André Gramain

Théorèmes de H. Schubert sur les nœuds câbles

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1994, tome 46
« Conférences de A. Beauville, A. Coste, J. Dubochet, A. Gramain, M. Holschneider, C. Itzykson, P. Le Tallec, V. Rivasseau, C. Weber », , exp. n° 2, p. 43-59
<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1994__46__43_0>

Théorèmes de H.Schubert sur les nœuds câbles

par

André Gramain *

Un *nœud* orienté est une sous-variété différentiable orientée de la sphère S_3 difféomorphe au cercle. Deux nœuds k et k' ont même type s'il existe un homéomorphisme f de S_3 sur S_3, tel que $f(k') = k$ et qui préserve les orientations de S_3, k et k'. Si l'on n'impose pas que f préserve les orientations, on obtient les types de nœuds non orientés. D'après les théorèmes de E. Moïse sur la dimension 3, on peut supposer que f est un difféomorphisme.

C. McA. Gordon et J. Luecke ont démontré en 1989 que deux nœuds dont les complémentaires sont homéomorphes ont même type non orienté [7]. Le *groupe d'un nœud* k est le groupe fondamental $\pi_1(S_3 - k)$. C.D. Feustel et W. Whitten avaient démontré en 1978 que le théorème précédent, pas encore démontré, impliquait que deux nœuds indécomposables dont les groupes sont isomorphes ont des complémentaires homéomorphes, et, par suite, ont même type non orienté ; pour des nœuds composés, les types non orientés des composants indécomposables sont déterminés par le groupe [6]. Dans un exposé au séminaire Bourbaki, nous avons décrit la méthode de démonstration de ces deux théorèmes [9]. Nous avons traité complètement le théorème de Feustel et Whitten dans le cas où la variété du nœud contient un anneau essentiel. Dans le cas des nœuds câbles, la démonstration utilise un résultat de H. Schubert selon lequel la donnée d'un nœud câble détermine le type du nœud porteur et le couple d'entiers qui ont servi à le construire. Nous donnons ici la démonstration de ce théorème extraite du grand mémoire de Schubert [13].

Le mémoire de Schubert a été publié en 1953. Il n'utilise pas le lemme de Dehn [1]. Il utilise, après les avoir redémontrés, les théorèmes d'Alexander [1] sur les sphères et les tores

* Université de Tours

[1] Le lemme de Dehn fut publié en 1910 avec une démonstration fausse [5]. C'est Kneser, en 1929, qui remarqua l'erreur [10]. La première démonstration exacte du lemme de Dehn a été donnée par Papakyriakopoulos en 1957 [12].

AG 27.9.1992

plongés dans $\mathbf{S}_3$. Par ailleurs les nœuds de Schubert sont des courbes polygonales dans une sphère qui est le bord d'un simplexe de dimension 4.

Nous utiliserons le lemme de Dehn qui simplifie certaines démonstrations. En outre, nous nous plaçons, par goût et par habitude, dans le cadre différentiable. Nous rappelons en appendice les théorèmes d'Alexander, le lemme de Dehn ainsi que le théorème du lacet dans ce cadre.

1. Préliminaires

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $\mathbf{B}_n$ la boule unité fermée et par $\mathbf{S}_{n-1}$ la sphère unité de $\mathbf{R}^n$.

Etant donnés un nœud k dans $\mathbf{S}_3$ et un voisinage tubulaire fermé $\mathrm{U}(k)$ de k, l'adhérence $\mathrm{E}(k)$ de $\mathbf{S}_3 - \mathrm{U}(k)$ est appelée *variété du nœud k*. Le bord commun de $\mathrm{U}(k)$ et $\mathrm{E}(k)$ est un tore $\mathrm{T}(k)$. Choisissons un point-base $*$ dans $\mathrm{T}(k)$. Le groupe $\mathrm{G}(k)$ du nœud k est le groupe $\pi_1(\mathrm{E}(k), *)$. Il résulte du lemme de Dehn que, si l'homomorphisme de $\pi_1(\mathrm{T}(k), *)$ dans $\pi_1(\mathrm{E}(k), *)$ n'est pas injectif, le nœud k est trivial ([3], p.39, [8]).

Inversement, soit T un tore plongé dans $\mathbf{S}_3$. D'après le théorème d'Alexander, le tore T partage $\mathbf{S}_3$ en deux sous-variétés E_1 et E_2 dont l'une est difféomorphe à $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{B}_2$. Si l'homomorphisme de $\pi_1(\mathrm{T})$ dans $\pi_1(\mathrm{E}_1)$ n'est pas injectif, la variété E_1 est difféomorphe à $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{B}_2$.

Posons $\mathrm{U} = \mathbf{S}_1 \times \mathbf{B}_2$. On dit qu'un disque D plongé dans U est un *disque méridien* de U s'il existe un automorphisme φ de U tel que $\mathrm{D} = \varphi(\{1\} \times \mathbf{B}_2)$, où 1 désigne le point $(1, 0)$ de $\mathbf{S}_1$. On dit alors que le bord de D est un *cercle méridien* de U.

Lemme 1. – *Soit* D *un disque plongé dans* U *et* C *son bord. On suppose que* C *est l'intersection de* D *et de* $b\mathrm{U}$, *et que* C *n'est pas homotope à un point dans* $b\mathrm{U}$. *Le disque* D *est alors un disque méridien de* U.

Soit H un voisinage tubulaire de D dans U tel que $\mathrm{H} \cap b\mathrm{U}$ soit un voisinage tubulaire de C dans $b\mathrm{U}$. Le bord $b\mathrm{H}$ du cylindre H est réunion de l'anneau $\mathrm{A} = \mathrm{H} \cap b\mathrm{U}$ et de deux disques D_- et D_+. Comme C n'est pas homotope à un point dans le tore $b\mathrm{U}$ l'ensemble $\mathrm{A}' = \overline{b\mathrm{U} - \mathrm{A}}$ est un anneau. L'ensemble $\mathrm{H}' = \overline{\mathrm{U} - \mathrm{H}}$ a pour bord une sphère, réunion de A', D_- et D_+. D'après le théorème d'Alexander pour les sphères, H' est une boule, ou plutôt un cylindre. Il en résulte facilement que D_-, D_+ et D sont des disques méridiens de U. [2]

[2] Nous utilisons ici la connexité par arcs de l'espace des plongements orientés du disque $\mathbf{B}_2$ dans la sphère $\mathbf{S}_2$, et de l'espace des difféomorphismes orientés de $\mathbf{B}_2$.

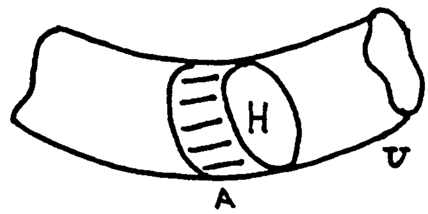


FIG. 1

Lemme 2. – *Si un cercle* C *plongé dans* bU *est homotope à un point dans* U, *mais non dans* bU, *c'est un cercle méridien de* U.

D'après le lemme de Dehn, il existe un disque D de bord C, plongé dans U, et tel que $D \cap bU = C$. On applique le lemme 1 à ce disque.

Lemme 3. – *Si* B *est une boule fermée plongée dans* U, *il existe un disque méridien de* U *disjoint de* B.

Il existe en effet un automorphisme φ de U transformant B en une toute petite boule B′ ; il existe un disque méridien D′ de U disjoint de B′ ; le disque méridien $\varphi^{-1}(D')$ est disjoint de B.

Lemme 4. – *Soit* E *la variété d'un nœud non trivial plongée dans l'intérieur de* U. *Il existe un disque méridien de* U *disjoint de* E.

Posons $F = \overline{U - E}$. Choisissont un point-base sur *b*E. Dans le diagramme suivant, les flèches désignent les homomorphismes déduits des injections canoniques.

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(E) \arrow[dr, "\theta"] & \\ \pi_1(bE) = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \pi_1(U) = \mathbf{Z} \\ & \pi_1(F) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Comme E est la variété d'un nœud non trivial, l'homomorphisme φ est injectif. Le groupe $\pi_1(E)$ contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$; l'homomorphisme θ n'est donc pas injectif. D'après le théorème de van Kampen, le groupe $\pi_1(U)$ est la somme des groupes $\pi_1(E)$ et $\pi_1(F)$ amalgamée par φ et ψ. Donc l'homomorphisme ψ n'est pas injectif. D'après le théorème du lacet et le lemme de Dehn, il existe un cercle C plongé dans *b*E, non homotope à un point dans *b*E, bordant un disque D plongé dans F. Comme dans le lemme 1, la réunion de E et d'un voisinage D' de D dans F est une boule B plongée dans l'intérieur de U. D'après le lemme 3, il existe un disque méridien de U disjoint de B, donc de E.

Remarque. – La démonstration de ce lemme s'adapte au cas où U a seulement l'homotopie d'un tore plein ([2], lemme 1, p.226, [3], lemme 15.9, p.279). Schubert, qui n'utilise pas le lemme de Dehn, le déduit d'un résultat plus compliqué (Anmerkung, p.203).

2. Tores pleins

Un tore plein plongé dans $\mathbf{S}_3$ est une sous-variété à bord de $\mathbf{S}_3$ isomorphe à $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{B}_2$. Soit V un tore plein plongé dans $\mathbf{S}_3$. On dit qu'un cercle a plongé dans V est une *âme* de V si V est un voisinage tubulaire de a, autrement dit s'il existe un isomorphisme φ de $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{B}_2$ sur V tel que $a = \varphi(\mathbf{S}_1 \times \{0\})$. Un cercle *méridien* de V est l'image par un tel isomorphisme d'un cercle méridien de $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{B}_2$; on définit de façon analogue un disque méridien. Un *parallèle* de V est un cercle plongé dans bV, dont la classe d'homotopie engendre $\pi_1(\mathrm{V})$, et qui est homologue à 0 dans $\overline{\mathbf{S}_3 - \mathrm{V}}$.

Deux âmes a et a' de V sont des nœuds de même type. Il existe en effet un automorphisme ψ de V tel que $\psi(a') = a$. L'automorphisme ψ conserve les méridiens (lemme 2) ; en le composant avec un vissage, on peut supposer qu'il conserve aussi les parallèles. Par une symétrie éventuelle, on peut supposer que la restriction de ψ à bV induit l'identité sur $\pi_1(b\mathrm{V})$. Un difféomorphisme de $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$ qui induit l'identité sur le groupe fondamental est isotope à l'identité. On peut donc supposer que ψ induit l'application identique sur un voisinage de bV dans V. On peut alors prolonger ψ en un automorphisme de $\mathbf{S}_3$ tel que $\psi(a') = a$.

On dira qu'un tore plein est *noué* dans $\mathbf{S}_3$ si une âme de V est un nœud non trivial.

Lemme 5. – *Soit* V *un tore plein noué dans* $\mathbf{S}_3$. *Un nœud trivial contenu dans l'intérieur de* V *borde un disque plongé dans l'intérieur de* V ([13], §7, Satz 1, p.164)

Soit a une âme de V. Soit k un nœud trivial contenu dans l'intérieur Int(V) de V, et soit W un voisinage tubulaire fermé de k contenu dans Int(V). L'ensemble $\mathrm{W}' = \overline{\mathbf{S}_3 - \mathrm{W}}$ est un tore plein qui contient la variété $\mathrm{E} = \overline{\mathbf{S}_3 - \mathrm{V}}$ du nœud a, âme de V. D'après le lemme 4, il existe un disque méridien D' de W' disjoint de E, c'est-à-dire contenu dans l'intérieur de V. Son bord est un parallèle de W. On complète D' par un anneau de bord $k \cup b\mathrm{D}'$, contenu dans W, pour obtenir un disque D intérieur à V tel que $k = b\mathrm{D}$.

Lemme 6. – *Soit* V *un tore plein noué dans* $\mathbf{S}_3$. *Un nœud trivial tracé sur* bV *est soit un méridien de* V, *soit le bord d'un disque plongé sur* bV ([13], §7, Hilfsatz 2, p.164)

Soit k un nœud trivial tracé sur bV, et soit k' le nœud obtenu en déplaçant un peu k dans l'intérieur de V. D'après le lemme 5 appliqué au nœud k', le cercle k est homotope à un point dans V. Si le cercle k n'est pas homotope à un point dans bV, c'est un méridien de V (lemme 2).

Soit V un tore plein plongé dans $\mathbf{S}_3$. Si k est un cercle plongé dans l'intérieur de V, on appelle (avec Schubert) *ordre* de V relativement à k le nombre minimum des points d'intersection de k et d'un disque méridien de V. Supposons l'âme de V orientée, ce qui permet d'identifier $\pi_1(\mathrm{V})$ à $\mathbf{Z}$. Si k est un nœud orienté plongé dans V, le *nombre de tours* de k (Umlaufzahl) est la classe de k dans $\pi_1(\mathrm{V})$. Par ailleurs, l'orientation d'une âme de V permet de choisir un parallèle orienté ℓ et un méridien orienté m sur bV. Si k est un cercle orienté plongé dans bV, on a $[k] = p[m] + q[\ell]$ dans $\pi_1(b\mathrm{V})$, où q est le nombre de tours et p le *nombre d'enroulement* de k sur V, ou le nombre d'enlacement (Verschlingungszahl) de k et d'une âme de V.

Lemme 7. – *Soient* V *un tore plein plongé dans* $\mathbf{S}_3$ *et* k *un nœud plongé dans l'intérieur de* V *avec un ordre égal à* 1. *Si* k *est un nœud trivial* (*dans* $\mathbf{S}_3$), *c'est une âme de* V.

Soit D un disque méridien de V transverse à k et rencontrant k en un unique point. Il existe un plongement φ du cylindre $\mathrm{K} = \mathbf{B}_2 \times [-1,1]$ dans V tel que

$$\varphi(\mathbf{B}_2 \times \{0\}) = \mathrm{D}, \quad \varphi(\{0\} \times [-1,1]) = k \cap \varphi(\mathrm{K}), \quad \varphi(\mathbf{S}_1 \times [-1,1]) = b\mathrm{V} \cap \varphi(\mathrm{K}).$$

La réunion de l'anneau $\mathrm{A} = b\mathrm{V} - \varphi(\mathbf{S}_1 \times]-1,1[)$ et des deux disques $\varphi(\mathbf{B}_2 \times \{\pm 1\})$ est une sphère qui partage $\mathbf{S}_3$ en deux boules (th. d'Alexander) : l'une est la réunion de $\varphi(\mathrm{K})$ et de $\overline{\mathbf{S}_3 - \mathrm{V}}$, l'autre, notée E, est égale à $\overline{\mathrm{V} - \varphi(\mathrm{K})}$. Comme le nœud k est supposé trivial, il existe un isomorphisme ψ de K sur E tel que

$$\psi(\mathbf{B}_2 \times \{\pm 1\}) = \varphi(\mathbf{B}_2 \times \{\pm 1\}), \quad \psi(\{0\} \times [-1,1]) = k \cap \mathrm{E}, \quad \psi(\mathbf{S}_1 \times [-1,1]) = \mathrm{A}.$$

En recollant φ et ψ, on obtient un paramétrage de V dont l'âme est k.

3. Compagnons

Soient V un tore plein dans $\mathbf{S}_3$ et k un nœud contenu dans l'intérieur de V ; on dit que k est *non-trivial dans* V si k n'est pas une âme de V et si l'ordre de V relativement à k est

$\neq 0$. Soit a une âme de V ; on dit que V fait de a un *compagnon* de k si V est noué dans S_3 et si k est non-trival dans V.

Exemples. – 1) Un nœud trivial n'a pas de compagnon. En effet, soit k un nœud contenu dans l'intérieur d'un tore plein V. Si k est un nœud trivial et si V est noué dans S_3, k borde un disque plongé dans V (lemme 5), et il existe un disque méridien de V disjoint de k (lemme 3), de sorte que V a un ordre nul relativement à k.

2) Soit h un nœud orienté, $U(h)$ un voisinage fermé de h, m et ℓ un méridien et un parallèle orientés de $U(h)$. Soient p et q deux entiers premiers entre eux. Un cercle k plongé dans $bU(h)$, tel que $[k] = p[m] + q[\ell]$ dans $\pi_1(bU(h))$, est appelé (p,q)-*câble* de h (voir FIG.3). Le nœud h est appelé *porteur* du nœud câble k. Si le nœud h est trivial, le nœud k est le nœud torique de type (p,q) ; si $|q| \geq 2$ et $|p| \geq 2$, il n'est pas trivial. Si h est non trivial et $|q| \geq 2$, h est un compagnon de k. On réserve généralement le nom de câble à ce cas. En orientant convenablement k, on a $q \geq 2$.

3) Si k est le nœud composé de deux nœuds non triviaux k_1 et k_2, chacun de ces nœuds est un compagnon de k (FIG.3).

PROPOSITION 1. – *Un nœud ne peut avoir même type qu'un de ses compagnons* ([13], §13, Satz 2, p.196).

Démontrons d'abord deux lemmes.

Lemme 8. – *Soient* V *et* W *deux tores pleins plongés dans* S_3 *tels que* $V \subset W$, *et soit* k *un nœud contenu dans l'intérieur de* V. *Notons* κ_V (*resp.* κ_W) *l'ordre de* V (*resp. de* W) *relativement à* k, *et* α *l'ordre de* W *relativement à une âme de* V. *On a* $\kappa_W = \alpha\kappa_V$ ([13], §9, Satz 3, p.175).

Soit D un disque méridien de W, transverse à bV et rencontrant k en κ_W points. L'intersection de D et bV est constituée de cercles plongés mutuellement disjoints. Montrons d'abord que l'on peut se ramener au cas où aucun de ces cercles n'est homotope à un point dans bV. Une composante s de $D \cap bV$, homotope à un point dans bV, borde un disque S contenu dans D et un disque S′ contenu dans bV. Si, dans le disque D, on remplace le disque S par S′ et qu'on le disjoint un peu de bV, on obtient un nouveau disque méridien D′ de W. L'intersection de D′ et bV est contenue dans $D \cap bV$, mais ne comprend plus s. Par ailleurs $D' \cap k = (D - S) \cap k$, de sorte que le nombre de points d'intersection de D′ et k est $\leq \kappa_W$, donc égal à κ_W.

Supposons donc qu'aucune composante de $D \cap bV$ ne soit homotope à un point dans

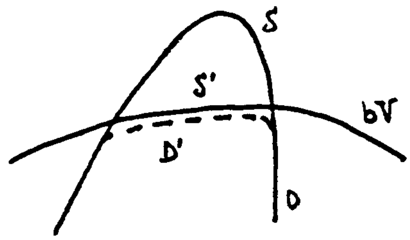


FIG. 2

bV. Ces composantes étant des cercles plongés mutuellement disjoints, elles sont toutes homotopes entre elles dans bV. Si s est une composante de $D \cap bV$, minimale dans D, elle borde dans D un disque S tel que $S \cap bV = s$. Par suite le cercle s, ainsi que toutes les autres composantes, est soit un méridien, soit un parallèle de V (lemme 2).

Si les composantes de $D \cap bV$ sont des méridiens de bV, le nombre des composantes qui sont maximales dans D est $\geq \alpha$, sinon on pourrait, à partir de D construire un disque méridien de W ayant strictement moins de α points d'intersection avec une âme de V. Une composante maximale contient une composante minimale qui borde dans D un disque méridien de V ; le nombre de points d'intersection de ce disque et de k est $\geq \kappa_V$. D'où l'inégalité $\kappa_W \geq \alpha\kappa_V$ dans ce cas.

Si une composante s de $D \cap bV$ est un parallèle de V, il existe une âme de V voisine de s qui ne rencontre pas D, par suite $\alpha = 0$, et l'inégalité précédente est encore satisfaite. Il en est de même si $D \cap V$ est vide.

L'inégalité $\kappa_W \leq \alpha\kappa_V$ est plus immédiate. Il existe un disque méridien de W qui rencontre une âme de V transversalement en α points. On en déduit un disque méridien de W dont l'intersection avec V est constituée de α disques méridiens de V. On peut supposer que chacun d'entre eux rencontre k en κ_V points, d'où le résultat.

Lemme 9. – *Soit k un nœud. Les ordres relativement à k des tores pleins noués dans* S_3 *contenant k forment un ensemble borné* ([13], §9, Satz 5, p.175)

Choisissons un point a de S_3 hors de k. Identifions $S_3 - \{a\}$ à $\mathbf{R}^3$ et notons $p : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ la troisième projection. Supposons que la fonction $p|k$ soit une fonction de Morse. Soit V un tore plein noué dans S_3. Pour la question qui nous intéresse, nous pouvons supposer que V ne contient pas le point a, et que la restriction de p au tore bV est une fonction de Morse.

Si toutes les sections horizontales $p^{-1}(\alpha) \cap bV$, pour les valeurs régulières α de $p|bV$, n'avaient que des composantes connexes homotopes à un point dans bV, la variété bV, qui est orientable, serait une réunion de sphères, ce qui est absurde. Il existe donc une valeur régulière α de $p|b$V telle que l'intersection de bV et du plan P $= p^{-1}(\alpha)$ contienne une composante C qui n'est pas homotope à un point dans bV. Le cercle C borde un disque D dans P. Comme V est noué, C est un méridien de V (lemme 6). Si le disque D ne contient pas d'autre composante de P $\cap\, b$V, c'est un disque méridien de V (lemme 1). Si D contient d'autres composantes de P $\cap\, b$V, quitte à remplacer C par un autre cercle méridien contenu dans D, on peut supposer que l'intérieur de D ne contient que des composantes de P$\cap b$V qui sont homotopes à un point dans bV. Une telle composante s borde un disque S dans D et un disque S$'$ dans bV. Comme dans le lemme 8, en remplaçant S par S$'$ et en bougeant un peu, on peut supprimer ces composantes et transformer D en un disque D$'$ tel que D$'\cap b$V $=$ C, et dont l'intersection avec k est contenue dans $k \cap$ D. Le disque D$'$ est un disque méridien de V (lemme 1).

On vient de démontrer que l'ordre de V relativement à k est majoré par le cardinal de $k \cap$ D, donc par le nombre maximal de points d'intersection de k et d'une surface de niveau de la fonction p. Le lemme en résulte.

Remarque. – Etant donné un nœud quelconque k, il existe des tores pleins non noués qui contienne k à un ordre arbitraire.

Démontrons maintenant la proposition. Soient V un tore plein noué dans $\mathbf{S}_3$ et a une âme de V. Soit k un nœud contenu dans l'intérieur de V et non-trivial dans V. Supposons d'abord que l'ordre de V relativement à k soit 1. Soient V$'$ un tore plein non noué dans $\mathbf{S}_3$ et φ un isomorphisme de V$'$ sur V. Le nœud $k' = \varphi^{-1}(k)$ n'est pas trivial, sinon k serait une âme de V (lemme 7). Le nœud k a même type que le nœud composé $a \# k'$. Par suite, le genre $\chi(k) = \chi(a) + \chi(k')$ est distinct de $\chi(a)$, donc k et a ne peuvent avoir même type.

Supposons maintenant que V ait un ordre $\gamma > 1$ relativement à k et que l'âme a de V ait même type que k. Il existe un automorphisme ψ de $\mathbf{S}_3$ tel que $\psi(a) = k$ et que ψ(V) soit contenu dans l'intérieur de V. Posons V$_1 = \psi^{-1}$(V), et définissons V$_n$, par récurrence sur $n \geq 1$, en posant V$_{n+1} = \psi^{-1}$(V$_n$). D'après le lemme 8, le tore plein V$_n$ a pour ordre γ^{n+1} relativement à k, ce qui est contradictoire avec le lemme 9. D'où la proposition.

4. Anneaux essentiels

Posons A $= \mathbf{S}_1 \times [0,1]$, bA $= \mathbf{S}_1 \times \{0,1\}$. Un *anneau singulier* dans une variété à bord V est une application continue f de A dans V telle que $f(b\text{A}) = f(\text{A}) \cap b$V. L'anneau singulier f est *essentiel* si :

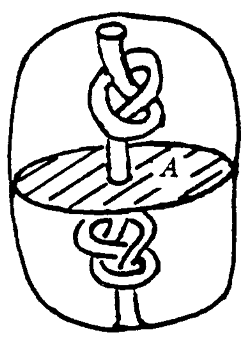
(a) l'anneau f est incompressible (*i.e.* $\pi_1(f)$ est injectif),

(b) le chemin $f|(\{1\} \times [0,1])$ n'est pas strictement homotope à un chemin dont l'image est contenue dans bV.

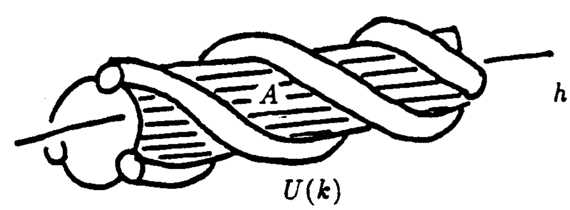
Le *théorème de l'anneau* ([4], [14]) affirme qu'une variété de dimension 3 qui contient un anneau singulier essentiel dont le bord est plongé, contient un anneau essentiel plongé de même bord. Nous n'utiliserons pas ce théorème.

Si E est la variété d'un nœud et $f : \mathrm{A} \to \mathrm{E}$ un anneau incompressible plongé, le bord $f(b\mathrm{A})$ de l'image de f découpe deux anneaux A_1 et A_2 sur le tore bE. Les tores $\mathrm{A}_1 \cup f(\mathrm{A})$ et $\mathrm{A}_2 \cup f(\mathrm{A})$ séparent E en deux variétés à bord torique E_1 et E_2 qui sont soit des tores pleins, soit des variétés de nœud (th. d'Alexander). Si l'anneau f n'est pas essentiel, on peut démontrer, à l'aide du théorème du lacet, que l'anneau est parallèle au bord, c'est-à-dire qu'il existe un plongement F de $\mathrm{A} \times [0,1]$ dans E tel que $\mathrm{F}(x,0) = f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{A}$, et qui envoie $\mathrm{A} \times \{1\}$ et $b\mathrm{A} \times [0,1]$ dans bE. Autrement dit, l'une des deux variétés E_1 ou E_2, par exemple E_1, est un tore plein et chaque composante de $f(b\mathrm{A})$ est un générateur de $\pi_1(\mathrm{E}_1)$ ([3], lemma 15.18, p.284).

Exemples. – 1) Si un nœud k est *composé* de deux nœuds k_1 et k_2, la variété $\mathrm{E}(k)$ est la réunion des variétés $\mathrm{E}(k_1)$ et $\mathrm{E}(k_2)$, recollées le long d'un anneau dont le bord est constitué de cercles méridiens pour les trois nœuds k_1, k_2 et k. Si aucun des nœuds k_1 ou k_2 n'est trivial, cet anneau est essentiel dans $\mathrm{E}(k)$. Le groupe $\mathrm{G}(k)$ est la somme amalgamée $\mathrm{G}(k_1) *_{\mathbf{Z}} \mathrm{G}(k_2)$, où les classes $[m_1]$ et $[m_2]$ de méridiens convenables sont identifiées entre elles.



composé



câble

FIG. 3

2) Soient h un nœud orienté, $\mathrm{U}(h)$ un voisinage tubulaire fermé de h, m et ℓ un méridien

et un parallèle de h tracés sur le bord $T(h)$ de $U(h)$. Soit (p, q) un couple d'entiers premiers entre eux, et k un cercle plongé sur $T(h)$ dont la classe dans $\pi_1(T(h))$ est $p[m] + q[\ell]$. Prenons un voisinage tubulaire $U(k)$ dont l'intersection avec $T(h)$ soit un anneau A. L'anneau $A' = \overline{T(h) - A}$ sépare $E(k)$ en un tore plein $\overline{U(h) - U(k)}$ d'âme h et une variété $\overline{E(h) - U(k)}$ difféomorphe à $E(h)$. Les composantes de bA ont un nombre de tours égal à q sur $U(h)$, un nombre d'enroulement égal à p sur $U(h)$, et à pq sur $U(k)$ [3]. Si $q = 0$, l'anneau A' n'est pas incompressible dans $E(k)$; le cercle k est un nœud trivial, méridien de $U(h)$. Si $|q| = 1$, l'anneau A' n'est pas essentiel dans $E(k)$; le nœud k a même type non orienté que h. Il en est de même si $|p| = 1$ et que le nœud h est trivial. Si $|q| \geq 2$, les composantes de bA' ne sont pas des générateurs de $\pi_1(\overline{U(h) - U(k)})$. Si le nœud h n'est pas trivial, la variété $\overline{E(h) - U(k)}$ n'est pas un tore plein, et l'anneau A' est essentiel dans $E(k)$; on est dans le cas d'un vrai câble. Si $|q| \geq 2$ et $|p| \geq 2$ et que le nœud h est trivial, les composantes de bA ne sont des générateurs du groupe fondamental pour aucun des tores pleins $\overline{U(h) - U(k)}$ ou $\overline{E(h) - U(k)}$, l'anneau A' est essentiel dans $E(k)$; ce cas est celui d'un nœud torique non trivial.

PROPOSITION 2 (*cf.* [6], [15], [16]) – *Supposons que la variété d'un nœud k contienne un anneau essentiel plongé* A. *L'anneau sépare* $E(k)$ *en deux variétés* E_1 *et* E_2, *et l'on est dans l'un des deux cas suivants qui s'excluent mutuellement* :

(a) *Aucune des variétés* E_1 *ou* E_2 *n'est un tore plein*; *le nœud k est décomposable*; *chaque composante de bA est un méridien de k.*

(b) *L'une au moins des variétés* E_1 *ou* E_2 *est un tore plein*; *le nœud k est un (p,q)-câble, avec $|q| \geq 2$, de l'âme de ce tore plein*; *les composantes de bA ont pour classe* $[m]^n[\ell]^{\pm 1}$ *dans* $G(k)$.

On a déjà vu que bA sépare le tore $T(k)$ en deux anneaux A_1 et A_2, et que A sépare $E(k)$ en deux variétés E_1 et E_2 dont les bords sont les tores $A \cup A_1$ et $A \cup A_2$.

Supposons que ni E_1 ni E_2 ne soient des tores pleins. Les variétés $E_2 \cup U(k)$ et $E_1 \cup U(k)$, qui sont les adhérences des complémentaires de E_1 et E_2 dans S_3, sont alors des tores pleins (th. d'Alexander). Les âmes de ces tores pleins sont des nœuds non triviaux k_1 et k_2 dont les variétés sont respectivement E_1 et E_2. D'après le théorème de van Kampen, le groupe

[3] Le groupe d'homologie $H_1(E(k))$ est le quotient de $\mathbf{Z}[m] \oplus \mathbf{Z}[\ell]$ par le sous-groupe N engendré par $p[m] - q[\ell]$. Soient r et s des entiers tels que $pr + qs = 1$. La classe *modulo* N de $\mu = s[m] + r[\ell]$ engendre $H_1(E(k))$; c'est donc la classe d'homologie d'un méridien de k. Par ailleurs, on a $pq\mu \equiv p[m]$ (mod N), d'où l'assertion.

$\pi_1(E_1 \cup U(k))$ est somme amalgamée de $\pi_1(E_1)$ et $\pi_1(U(k))$ le long de $\pi_1(A_1)$.

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(E_1) \arrow[dr, "\theta"] & \\ \pi_1(A_1) = \mathbf{Z} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \pi_1(E_1 \cup U(k)) = \mathbf{Z} \\ & \pi_1(U(k)) = \mathbf{Z} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Si l'homomorphisme ψ était injectif, l'homomorphisme θ serait injectif, ce qui est absurde car le nœud k_1 n'est pas trivial. Les homomorphismes ψ et $\theta \circ \varphi$ sont donc nuls ; les composantes de bA ($= bA_1$) sont des méridiens de k et k_2 (lemme 2) ; ce sont aussi des méridiens de k_1 [4].

Supposons au contraire que E_1 soit un tore plein. Remarquons d'abord que $E_1 \cup U(k)$ est un tore plein. Cela résulte du théorème d'Alexander si E_2 est une vraie variété de nœud. Si E_2 est un tore plein, la variété $E(k) = E_1 \cup E_2$ est la variété d'un nœud torique k'. Comme les nœuds toriques ont la propriété (P) ([3], p.274), les méridiens et les parallèles pour k et pour k' sont les mêmes sur $bE(k)$. Comme $E_1 \cup U(k')$ est un tore plein, $E_1 \cup U(k)$ est aussi un tore plein. Cela établi, l'homomorphisme φ de $\pi_1(A_1)$ dans $\pi_1(E_1)$ est injectif car l'anneau A est incompressible. Si φ était bijectif, l'anneau A serait parallèle au bord de $E(k)$ par l'intermédiaire du tore plein E_1. Par suite φ est la multiplication par un entier q tel que $|q| \geq 2$. Appliquons alors le théorème de van Kampen au calcul de $\pi_1(E_1 \cup U(k))$.

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(E_1) = \mathbf{Z} \arrow[dr] & \\ \pi_1(A_1) = \mathbf{Z} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \pi_1(E_1 \cup U(k)) = \mathbf{Z} \\ & \pi_1(U(k)) = \mathbf{Z} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

L'homomorphisme ψ est nécessairement un isomorphisme. Le nœud k est alors un (p,q)-câble du nœud k_2, âme du tore plein $E_1 \cup U(k)$ et du tore plein E_1.

5. Câbles

PROPOSITION 3. – *Soit* V *un tore plein, d'âme* a, *plongé dans* S_3, *et* k *un* (p,q)*-câble non trivial de* a *tracé sur* bV. *Soit* V' *un tore plein noué dont l'intérieur contient* k, *de sorte que*

[4] Cette démonstration, dûe à D. Noga [11], prouve aussi qu'un nœud décomposable possède le propriété (P). En effet, si l'on attache à $E_1 \cup E_2$ un tore plein V, au lieu de $U(k)$, de telle sorte que $E_1 \cup E_2 \cup V$ soit une sphère d'homotopie, alors $E_1 \cup V$ est un tore d'homotopie, et bA est encore constitué de méridiens de V.

k soit non-trivial dans V′. *Il existe un automorphisme φ de* S_3, *fixe sur k, tel que* T *soit intérieur à* φ(V′) ([13], §21, Hilfsatz 3, p.250).

Posons T = bV, T′ = bV′. Il s'agit de trouver un automorphisme φ de S_3, fixe sur k, tel que T et φ(T′) soient disjoints. On peut supposer que les tores T et T′ se coupent transversalement. Leur intersection est constituée de cercles plongés deux à deux disjoints. Une composante de T ∩ T′ est disjointe de k ; elle est donc homotope à un point ou à k sur T.

Soit s une composante de T ∩ T′ homotope à un point, et minimale, sur T. Elle borde sur T un disque S tel que S ∩ T′ = s. Le cercle s n'est pas un méridien de V′, sinon S serait un disque méridien de V′ (lemme 1), disjoint de k, ce qui est contraire à l'hypothèse que k est non-trivial dans V′. D'après le lemme 6, s borde un disque S′ dans T′. La réunion de S et S′ sépare S_3 en deux boules (th. d'Alexander). Comme S ∩ T′ = s, l'intérieur d'une de ces boules contient T′ − S′. Notons B l'autre boule ; l'intérieur de B est disjoint de T′. La boule B ne peut contenir k, sinon k serait trivial dans V′ (lemme 3). Il existe un automorphisme φ de S_3, qui est l'identité hors d'un voisinage de B, qui transforme S′ en un disque voisin de S, de sorte que l'intersection de φ(T′) et de T soit contenue dans T ∩ T′ et ne contienne plus s. L'automorphisme φ fixe k. De proche en proche, on élimine ainsi toutes les composantes de T ∩ T′ qui sont homotopes à un point dans T.

Les composantes de T ∩ T′ qui restent sont homotopes à k dans T ; elles sont nouées dans S_3. Elles ne peuvent donc être ni des cercles méridiens de V′, ni homotopes à un point dans T′. Leur nombre de tours sur V′ est $\neq 0$. Comme k est relié à une telle composante par un anneau contenu dans T′, le nombre de tours, dans V′, de ces composantes est $\neq \pm 1$, sinon k serait une âme de V′. Si T ∩ T′ n'est pas vide, il existe deux composantes s_1 et s_2 de T ∩ T′ qui bordent sur T un anneau A extérieur à V′. Cet anneau n'est pas essentiel dans $\overline{S_3 - V'}$, car un anneau essentiel dans la variété d'un nœud non trivial a un nombre de tours égal à 0 ou ± 1 (prop.2). Il existe un anneau A′ de bord $s_1 \cup s_2$ dans T′ tel que A ∪ A′ borde un tore plein W extérieur à V′. En utilisant ce tore plein, on peut trouver un automorphisme φ de S_3 qui est l'identité hors d'un voisinage de W, et qui envoie A′ sur un anneau voisin de A, de sorte que les composantes s_1 et s_2 sont éléminées sans introduire de nouvelle composante dans T ∩ T′. La proposition résulte de cela.

COROLLAIRE 1. – *Un nœud torique n'a pas de compagnon. En particulier, un nœud torique est indécomposable.*

Supposons que k soit un nœud torique tracé sur un tore T non noué. Le tore T partage

S_3 en deux tores pleins. Si V' est un tore plein noué contenant k non trivialement, d'après la prop.3, on peut supposer que V' contient l'un de ces tores pleins. Soit V le tore plein de bord T contenu dans V'. Comme V n'est pas noué et que V' est noué, il existe un disque méridien de V' disjoint de V (lemmes 5 et 3), de sorte que k est trivial dans V', contrairement à l'hypothèse.

Remarque. – Pour que le nœud torique de type (p,q) ait même type orienté que le nœud torique de type (p',q'), il faut et il suffit que (p',q') soit égal à l'un des couples (p,q), (q,p), $(-p,-q)$ ou $(-q,-p)$. On voit facilement que la condition est suffisante. Pour démontrer qu'elle est nécessaire, il suffit d'examiner les groupes des nœuds ([3], p.44).

COROLLAIRE 2. – *Un câble est indécomposable.*

Soit k un nœud câble non torique ; il suffit de démontrer qu'il n'existe pas de tore plein noué contenant non trivialement k avec pour ordre 1. Soit V un tore plein noué et k un (p,q)-câble de l'âme de V tracé sur bV (avec $q \geq 2$). Si V' est un tore plein noué contenant non trivialement k, on peut supposer que V' contient V (prop.3). Mais alors, l'ordre de V' relativement à k est un multiple de l'ordre q de V relativement à k (lemme 8), d'où le corollaire.

PROPOSITION 4. – *Soit k un nœud orienté non torique. Si k est le (p,q)-câble d'un nœud orienté a, et le (p',q')-câble d'un nœud orienté a' (avec $q \geq 2$, $q' \geq 2$), alors $p = p'$, $q = q'$, et les nœuds a et a' ont même type orienté.*

Soit V un tore plein noué d'âme a et V' un tore plein noué d'âme a'. On suppose que le nœud k est à la fois un (p,q)-câble de a tracé sur bV et un (p',q')-câble de V' tracé sur bV'. Dilatons un peu le tore plein V' en un tore plein V'' d'âme a' dont l'intérieur contienne k. Le nœud k n'est pas trivial dans V'', et V'' est noué dans S_3. D'après la prop.3, il existe un automorphisme φ de S_3, fixe sur k, tel que l'intérieur de $\varphi(V'')$ contienne bV. Posons $W = \varphi(V'')$ et démontrons que V est contenu à l'intérieur de W. Si V n'était pas contenu dans W, alors W contiendrait $\overline{S_3 - V}$. Comme V est noué, il existerait un disque méridien de W disjoint de $\overline{S_3 - V}$ (lemme 4), donc de bV, de sorte que k serait trivial dans W, ce qui est contradictoire. Cela établi, il n'existe pas de disque méridien de W disjoint de a, sinon il existerait un disque méridien de W disjoint de V, donc de k, et k serait trivial dans V'. Il reste pour possibilités que a soit une âme de W, ou que W fasse de $\varphi(a')$ un compagnon du nœud a.

On arrive à la conclusion que a et a' ont même type, ou que a' est compagnon de a,

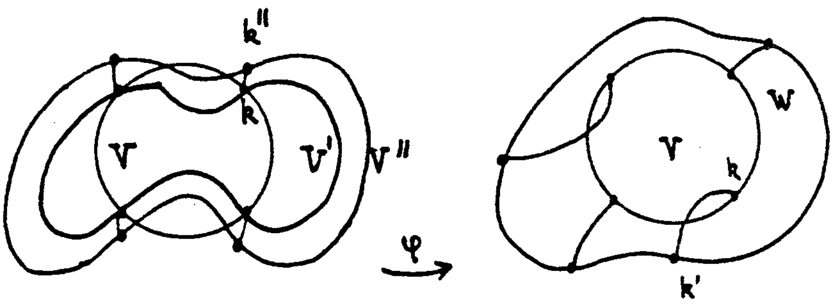


FIG. 4

ainsi qu'à la conclusion symétrique à savoir a et a' ont même type ou a est compagnon de a'. D'après la prop.1, la relation "*a' est compagnon de a*" est une relation d'ordre strict. On en conclut que a et a' ont même type et que les autres possibilités sont exclues.

Conservons les notations précédentes. Le nœud a est une âme de W, et même une âme orientée puisque q et q' ont même signe. La classe d'homotopie de k est $q[a]$ dans $\pi_1(\mathrm{V})$ et $q'[a]$ dans $\pi_1(\mathrm{W})$. On a donc $q = q'$.

Le nombre p est le nombre d'enlacement, dans S_3, de k et de a ; c'est donc le nombre d'enlacement de $\varphi^{-1}(a)$ et de k. Si $\varphi^{-1}(a)$ était une âme de V', on aurait ainsi démontré l'égalité $p = p'$. Mais on sait seulement que $\varphi^{-1}(a)$ est une âme de V'', et il faut regarder de plus près ce qui a changé pendant la dilatation de V' en V''. Soit k'' un nœud tracé sur $b\mathrm{V}''$, et bordant avec k un anneau A'' plongé dans $\overline{\mathrm{V}'' - \mathrm{V}'}$. Le nœud k'' a même type que k, et c'est un (p', q')-câble sur $b\mathrm{V}''$ du nœud $\varphi^{-1}(a)$, âme de V''. Posons $\mathrm{A} = \varphi(\mathrm{A}'')$, $k' = \varphi(k'')$; l'anneau A borde $k \cup k'$ dans W. Nous allons démontrer que l'on peut transformer l'anneau A en un anneau A_1, contenu dans $\overline{\mathrm{W} - \mathrm{V}}$, dont le bord est constitué de k' et d'un (p, q)-câble k_1 de a tracé sur $b\mathrm{V}$. Ceci achèvera la démonstration. En effet, l'anneau A_1 étant disjoint de a, le nombre d'enlacement p de k_1 et de a est égal au nombre d'enlacement p' de k' et de a.

Posons $\mathrm{T} = b\mathrm{V}$. Supposons que l'anneau A et le tore T se coupent transversalement. Les composantes de leur intersection sont des cercles plongés à l'intérieur de A et des arcs dont les extrémités, distinctes ou confondues, appartiennent à k.

Soit s une composante circulaire de $\mathrm{A} \cap \mathrm{T}$ homotope à un point dans A. Le cercle s borde un disque S dans A ; c'est un nœud trivial, disjoint de k, tracé sur T. Il ne peut être parallèle à k sur T car k n'est pas trivial. Par suite le cercle s borde un disque S' disjoint de k sur T. Une chirurgie analogue à celle déjà pratiquée plusieurs fois (FIG.2) permet, en substituant à S un disque voisin de S', d'éliminer la composante s de l'intersection $\mathrm{A} \cap \mathrm{T}$.

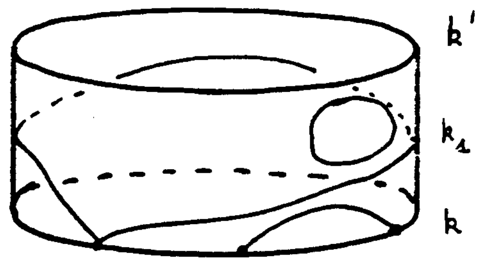


FIG. 5

On suppose toutes les composantes de ce type éliminées.

S'il existe des composantes circulaires de $A \cap T$ homotopes à k' dans A, il existe une telle composante k_1, la plus proche de k', qui borde avec k' un anneau A_1 contenu dans A dont l'intersection avec T est $k_1 \cup k'$. Le nœud k_1, de même type que k', est non trivial. Il est parallèle à k sur T ; c'est un (p, q)-câble de a tracé sur T. On remplace A par A_1 et k par k_1. On a ainsi supprimé toutes les composantes de $A \cap T$ intérieures à A.

Si une composante s de $A \cap T$ a un unique point commun avec k, c'est un cercle avec un point anguleux commun avec k. Si s borde un disque dans A, c'est un nœud trivial dans S_3. Ce ne peut être un méridien de V car un méridien rencontre k en au moins q points. Le cercle s est donc le bord d'un disque plongé dans T (lemme 6). On élimine cette composante par le procédé de chirurgie utilisé plus haut.

Si, parmi les composantes de $A \cap T$ ayant un unique point commun avec k, il en existe qui sont homotopes à k dans A, il existe une telle composante k_1 bordant avec k' dans A un anneau A_1 tel que $A_1 \cap T = k_1 \cup k$. Le nœud k_1 a même type que k' ; c'est un (p_1, q_1)-câble tracé sur T. D'après l'invariance du nombre de tours, déjà démontrée, on a $q_1 = q$. Le nombre algébrique d'intersection de $[k]$ et $[k_1]$ est

$$[k].[k_1] = qp_1 - pq_1 = q(p_1 - p)\,.$$

Comme k et k_1 ont un unique point commun, ce nombre d'intersection est égal à 0, 1 ou -1. L'inégalité $q \geq 2$ implique $p_1 = p$. On peut alors procéder comme plus haut, et remplacer k par k_1 et A par A_1.

Il ne reste plus dans $A \cap T$ que des arcs dont les extrémités sont disjointes et appartiennent à k. Si t est un tel arc, la réunion de t et de l'un des arcs du nœud k ayant les mêmes extrémités que t, est un cercle anguleux s bordant un disque dans A. Le cercle s n'est pas un méridien de V car on peut le déformer sur T en un cercle ayant au plus un point d'intersection avec k. Il borde donc, sur T, un disque dont l'intérieur est disjoint de k, et on peut éliminer l'arc t. Cela achève la démonstration de la proposition.

Appendice

THÉORÈME (J.W. Alexander). – *Une sous-variété de* $\mathbf{S}_3$ *difféomorphe à* $\mathbf{S}_2$ *sépare* $\mathbf{S}_3$ *en deux variétés difféomorphes à la boule fermée* $\mathbf{B}_3$.

Une sous-variété de $\mathbf{S}_3$ *difféomorphe à* $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$ *sépare* $\mathbf{S}_3$ *en deux variétés dont l'une au moins est difféomorphe à* $\mathbf{S}_1 \times \mathbf{B}_2$.

THÉORÈME (C. Papakyriakopoulos). – *Soit* V *une variété de dimension* 3. *On note* bV *son bord, et on choisit un point-base* $*$ *dans* bV.

a) *Si l'homomorphisme de* $\pi_1(b\mathrm{V}, *)$ *dans* $\pi_1(\mathrm{V}, *)$ *n'est pas injectif, il existe un cercle plongé dans* bV, *homotope à un point dans* V *mais non dans* bV (théorème du lacet).

b) *Soit* C *un cercle plongé dans* bV, *homotope à un point dans* V. *Il existe un disque* D *plongé dans* V *tel que* $\mathrm{C} = \mathrm{D} \cap b\mathrm{V}$ (lemme de Dehn).

BIBLIOGRAPHIE

1. J.W. ALEXANDER, On the subdivision of a 3-space by a polyhedron, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **10** (1924), 6-8.
2. R.H. BING and J.M. MARTIN, Cubes with knotted holes, *Trans. of the A.M.S.* **155** (1971), 217-231.
3. G. BURDE, H. ZIESCHANG, *Knots*, Walter de Gruyter (1985).
4. J.W. CANNON, C.D. FEUSTEL, Essential embeddings of annuli and Möbius bands in 3-manifolds, *Trans. of the A.M.S.* **215** (1976), 219-239.
5. M. DEHN, Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes, *Math. Ann.* **69** (1910), 137-168.
6. C.D. FEUSTEL, W. WHITTEN, Groups and complements of knots, *Can. J. of Math.* **30** (1978), 1284-1295.
7. C.McA. GORDON, J. LUECKE, Knots are determined by their complements, *Journal. of A.M.S.* **2** (1989), 371-415.
8. A. GRAMAIN, Rapport sur la théorie classique des nœuds (1ère partie), *Sém. Bourbaki*, exposé n°485 (1975-76), Lect. Notes in Math. 567, Springer (1977), 222-237.

9. A. GRAMAIN, Rapport sur la théorie classique des nœuds (2ème partie), *Sém. Bourbaki*, exposé n°732 (1990-91), *Astérisque* **201-203** (1991), 89-113.

10. H. KNESER, Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein* **38** (1929), 248-260.

11. D. NOGA, Über den Aussenraum von Produktknoten und die Bedeutung der Fixgruppen, *Math. Zeitschrift* **101** (1967), 131-141.

12. C. PAPAKYRIAKOPOULOS, On Dehn's lemma and the asphericity of knots, *Ann. of Math.* **66** (1957), 1-26.

13. H. SCHUBERT, Knoten und Vollringe, *Acta Mathematica* **90** (1953), 131-286.

14. P. SCOTT, A new proof of the annulus and torus theorem, *Amer. J. of Math.* **102** (1980), 241-277

15. J. SIMON, An algebraic classification of knots in S^3, *Ann. of Math.* **97** (1973), 1-13.

16. W. WHITTEN, Algebraic and geometric characterizations of knots, *Inventiones Math.* **26** (1974), 259-270.

Faculté des Sciences
Parc de Grandmont
37200 Tours (France)
gramain@univ-tours.fr