

RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

MICHÈLE AUDIN

Structures $Spin^c$ sur les variétés symplectiques

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1995, tome 47
« Conférences de M. Audin, D. Bernard, A. Bilal, B. Enriquez, E. Frenkel, F. Golse, M. Katz, R. Lawrence, O. Mathieu, P. Von Moerbeke, V. Ovsienko, N. Reshetikhin, S. Theisen », , exp. n° 10, p. 263-268

http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1995__47__263_0

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Structures Spin^c sur les variétés symplectiques

Michèle Audin

L'utilisation des équations de Seiberg-Witten pour les théorèmes symplectiques de Taubes [10, 11, 12] (unicité de la structure symplectique de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ notamment) ont montré l'importance de ces structures pour l'étude des variétés symplectiques. Le seul but de ces notes est de rappeler une description des structures Spin^c qui était à la mode parmi les topologues il y a 15 ou 20 ans (voir par exemple [9]) et qui est particulièrement économique et efficace.

Je ne parlerai pas des applications, me contentant de renvoyer aux travaux de Taubes cités ci-dessus, aux articles de survol [7] et [2] ainsi qu'à la contribution [6] de Misha Katz à ce volume.

1. Les structures Spin^c

1.1. Les structures Spin (rappel)

Le groupe $\text{Spin}(k)$ est le revêtement double non trivial du groupe spécial orthogonal $SO(n)$. Si η est un fibré vectoriel de rang k sur une variété W , muni d'une métrique et d'une orientation, on peut considérer le fibré $SO(\eta) \rightarrow W$ des repères orthonormés directs, fibré principal de groupe $SO(k)$ associé à η .

Une structure Spin sur η est la donnée d'un revêtement double

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}(\eta) & \longrightarrow & SO(\eta) \\ & & \downarrow \\ & & W \end{array}$$

... quand il en existe, et ceci se produit si et seulement si $w_2(\eta)$, la deuxième classe de Stiefel-Whitney de η , est nulle.

1.2. Le groupe $\text{Spin}^c(n)$

C'est le revêtement double de $SO(2) \times SO(n)$ obtenu en tirant en arrière le revêtement $\text{Spin}(n+2) \rightarrow SO(n+2)$:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \text{Spin}^c(n) & \longrightarrow & \text{Spin}(n+2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ SO(2) \times SO(n) & \longrightarrow & SO(n+2) \end{array}$$

de sorte qu'il est muni d'homomorphismes vers $SO(2) = S^1$ et vers $SO(n)$ qui définissent des suites exactes

$$1 \rightarrow \text{Spin}(n) \longrightarrow \text{Spin}^c(n) \longrightarrow S^1 \rightarrow 1$$

et

$$1 \rightarrow S^1 \longrightarrow \text{Spin}^c(n) \longrightarrow SO(n) \rightarrow 1.$$

1.3. Structures Spin^c sur un fibré ξ

Soit ξ un fibré vectoriel de rang n avec métrique et orientation. Essayons d'imiter le diagramme (1), le fibré ξ va correspondre à $SO(n)$. Il nous manque un analogue de $SO(2)$. Appelons ce groupe $U(1)$: il est clair maintenant que la donnée manquante est celle d'un fibré en droites complexes $L \rightarrow W$ avec une métrique hermitienne, grâce à laquelle on n'a plus qu'à recopier le diagramme (1) :

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \text{Spin}_L^c(\xi) & \longrightarrow & \text{Spin}(L \oplus \xi) \\ \downarrow & & \downarrow (a) \\ S(L) \times_W SO(\xi) & \longrightarrow & SO(L \oplus \xi) \end{array}$$

où $S(L)$ est le fibré unitaire (en cercles) de L . Une structure Spin^c sur ξ sera la donnée d'un revêtement $\text{Spin}_L^c(\xi) \rightarrow S(L) \times_W SO(\xi)$ (pour un certain fibré L) faisant commuter le diagramme (2). Pour qu'un tel revêtement existe ... il faut et il suffit que la flèche (a) existe, c'est à dire d'après le § 1.1 que $w_2(L \oplus \xi) = 0$. Comme les fibrés considérés sont tous orientés, on a $w_2(L \oplus \xi) = w_2(L) + w_2(\xi)$ et donc

$$w_2(L \oplus \xi) = 0 \iff w_2(L) = w_2(\xi),$$

mais $w_2(L)$ est la réduction modulo 2 de la première classe de Chern $c_1(L)$. Pour qu'une structure Spin^c existe, il suffit donc qu'on ait pu trouver un fibré en droites complexes L tel que $w_2(\xi) = \rho_2 c_1(L)$, en d'autres termes, il faut et il suffit que $w_2(\xi) \in H^2(W; \mathbf{Z})$ soit la réduction modulo 2 d'une classe entière.

Remarque. — C'est toujours le cas quand ξ est le fibré tangent d'une variété orientée, grâce aux relations de Wu¹.

Voilà donc une nette supériorité des structures Spin^c sur les structures Spin : il y en a sur toutes les variétés orientées. En plus, il y en a beaucoup, puisque le groupe $H^2(W; \mathbf{Z})$ des fibrés en droites complexes opère sur l'ensemble de ces structures (remplacer L par $L \otimes D^2$ dans le diagramme (2)).

¹Celles-ci expriment le fait que le fibré tangent d'une variété n'est pas n'importe quel fibré vectoriel. Pour toute la topologie algébrique de base utilisée ici, voir par exemple [8].

1.4. Les connexions

Une connexion unitaire A sur L et une connexion métrique sur ξ (si ξ est le fibré tangent d'une variété riemannienne, la connexion de Levi-Civita fera l'affaire) définissent ensemble une connexion sur $S(L) \times_W SO(\xi)$ et donc aussi sur son revêtement double $\text{Spin}_L^c(\xi)$.

1.5. Les fibrés de spineurs, cas de la dimension 4

Comme $SO(4) \cong (SU(2) \times SU(2)) / \{\pm 1\}$,

$$\text{Spin}^c(4) \cong (S^1 \times SU(2) \times SU(2)) / \{\pm 1\}$$

et $\text{Spin}^c(4)$ a deux représentations $s_{\pm}$ évidentes mais non équivalentes dans $\mathbf{C}^2$: on l'envoie dans

$$U(2) \cong (S^1 \times SU(2)) / \{\pm 1\}$$

en choisissant l'un ou l'autre facteur $SU(2)$. C'est relié à la décomposition en 2-formes de $\mathbf{R}^4$ auto-duales et anti-auto-duales

$$\wedge^2 \mathbf{R}^4 = \wedge^+ \oplus \wedge^-$$

(qui fournit deux représentations $\lambda_{\pm}$ de $SO(4)$ dans $\mathbf{R}^3$) par le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & & & SO(4) \\ & & & \nearrow & \downarrow \lambda_{\pm} \\ \text{Spin}^c(4) & \xrightarrow{s_{\pm}} & U(2) & \longrightarrow & SO(3) \end{array}$$

(dans lequel l'application $U(2) \rightarrow SO(3)$ est le quotient par le centre).

On en déduit deux fibrés vectoriels complexes de rang 2 sur W , qu'on note S_+ et S_- , associés au fibré principal $\text{Spin}_L^c(\xi)$.

2. Cas des variétés presque complexes et symplectiques

2.1. Cas d'un fibré vectoriel complexe

Plaçons-nous d'abord au niveau des groupes, en considérant l'application

$$\begin{array}{ccc} U(n) & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \times SO(2n) \\ A & \longmapsto & (\det(A), A_{\mathbf{R}}) \end{array}$$

($A_{\mathbf{R}}$ désignant évidemment l'application linéaire $A : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ vue comme endomorphisme de $\mathbf{R}^{2n}$). La composition avec la flèche vers $SO(n+2)$ est triviale au

niveau des groupes fondamentaux

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_1(U(n)) & \longrightarrow & \pi_1(S^1 \times SO(2n)) & \longrightarrow & \pi_1(SO(2n+2)) \\
\mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbf{Z}/2 \\
a & \longmapsto & (a, \rho_2 a) & & \\
& & (a, b) & \longmapsto & \rho_2 a + b
\end{array}$$

de sorte qu'on a un relèvement :

$$\begin{array}{ccccc}
& & \text{Spin}^c(2n) & \longrightarrow & \text{Spin}(2n+2) \\
& \nearrow \tilde{\varphi} & \downarrow & & \downarrow \\
U(n) & \xrightarrow{\varphi} & S^1 \times SO(2n) & \longrightarrow & SO(2n+2)
\end{array}$$

Supposons maintenant que ξ soit un fibré vectoriel complexe : il possède donc une structure Spin^c meilleure que toutes les autres, celle obtenue pour $L = \det(\xi)$.

2.2. Les variétés presque complexes

Une variété presque complexe est une variété dont le fibré tangent est muni d'une structure de fibré vectoriel complexe. C'est dire qu'on a un champ d'endomorphismes

$$J_x : T_x W \longrightarrow T_x W \text{ tel que } J_x^2 = -\text{Id} \quad \forall x \in W.$$

Toute structure presque complexe sur une variété lui donne une structure Spin^c .

2.3. Le cas des variétés symplectiques

Une variété symplectique est une variété munie d'une 2-forme non dégénérée et fermée. Comme elle porte une forme non dégénérée, la variété W considérée est de dimension paire, disons $2n$, et son groupe structurel est le groupe symplectique $Sp(2n; \mathbf{R})$. Ce dernier a $U(n)$ comme composante compacte. Du point de vue de la variété W , c'est dire que la 2-forme non dégénérée ω possède une famille contractile de structures presque complexes adaptées, c'est à dire de J telles que :

$$(X, Y) \longmapsto \omega(X, JY)$$

soit une métrique riemannienne sur W (pour ces notions et des démonstrations de ce fait bien classique, voir par exemple [1]).

Toutes ces structures presque complexes adaptées définissent des fibrés déterminants isomorphes et en particulier, toute variété symplectique possède donc une structure Spin^c naturelle... et beaucoup d'autres en faisant opérer le groupe $H^2(W; \mathbf{Z})$ comme au § 1.3.

2.4. Formes non dégénérées fermées en dimension 4

Dans ce dernier paragraphe, je vais utiliser un peu plus de notions : multiplication de Clifford et opérateur de Dirac notamment, pour lesquelles je renvoie à la littérature classique [4] par exemple.

La topologie symplectique utilise de façon essentielle, depuis l'article [5] de Gromov, les structures presque complexes adaptées aux formes symplectiques et les courbes "holomorphes" associées (voir [3]).

Fixons une structure presque complexe J sur la variété X , adaptée à la 2-forme non-dégénérée ω . Une application u définie sur une surface de Riemann Σ dont la structure complexe est notée j est dite J -holomorphe (ou pseudo-holomorphe, ou holomorphe) si son application tangente est linéaire sur $\mathbf{C}$ au sens où

$$T_z u(j\zeta) = J \circ T_z u(\zeta) \quad \forall z \in \Sigma \quad \forall \zeta \in T_z \Sigma.$$

Un point peu évident pour un néophyte est de comprendre ce qu'ajoute l'hypothèse, que nous avons négligée jusqu'à maintenant : une forme symplectique est une 2-forme-non dégénérée *fermée*. Elle se traduit par des majorations d'aire pour les courbes holomorphes en question (voir encore [3]).

Le cadre décrit ici est particulièrement bien adapté *a priori* à la géométrie symplectique en dimension 4 puisqu'il fournit une caractérisation infinitésimale (*i.e.* de même nature que l'équation $d\omega = 0$) des structures Spin^c associées à des formes symplectiques.

Terminons par citer le lemme qui décrit cette propriété. Considérons donc une variété W de dimension 4 munie d'une structure presque complexe J et d'une 2-forme non dégénérée ω , J étant adaptée à ω . Utilisons la métrique riemannienne définie par J et ω sur W et sa connexion de Levi-Civita. Il est d'usage d'appeler, comme en géométrie analytique, K^{-1} le fibré déterminant d'une variété presque complexe : $K^{-1} = \wedge^n(TW, J)$. D'autre part, la structure presque complexe définit une décomposition des formes en types et les fibrés de spineurs s'écrivent alors :

$$S_+ = \wedge^{0,0} \oplus \wedge^{0,2} = \mathbf{1} \oplus K^{-1} \text{ et } S_- = \wedge^{0,1},$$

la décomposition de S^+ étant donnée par ω : les deux facteurs sont les sous-espaces propres pour les valeurs propres $-i$ et i de la multiplication de Clifford par ω .

De plus, si A est une connexion unitaire sur K^{-1} , elle définit avec la connexion de Levi-Civita une connexion $\tilde{A}$ sur le fibré Spin^c , comme on a dit au § 1.4 et $(1 + i\omega)\tilde{A}$ est une connexion sur le fibré trivial $\mathbf{1} \subset S^+$.

2.4.1 LEMME. — *Il existe une et une seule connexion unitaire A sur K^{-1} telle que la connexion $(1 + i\omega)A$ soit la connexion triviale d et admette une section u parallèle.*

La forme ω est fermée si et seulement si u est un spineur harmonique, c'est à dire si et seulement si $D_{\tilde{A}}u = 0$.

Remarque. — Si (W, J, ω) était une variété kählérienne, u serait une section parallèle pour $\tilde{A}$.

L'équation $D_{\tilde{A}}u = 0$ est la première des équations de Seiberg-Witten (voir [6]). Le couple (A, u) vérifie aussi une forme modifiée de la deuxième. En d'autres termes, pour une forme symplectique, on a automatiquement une solution "triviale" de ces équations.

Bibliographie

- [1] M. AUDIN, *Symplectic and almost complex manifolds*, in [3].
- [2] M. AUDIN, *Du nouveau en dimension 4*, Gazette des Mathématiciens **64** (1995), 43–55.
- [3] M. AUDIN, J. LAFONTAINE, EDS, *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Math. 117, Birkhäuser, 1994.
- [4] *Géométrie riemannienne en dimension 4*, Séminaire Arthur Besse, Cédic, Paris, 1981.
- [5] M. GROMOV, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.
- [6] M. KATZ, *A proof via the Seiberg-Witten moduli space of Donaldson's theorem on smooth 4-manifolds with definite intersection forms*, ce volume.
- [7] D. KOTSCHICK, *Gauge theory is dead! —Long live gauge theory*, Notices of the Amer. Math. Soc. **42** (1995), 335–338.
- [8] J. MILNOR, *Characteristic classes*, Princeton University Press, 1974.
- [9] S. OCHANINE, *Signature modulo 16, invariants de Kervaire généralisés et nombres caractéristiques dans la K-théorie réelle*, Mémoires de la Soc. Math. France **5** (1981).
- [10] C. H. TAUBES, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Letters **1** (1994), 809–822.
- [11] C. H. TAUBES, *More constraints on symplectic manifolds from Seiberg-Witten equations*, Math. Res. Letters **2** (1995), 9–14.
- [12] C. H. TAUBES, *The Seiberg-Witten and the Gromov Invariants*, preprint (1995).

Institut de Recherche Mathématique Avancée
 Université Louis Pasteur et CNRS
 7 rue René-Descartes
 F-67084 Strasbourg Cedex
 maudin@math.u-strasbg.fr