PIERRE CARTIER

Construction combinatoire des invariants de Vassiliev-Kontsevich des nœuds

Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1993, tome 45
« Conférences de P. Cartier, P. Di Francesco, J. Fröhlich, P. Hello, Ch. Kassel, V. Kharlamov, B. Khesin, J. Magnen, M. Rabaud, M. Schottenloher », , exp. nº 1, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1993__45__1_0>

Topologie/ *Topology*

CONSTRUCTION COMBINATOIRE DES INVARIANTS DE VASSILIEV-KONTSEVICH DES NŒUDS (*)

Pierre CARTIER

Résumé - Kontsevich a donné récemment une construction explicite des invariants des nœuds introduits par Vassiliev. La méthode de Kontsevich suppose le calcul d'intégrales multiples portant sur une réalisation géométrique du nœud dans l'espace à 3 dimensions. En nous appuyant sur les résultats de Drinfeld, nous donnons une construction combinatoire qui ne nécessite que la connaissance d'un diagramme de projection plane, et des calculs algébriques finis. Le point central est la comparaison de deux catégories qui codent des types différents de configurations.

A combinatorial construction for the Vassiliev-Kontsevich knot invariants

Abstract - After the initial impetus by Vassiliev, Kontsevich has been able to give an explicit formula for the new knot invariants. His method rests on the evaluation of some complicated multiple integrals depending on the actual realization of a knot by a smooth curve in the 3-space $\mathbb{R}^3$. In this note, we use results of Drinfeld to produce a definition of these invariants which can be read off from a plane diagram (under- and overcrossings) and which requires only a finite amount of calculation. The key point in the proof is a comparison theorem for categories encoding the various configurations under consideration.

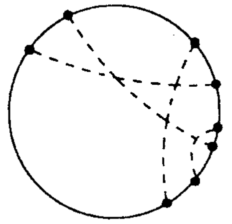
Abridged English Version - There has been a flood of results about the classification of knots, starting from Jones' discovery of his polynomial [3]. The various generalizations have

Note présentée par Alain CONNES

Ce texte reprend une prépublication de l'IHES de Mars 1993 - IHES/M/93/17

been subsumed under a general procedure relying on Hopf algebras (also called quantum groups) [9]. Recently, a new approach has been developed : Vassiliev considers the natural stratification of the space of immersions of a circle in the 3-space $\mathbb{R}^3$ and introduces the new notion of "knot invariant of finite type".

Vassiliev [10] introduces also *chord diagrams* of the following type



$p = 4$

A Vassiliev invariant J of order p defines *weights* associated to the diagrams with p chords. These weights satisfy certain necessary linear relations (V_p) and determine J up to the addition of a Vassiliev invariant of order $p-1$. Various methods to define weights are known, using for instance linear representations of Lie algebras. The problem solved by Kontsevich [5] is to show that the linear relations (V_p) are sufficient and to produce explicitly a Vassiliev invariant of order p with given weights. This is done by associating to any knot (or link) C a power series $\sum_{p\geq 0} VK_p(C)h^p$ where $VK_p(C)$ is a certain linear combination of symbols corresponding to the various chord diagrams with p chords. The various coefficients can in principle be computed as multiple integrals extended over the curve C in the 3-space $\mathbb{R}^3$, generalizing Gauss well-known integral for the linking number of two curves.

In this note, we describe a *new construction of the invariants* $VK_p(C)$; for given C and p, it requires a finite amount of calculation and is purely combinatorial. The concept of *monoidal category* formalizes some aspects of the linear maps and tensor products of vector spaces. On the other hand, it's well adapted to the description of local modifications and of step by step construction of planar configurations. In particular, various authors [2], [4], [9] have defined a *category of tangles* $\mathcal{L}$ which captures the combinatorics of the planar projections of knots and links, closed or with loose ends. The closed links appear as the endomorphisms of the unit object (corresponding to a one-dimensional vector space). In a similar vein, the linear combinations of the chord diagrams are the endomorphisms of the unit object of a suitable K-linear monoidal category $\mathcal{T}$. With an obvious definition of the category $\mathcal{T}[[h]]$, *our main construction is a functor*

$$VK : \mathcal{L} \to \mathcal{T}[[h]]$$

which, restricted to the endomorphisms of the unit object, produces the Vassiliev-Kontsevich universal invariant.

The functor VK is not compatible with the tensor products in the categories $\mathcal{L}$ and $\mathcal{T}[[h]]$. To restore the compatibility, we need to *twist the tensor product* in the category $\mathcal{T}[[h]]$. This is done using general results about coherence in monoidal categories (see section 1 below) and any solution $\Phi(u,v)$ to a set of nonlinear equations introduced by Drinfeld (equations (24) and (25) below). All the necessary structure is present in the category $\mathcal{T}[[h]]$ according to a general theorem about *deformation of braided categories* (section 5 below). The existence and uniqueness of the functor VK is then a consequence of a general result of Street, Joyal and Shum (section 3 below).

The Drinfeld series Φ were introduced by him in order to understand the linear representations of the braid group B_m occuring as monodromy of the Knizhnik-Zamolodchikov equations. In this respect, Drinfeld asserts the existence of an isomorphism

$$(D) \qquad \widehat{KB_m} \simeq KS_m \ltimes \widehat{U\mathfrak{t}_m}.$$

This has been proved in detail by S. Piunikhin [7]. It is also a corollary of the construction of the functor VK.

Relying on the isomorphism (D) and the well-known method of so-called Markov traces to deduce knot invariants from braid invariants, Piunikhin [7] has sketched a combinatorial construction of the invariants $VK_p(C)$.

Le lecteur francophone est invité à se reporter à la première partie (en langue anglaise) pour une description du problème, du résultat principal et de la méthode.

1. Catégories monoïdales.

Soit $\mathcal{C}$ une *catégorie monoïdale* ; elle est donc munie d'un foncteur de $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$, noté $\otimes$, d'une contrainte d'associativité α et d'un objet unité I. Autrement dit, à deux morphismes $f : X \to X'$ et $g : Y \to Y'$ est associé un morphisme $f\otimes g$ de $X\otimes Y$ dans $X'\otimes Y'$; à tout triplet d'objets X,Y,Z de $\mathcal{C}$ est associé un isomorphisme $\alpha_{X,Y,Z}$ de $(X\otimes Y)\otimes Z$ avec $X\otimes(Y\otimes Z)$. Nous simplifions en supposant qu'on a $X\otimes I = I\otimes X = X$.

Règles de calcul :

$$(1) \qquad (f'\otimes g')\cdot(f\otimes g) = f'f\otimes g'g$$

$$(2) \qquad (f\otimes(g\otimes h))\cdot\alpha_{X,Y,Z} = \alpha_{X',Y',Z'}\cdot((f\otimes g)\otimes h)$$

(3) $$(X \otimes \alpha_{Y,Z,T}) \cdot \alpha_{X,Y\otimes Z,T} \cdot (\alpha_{X,Y,Z} \otimes T) = \alpha_{X,Y,Z\otimes T} \cdot \alpha_{X\otimes Y,Z,T}.$$

Ici et dans la suite, on confond l'objet X et le morphisme identité correspondant. La catégorie monoïdale est *stricte* si l'on a $\alpha = 1$ et en particulier $X \otimes (Y \otimes Z) = (X \otimes Y) \otimes Z$.

Voici une forme constructive du *théorème de cohérence* de MacLane [6]. Nous considérons les suites finies $\xi = (X_1, \cdots, X_p)$ d'objets de $\mathcal{C}$ et définissons par récurrence le produit $\Pi\xi = X_1 \otimes \cdots \otimes X_p$ d'une telle suite

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_{p-1} \otimes X_p = (X_1 \otimes \cdots \otimes X_{p-1}) \otimes X_p.$$

Le produit $\xi\eta$ de deux suites est la juxtaposition. Par une double récurrence sur p et q, on associe à tout couple de suites $\xi = (X_1, \cdots, X_p)$ et $\eta = (Y_1, \cdots, Y_q)$ un isomorphisme $\Theta_{\xi,\eta}$ de $\Pi\xi \otimes \Pi\eta$ sur $\Pi(\xi\eta)$ qui satisfait aux règles :

(4) $$\Theta_{\xi,\eta} = 1 \qquad \text{(identité)} \qquad \text{si } q = 1$$

(5) $$\alpha_{\Pi\xi,\Pi\eta,\Pi\zeta} = \left(\Pi\xi \otimes \Theta^{-1}_{\eta,\zeta}\right) \cdot \Theta^{-1}_{\xi,\eta\zeta} \cdot \Theta_{\xi\eta,\zeta} \cdot (\Theta_{\xi,\eta} \otimes \Pi\zeta).$$

Etant donnés des morphismes $f : \Pi\xi \to \Pi\xi'$ et $g : \Pi\eta \to \Pi\eta'$ on définit le produit $f \otimes_\alpha g : \Pi(\xi\eta) \to \Pi(\xi'\eta')$ par l'égalité

(6) $$f \otimes_\alpha g = \Theta_{\xi',\eta'} \cdot (f \otimes g) \cdot \Theta^{-1}_{\xi,\eta}.$$

L'analogue de la règle (1) est satisfait, et la règle (2) devient une condition d'associativité

(7) $$f \otimes_\alpha (g \otimes_\alpha h) = (f \otimes_\alpha g) \otimes_\alpha h.$$

Grâce à l'emploi du produit modifié $\otimes_\alpha$, on peut oublier la contrainte d'associativité α dans les calculs, mais la rétablir dans les formules finales.

2. Tressages.

Un *tressage* dans la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est la donnée d'isomorphismes $R_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X$ satisfaisant aux trois règles

(8) $$R_{X',Y'} \cdot (f \otimes g) = (g \otimes f) \cdot R_{X,Y}$$

(9) $$R_{X\otimes Y,Z} = \alpha_{Z,X,Y} \cdot (R_{X,Z} \otimes Y) \cdot \alpha^{-1}_{X,Z,Y} \cdot (X \otimes R_{Y,Z}) \cdot \alpha_{X,Y,Z}$$

(10) $$R_{X,Y\otimes Z} = \alpha^{-1}_{Y,Z,X}(Y\otimes R_{X,Z})\cdot \alpha_{Y,X,Z}\cdot (R_{X,Y}\otimes Z)\cdot \alpha^{-1}_{X,Y,Z}.$$

On peut étendre la définition de $R_{X,Y}$ aux suites d'objets. On obtient ainsi des isomorphismes $R_{\xi,\eta} : \Pi(\xi\eta) \to \Pi(\eta\xi)$ satisfaisant aux règles

(11) $$R_{\xi',\eta'}\cdot (f\otimes_\alpha g) = (g\otimes_\alpha f)\cdot R_{\xi,\eta}$$

(12) $$R_{\xi\eta,\zeta} = (R_{\xi,\zeta}\otimes_\alpha \Pi\eta)\cdot(\Pi\xi\otimes_\alpha R_{\eta,\zeta})$$

(13) $$R_{\xi,\eta\zeta} = (\Pi\eta\otimes_\alpha R_{\xi,\zeta})\cdot(R_{\xi,\eta}\otimes_\alpha \Pi\zeta),$$

d'où l'on déduit *l'équation de Yang-Baxter*

(14) $$(\Pi\zeta\otimes_\alpha R_{\xi,\eta})\cdot(R_{\xi,\zeta}\otimes_\alpha \Pi\eta)\cdot(\Pi\xi\otimes_\alpha R_{\eta,\zeta})$$
$$= (R_{\eta,\xi}\otimes_\alpha \Pi\xi)\cdot(\Pi\eta\otimes_\alpha R_{\xi,\zeta})\cdot(R_{\xi,\eta}\otimes_\alpha \Pi\zeta).$$

Soient X un objet de $\mathcal{C}$ et m un entier positif. On note B_m le groupe des tresses à m brins, et $s_1,\cdots,s_{m-1}$ les générateurs de B_m correspondant au croisement de deux brins consécutifs. Il existe un homomorphisme $\beta_{X,m}$ de B_m dans le groupe des automorphismes de $X^{\otimes m} = X\otimes\cdots\otimes X$ (m facteurs) caractérisé par la formule

(15) $$\beta_{X,m}(s_i) = \alpha^{-1}\left(X^{\otimes(i-1)}\otimes R_{X,X}\right)\alpha\otimes X^{\otimes(m-i-1)}.$$

On a posé $\alpha = \alpha_{X^{\otimes(i-1)},X,X}$.

3. Catégories et invariants des entrelacs.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale. Une *dualité* dans $\mathcal{C}$ est un système (A,B,a,b) où A et B sont des objets de $\mathcal{C}$, et $a : A\otimes B\to I$, $b : I\to B\otimes A$ sont des morphismes satisfaisant aux relations

(16) $$(a\otimes_\alpha A)\cdot(A\otimes_\alpha b) = A$$

(17) $$(B\otimes_\alpha a)\cdot(b\otimes_\alpha B) = B.$$

On dit aussi que A est un *dual à gauche de* B ; deux duals à gauche de B sont isomorphes.

On dispose parfois de systèmes (A, B, a_0, b_0) où les relations (16) et (17) sont remplacées par

(16 bis) $$(a_0 \otimes_\alpha A) \cdot (A \otimes_\alpha b_0) = \lambda_A$$

(17 bis) $$(B \otimes_\alpha a_0) \cdot (b_0 \otimes_\alpha B) = \lambda_B,$$

où λ_A et λ_B sont inversibles. Si l'on pose $a = a_0 \cdot \left(\lambda_A^{-1} \otimes_\alpha B\right)$ et $b = b_0$, alors (A, B, a, b) est une dualité.

Une *catégorie en ruban* est une catégorie tressée dans laquelle tout objet possède un dual à gauche, munie d'une "torsion" θ, c'est-à-dire d'un automorphisme du foncteur identique satisfaisant aux relations

(18) $$\theta_{X \otimes Y} = R_{Y,X} R_{X,Y} \cdot (\theta_X \otimes_\alpha \theta_Y)$$

(19) $$a \cdot (\theta_A \otimes_\alpha B) = a \cdot (A \otimes_\alpha \theta_B)$$

quels que soient les objets X, Y, et la dualité (A, B, a, b).

Un *entrelacs* est une courbe C, différentiable, fermée, orientée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$; elle a une ou plusieurs composantes connexes. Un *encadrement* de l'entrelacs C est une trivialisation du fibré normal de C dans $\mathbb{R}^3$.

THÉORÈME (Street, Joyal, Shum [4]). *Notons $\mathcal{L}$ la catégorie en ruban librement engendrée par une dualité $(\uparrow, \downarrow, a, b)$. Soient I l'objet unité de $\mathcal{L}$ et M l'ensemble des morphismes de I dans I. On peut construire une bijection de M avec l'ensemble des classes d'isotopie des entrelacs avec encadrement.*

A tout entrelacs C, muni d'un encadrement, on associe son invariant universel, qui est un morphisme $[C] : I \to I$ dans la catégorie $\mathcal{L}$. Les endomorphismes de l'objet $\uparrow$ forment un monoïde commutatif M_1 ; il paramètre les entrelacs avec une composante distinguée.

4. Tressages infinitésimaux.

Désormais, on fixe un corps K de caractéristique 0, et les catégories considérées sont K-linéaires. Une *catégorie tensorielle* $\mathcal{T}$ est une catégorie monoïdale stricte ($\alpha = 1$), le produit tensoriel $f \otimes g$ étant bilinéaire en f et g, munie d'un tressage symétrique σ (on a $\sigma_{Y,X} = \sigma_{X,Y}^{-1}$), et dans laquelle chaque objet a un dual à gauche.

Un *tressage infinitésimal* t dans $\mathcal{T}$ est défini par des morphismes fonctoriels $t_{X,Y}$: $X \otimes Y \to X \otimes Y$, tels que l'on ait :

$$\sigma_{X,Y} t_{X,Y} = t_{Y,X} \sigma_{X,Y} \qquad \text{(symétrie)} \tag{20}$$

$$t_{X \otimes X',Y} = X \otimes t_{X',Y} + \sigma^{-1} (t_{X,Y} \otimes X') \sigma \qquad \text{(additivité)} \tag{21}$$

avec $\sigma = X \otimes \sigma_{X',Y}$. L'exemple typique est fourni par la catégorie des représentations linéaires de dimension finie d'une algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}$. Les opérations tensorielles sont définies comme d'habitude ; si $\tau \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ est un tenseur symétrique invariant par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$, de la forme $\sum_a e^a \otimes e_a$, on définit le tressage infinitésimal correspondant par

$$t_{X,Y} = \sum_a (e^a)_X \otimes (e_a)_Y \tag{22}$$

(on note $(e^a)_X$ l'opérateur dans X défini par l'élément e^a de $\mathfrak{g}$).

On rappelle qu'il existe un homomorphisme canonique de B_m sur le groupe symétrique S_m, dont le noyau P_m est un groupe pronilpotent. Comme tel, il lui est associé, d'après Quillen [8], une algèbre de Lie pronilpotente $\mathfrak{t}_m$:

générateurs $t_{ij} = t_{ji}$ pour $i \neq j$ dans $\{1, \cdots, m\}$

relations $[t_{ij}, t_{k\ell}] = 0, [t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] = 0$ pour i, j, k, ℓ distincts.

Soit $U\mathfrak{t}_m$ l'algèbre associative enveloppante de $\mathfrak{t}_m$.

Soit X un objet de $\mathcal{T}$. On définit alors un homomorphisme d'algèbres $\tau_{X,m} : U\mathfrak{t}_m \to \mathrm{End}\,(X^{\otimes m})$ par la formule

$$\tau_{X,m}(t_{ij}) = \sigma \left(t_{X,X} \otimes X^{\otimes(m-2)} \right) \sigma^{-1} \tag{23}$$

où σ est n'importe quelle permutation telle que $\sigma(1) = i, \sigma(2) = j$. C'est la contrepartie infinitésimale de l'homomorphisme $\beta_{X,m}$ défini au n° 2.

5. Déformations de catégories.

On considère une catégorie tensorielle $\mathcal{T}$, et un tressage infinitésimal t dans $\mathcal{T}$. La catégorie $\mathcal{T}[[h]]$ a les mêmes objets que $\mathcal{T}$, mais un morphisme de X dans Y, dans $\mathcal{T}[[h]]$, est une série formelle $\sum_{n \geq 0} f_n h^n$ en h, avec $f_n : X \to Y$ dans $\mathcal{T}$.

Une *série de Drinfeld* est une série formelle non commutative $\Phi(u,v)$ égale à $\Phi(v,u)^{-1}$, avec les propriétés suivantes :

$$\Phi\left(t_{12}, t_{23}+t_{24}\right) \Phi\left(t_{13}+t_{23}, t_{34}\right)=\Phi\left(t_{23}, t_{34}\right) \Phi\left(t_{12}+t_{13}, t_{24}+t_{34}\right) \Phi\left(t_{12}, t_{23}\right) \tag{24}$$

(dans l'algèbre enveloppante complétée $\widehat{U\mathfrak{t}_4}$)

$$\exp \frac{1}{2}\left(t_{13}+t_{23}\right)=\Phi\left(t_{13}, t_{12}\right) \cdot \exp \frac{1}{2} t_{13} \cdot \Phi\left(t_{13}, t_{23}\right)^{-1} \cdot \exp \frac{1}{2} t_{23} \cdot \Phi\left(t_{12}, t_{23}\right) \tag{25}$$

(dans $\widehat{U\mathfrak{t}_3}$).

Drinfeld [1] a construit explicitement une telle série à coefficients réels, par résolution d'une équation différentielle ; il a prouvé, de manière non constructive, l'existence d'une série Φ à coefficients rationnels.

THÉORÈME. *La catégorie $\mathcal{T}[[h]]$ est une catégorie en ruban pour les données suivantes.*

a) *Le produit tensoriel des objets est le même que dans $\mathcal{T}$. On a donc en particulier $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ puisque la catégorie monoïdale $\mathcal{T}$ est stricte. Le produit tensoriel des morphismes est l'extension aux séries en h de celui de $\mathcal{T}$.*

b) *La contrainte d'associativité est l'automorphisme*

$$\alpha_{X,Y,Z}=\Phi\left(h t_{X,Y}, h t_{Y,Z}\right) \tag{26}$$

de $X \otimes Y \otimes Z$.

c) *Le tressage est donné par*

$$R_{X,Y}=\sigma_{X,Y} \exp \left(\frac{h}{2} t_{X,Y}\right). \tag{27}$$

d) *La torsion est donnée par*

$$\theta_X=\exp \left(\frac{h}{2} \gamma_X\right). \tag{28}$$

Pour définir γ_X, on introduit une dualité (A, X, a, b) dans $\mathcal{T}$, et l'on pose $\gamma_X = -(X \otimes a t_{A,X})(b \otimes X)$; on a alors

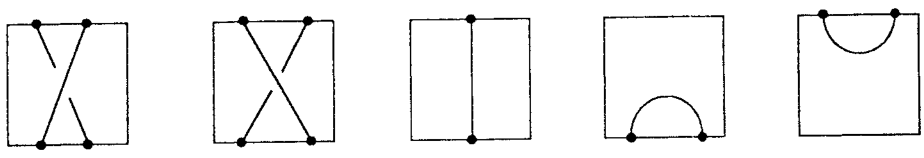
$$2 t_{X,Y}=\gamma_{X \otimes Y}-\gamma_X \otimes Y-X \otimes \gamma_Y \tag{29}$$

et γ_X joue le rôle de l'opérateur de Casimir quadratique dans les représentations d'algèbres de Lie.

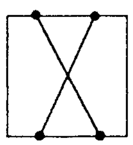
La démonstration est une suite de vérifications essentiellement tautologiques. Pour déformer la dualité, on utilise les formules (16 bis) et (17 bis) en remarquant que toute série formelle en h qui commence par 1 est inversible.

6. Construction de l'invariant de Vassiliev-Kontsevich.

La catégorie $\mathcal{L}$ est la catégorie monoïdale stricte librement engendrée par deux objets, notés $\uparrow$ et $\downarrow$, et les morphismes qu'on peut représenter par les pictogrammes suivants :

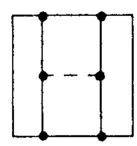


avec toutes les orientations possibles des brins. Les relations entre ces générateurs traduisent les transformations de Reidemeister. On peut de même définir la catégorie tensorielle $\mathcal{S}$ libre sur un objet ; la définition est analogue à la précédente, mais puisque l'on a $\sigma_{X,Y} = \sigma_{Y,X}^{-1}$ dans une catégorie tensorielle, on remplace les deux premiers générateurs précédents par un seul

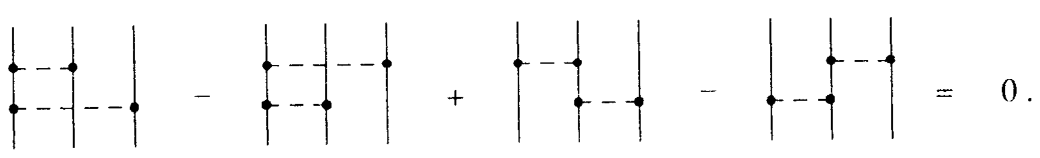


.

On élargit ensuite la catégorie tensorielle $\mathcal{S}$ en une catégorie tensorielle $\mathcal{T}$ en lui imposant l'existence d'un tressage infinitésimal universel ; ceci revient à introduire les nouveaux générateurs représentés par une vignette



avec toutes les orientations possibles des traits pleins ; la relation fondamentale s'écrit $[t_{12}, t_{13} + t_{23}] = 0$ et se représente ainsi



Les objets de $\mathcal{T}$ (et de $\mathcal{L}$) sont les suites finies de symboles $\uparrow$ et $\downarrow$; l'objet unité est la suite vide $\emptyset$. Les endomorphismes de $\uparrow$ dans $\mathcal{T}$ forment une K-algèbre commutative $\mathcal{A}$ qui n'est autre que l'algèbre construite par Bar-Natan et Kontsevich à partir des diagrammes de cordes.

Appliquons le théorème du n° 5 : la catégorie $\mathcal{T}[[h]]$ acquiert la structure d'une catégorie en ruban. Vu le caractère universel de la catégorie $\mathcal{L}$, on définit un foncteur VK de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{T}[[h]]$ qui induit l'application identique sur les objets. Par restriction à l'objet $\uparrow$, on déduit du foncteur VK un homomorphisme $VK_{\uparrow} : M_1 \to \mathcal{A}[[h]]$. Identifiant les éléments de M_1 aux classes d'isotopie d'entrelacs avec encadrement, on peut écrire $VK_{\uparrow}(C)$ sous la forme $\sum_{p \geq 0} VK_p(C)h^p$; ceci fournit la construction de l'invariant de Vassiliev-Kontsevich universel d'ordre p, soit $VK_p(C)$.

REFERENCES

[1] V.G. DRINFELD, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$), *Leningrad Math. J.* **2** (1991), p. 829-860.

[2] P.J. FREYD et D.N. YETTER, Braided compact closed categories with applications to low dimensional topology, *Adv. Math.* **77** (1989), p. 156-182.

[3] V. JONES, A polynomial invariant of knots via von Neumann algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1985), p. 103-111.

[4] A. JOYAL et R. STREET, Tortile Yang-Baxter operators in tensor categories, *Journ. Pure Appl. Alg.* **71** (1991), p. 43-51.

[5] M. KONTSEVICH, Graphs, homotopical algebra and low-dimensional topology, prépublication, 1992.

[6] S. MACLANE, Natural associativity and commutativity,*Rice Univ. Stud.* **49** (1963), p. 28-46.

[7] S. PIUNIKHIN, Combinatorial expression for universal Vassiliev link invariant, prépublication, Harvard, mars 1993.

[8] D. QUILLEN, Rational homotopy theory, *Ann. of Maths* **90** (1969), p. 205-295.

[9] N. Y. RESHETIKHIN et V.G. TURAEV, Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups, *Commun. Math. Phys.* **127** (1990), p. 1-26.

[10] V.A. VASSILIEV, Cohomology of knot spaces, *in* Theory of singularities and its applications, Advances in Soviet Math., A.M.S. (1990), p. 23-69.

Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)