* (II) 2, p. 223–227.
[1818] Seconde note sur les fonctions réciproques, *Ibid.*, (1818), p. 188–191 ; *Œuvres* (II) 2, p. 228–232.
[1823a] Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles et à coefficients constants, *Journal de l'École polytechnique*, t. XII, 19e cahier (1823), p. 510–589 ; *Œuvres* (II) 1, p. 275–357.
[1823b] *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, t. 1, Paris, 1823 ; *Œuvres* (II) 4, p. 14–261.
[1825] *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires*, Paris, 1825 ; *Œuvres* (II) 15, p. 41–89.
[1826] Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal, *Exercices de mathématiques*, 1 (1826), p. 11–24 ; *Œuvres* (II) 6, p. 23–37.
[1827a] Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques, *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, 6 (1823, publ. 1827), p. 603–612 ; *Œuvres* (I) 2, p. 12–19.
[1827b] Sur la transformation des fonctions d'une seule variable en intégrales doubles, *Exercices de mathématiques*, 2 (1827) ; *Œuvres* (II) 7, p. 146–159.

Costabel (P.)
[1981] Siméon-Denis Poisson : aspect de l'homme et de son œuvre, dans Métivier (M.), Costabel (P.) et Dugac (P.), éd., *Siméon-Denis Poisson et la science de son temps*, Palaiseau : École polytechnique, 1981, p. 1–21.

Dahan Dalmedico (A.)
[1992] L'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles à coefficients constants dans les travaux de Cauchy (1821–1830), *Revue d'histoire des sciences*, 45 (1992), p. 83–114.

Daniel (E. et H.)
[1832] *Biographie des hommes remarquables du département de Seine-et-Oise*, Rambouillet, 1832.

Deflers (C.)

[1819] Note sur quelques intégrales définies, et application à la transformation des fonctions en séries de quantités périodiques, *Bull. sci. Soc. philom. Paris*, (1819), p. 161–166.

[1824] Compte rendu de [Poisson 1823], *Bulletin universel des sciences et de l'industrie*, (*section I*), 1 (1824), p. 332–336.

Dirichlet (P.G. Lejeune-)

[1829] Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 4 (1829), p. 157–169 ; *Werke*, vol. I, Berlin, 1889, p. 117–132.

Euler (L.)

[*Opera*] *Opera omnia*, 4 séries, sub. ausp. Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae, 1911– .

[1760] Subsidium calculi sinuum, *Novi commentarii Academiae scientiarum Petropolitanae*, 5 (1754–1755, publ. 1760), p. 164–204 ; *Opera* (I) 14, p. 542– 584.

[1768] *Institutiones calculi integralis*, vol. I, Pétersbourg, 1768 ; *Opera* (I) 11, p. 1–462.

Fourier (J.)

[*Œuvres*] *Œuvres de Fourier*, 2 vol., Paris, 1888–1890.

[1807/1972] Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides, dans [Grattan-Guinness et Ravetz 1972, p. 39–440].

[1811/1824] Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides (ch. I–XI), *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, 4 (1819–1820, publ. 1824), p. 185–556.

[1811/1826] Suite du mémoire : Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides (ch. XII–XIV), *Ibid.*, 5 (1821–1822, publ. 1826), p. 153–246 ; *Œuvres* 2, p. 3–94.

[1816] Théorie de la chaleur, *Annales de chimie et de physique*, 3 (1816), p. 350–375.

[1822] *Théorie analytique de la chaleur*, Paris, 1822 ; *Œuvres*, t. 1.

Gibson (G.A.)

[1893] On the history of Fourier series, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 11 (1892–93), p. 137–166.

Grattan-Guinness (I.)

[1970] *The development of the foundation of mathematical analysis from Euler to Riemann*, Cambridge (Mass.) : MIT Press, 1970.

[1990] *Convolutions in french mathematics 1800–1840*, 3 vol., Basel : Birkhäuser, 1990.

Grattan-Guinness (I.) et Ravetz (J.R.)

[1972] *Joseph Fourier 1768–1830. A survey of his life and work, based on a critical edition of his monograph on the propagation of heat, presented to the Institut de France in 1807*, Cambridge (Mass.) : MIT Press, 1972.

Kline (M.)

[1972] *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York : Oxford University Press, 1972.

Lagrange (J.-L.)

[1759] Recherches sur la nature et la propagation du son, *Miscellanea Taurinensia*, 1 (1759), p. i–x, 1–112 ; *Œuvres de Lagrange*, t. 1, Paris, 1867, p. 39–148.

LAUGWITZ (D.)
[1989] Definite values of infinite sums : Aspects of the foundations of infinitesimal analysis around 1820, *Archive for History of Exact Sciences*, 39 (1989), p. 195–245.

MACKEY (G.)
[1980] Harmonic analysis as the exploitation of symmetry. A historical survey, *Bulletin of the American Mathematical Society*, (N.S.) 2 (1980), p. 543–698.

POISSON (S.-D.)
[1816] Mémoire sur la théorie des ondes, *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, 1 (1816, publ. 1818), p. 71–186.
[1820] Mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions par des séries de quantités périodiques et sur l'usage de cette transformation dans la résolution de différents problèmes, *J. École pol.*, t. XI, 18e cahier (1820), p. 417–489.
[1823] Suite du mémoire sur les intégrales définies et sur la sommation des séries, *Ibid.*, t. XII, 19e cahier (1823), p. 404–509.

RIEMANN (B.)
[1857] Uber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, (Habilitationschrift, Göttingen, 1857), *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 13 (1868), p. 87–132 ; *Gesammelte mathematische Werke*, Leipzig, 1876, p. 213–253. Trad. fr., Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 5 (1873), p. 20–48, 79–96 ; *Œuvres mathématiques*, Paris, 1898, p. 225–279.

SACHSE (A.)
[1880] Essai historique sur la représentation d'une fonction arbitraire d'une seule variable par une série trigonométrique, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, (II) 4–1 (1880), p. 43–112.

WIENER (N.)
[1933] *The Fourier integral and certains of its applications*, Cambridge : The University Press, 1933.