

# RECHERCHE COOPÉRATIVE SUR PROGRAMME N° 25

CHRISTIAN KASSEL

## **Invariants des nœuds, catégories tensorielles et groupes quantiques**

*Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg - RCP25, 1992, tome 43*  
« Conférences de A. Aspect, B. Carter, R. Coquereaux, G.W. Gibbons, Ch. Kassel, Y. Kosman-Schwarzbach, S. Majid, G. Maltiniotis, P. Pansu, G.A. Vilkovisky, Z. Wojtkowiak », , exp. n° 5, p. 81-102

[http://www.numdam.org/item?id=RCP25\\_1992\\_\\_43\\_\\_81\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RCP25_1992__43__81_0)

© Université Louis Pasteur (Strasbourg), 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Recherche Coopérative sur Programme n° 25 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Invariants des noeuds, catégories tensorielles et groupes quantiques. <sup>(1)</sup>

Christian KASSEL

Depuis la découverte spectaculaire en 1984 d'un nouvel invariant des noeuds par Vaughn JONES, on assiste à des convergences surprenantes de la topologie — celle des noeuds ou plus généralement celle des variétés de basse dimension — avec l'algèbre et la physique mathématique, notamment avec la théorie des groupes quantiques fondée au début des années 1980 par V.G. DRINFELD et l'école léningradoise de FADDEEV.

Récemment ces convergences ont trouvé une élégante explication dans un formalisme algébrique commun, celui des catégories tensorielles.

Le but de ces lignes est de présenter cette nouvelle approche et de montrer combien elle est naturelle lorsqu'on cherche à construire des invariants pour les noeuds de  $\mathbf{R}^3$ .

## 1. Construction d'invariants dans des catégories tensorielles

Dans ce numéro, on montre comment associer aux noeuds des invariants à valeurs dans une catégorie tensorielle.

1.1. Le principe de la méthode est bien connu : on représente un noeud ou plus généralement un entrelacs, c'est à dire une réunion finie de cercles disjoints plongés dans l'espace  $\mathbf{R}^3$ , par une projection régulière sur le plan  $\mathbf{R}^2$ . Par projection régulière, j'entends qu'on puisse diviser le plan en strates horizontales telles que l'intersection de la projection de l'entrelacs et de chaque strate soit une juxtaposition (éventuellement vide) de formes

---

<sup>(1)</sup> Version remaniée d'une conférence donnée lors de la 52ème Rencontre entre Physiciens théoriciens et Mathématiciens (RCP n°25) à Strasbourg en avril 1991.

du type suivant :



Fig.1

La projection régulière d'un entrelacs se présente ainsi comme un assemblage des formes primitives précédentes. Comme ces dernières s'assemblent pour former des objets plus généraux que les entrelacs, il est commode de se placer dans le cadre plus général des enchevêtrements.

Un *enchevêtrement* est une réunion finie de segments et de cercles disjoints plongés dans  $\mathbf{R}^2 \times [0, 1]$ , le bord de cette variété de dimension un se trouvant dans  $\mathbf{R} \times \{0\} \times \{0, 1\}$ . Les formes primitives de la Figure 1 sont des enchevêtrements. Voici un autre exemple d'enchevêtrement :

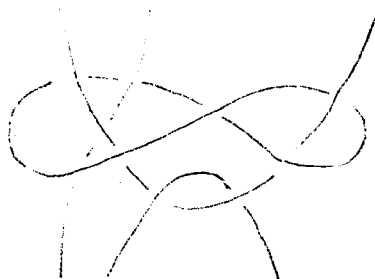


Fig. 2

Un entrelacs est un enchevêtrement sans bord. Définissons une *trousse* comme un enchevêtrement dont la projection régulière sur  $\mathbf{R} \times \{0\} \times [0, 1]$

est constituée des seules formes primitives



Fig. 3

Dans les années 1920, REIDEMEISTER a montré que deux projections régulières représentent des entrelacs (ou des enchevêtrements) isotopes (i.e. homotopes dans l'espace des plongements) si et seulement si on peut passer d'une projection à l'autre par un nombre fini de transformations, connues maintenant sous le nom de transformations de REIDEMEISTER. Nous en expliciterons quelques-unes plus loin.

1.2. Voici l'idée nouvelle qui a émergé ces dernières années, notamment des travaux de FREYD-YETTER [FY], de JOYAL-STREET [JS], de RESHETIKHIN-TURAEV [RT] [Tu2].

Considérons un enchevêtrement représenté par une projection régulière que nous découpons en "briques" constituées chacune d'une forme primitive. Attribuons une couleur  $V$  à chaque composante connexe de l'enchevêtrement. On colorie ainsi toutes les "briques". A chaque forme primitive coloriée, nous associons une étiquette conformément au Tableau 1.

Forme coloriée	Etiquette
	$id_v$
	$c_{v,w}$
	$c'_{v,w}$
	$d_v$
	$d'_v$

Tab.1

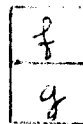
On convient que l'étiquette de la boîte vide est  $id_I$  où  $I$  est une couleur particulière fixée une fois pour toutes.

A chaque strate horizontale constituée de formes primitives étiquetées

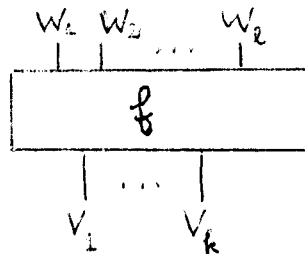


on associe l'expression formelle  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ .

Enfin on associe une étiquette à toute la projection en décidant que l'étiquette de deux boîtes superposées



est la "composée"  $f \circ g$  des étiquettes. Le terme de composition paraît ici bien choisi. En effet, l'opération de superposition n'est que partiellement définie : on ne peut superposer que des boîtes dont les bouts se "raboutent". On précise ceci en considérant l'étiquette  $f$  d'une boîte horizontale



comme une flèche

$$f : V_1 \otimes \dots \otimes V_k \longrightarrow W_1 \otimes W_2 \otimes \dots \otimes W_l.$$

où  $V_1, \dots, V_k$  (resp.  $W_1, \dots, W_l$ ) sont les couleurs des "bouts sortants" inférieurs (resp. supérieurs). Avec cette convention on voit qu'on peut superposer les boîtes  $\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}$  si et seulement la composition  $f \circ g$  existe.

1.3. Puisqu'on parle de flèches et de composition, il est naturel de colorier les composantes connexes de l'entrelacs avec les objets  $V$  d'une catégorie

$\mathcal{C}$  et de prendre les étiquettes parmi les flèches de  $\mathcal{C}$ . L'opération de "composition des étiquettes" sera par définition égale à la composition dans  $\mathcal{C}$ .

Pour l'opération  $\otimes$ , nous avons besoin d'une opération binaire  $\otimes$  sur les objets et sur les flèches de  $\mathcal{C}$  : en d'autres termes, à toute paire  $(V, W)$  d'objets de  $\mathcal{C}$ , on associe un objet  $V \otimes W$  et à toute paire  $(f : V \rightarrow W, f' : V' \rightarrow W')$  de flèches, on associe une flèche

$$f \otimes f' : V \otimes V' \longrightarrow W \otimes W'.$$

On suppose l'opération  $\otimes$  associative. On suppose aussi

a) que les opérations  $\otimes$  et  $\circ$  commutent, à savoir que

$$(f \circ g) \otimes (f' \circ g') = (f \otimes f') \circ (g \otimes g'),$$

b) que l'on a :  $\text{id}_V \otimes \text{id}_W = \text{id}_{V \otimes W}$ ,

c) qu'il existe un objet  $I$  qui est une unité pour  $\otimes$ , à savoir pour tout objet  $V$ , on a :

$$V \otimes I = V = I \otimes V$$

et que, pour toute flèche  $f$ , on a :  $f \otimes \text{id}_I = f = \text{id}_I \otimes f$ .

Dans toute la suite une catégorie munie d'un produit tensoriel  $\otimes$  vérifiant les propriétés ci-dessus sera appelé une *catégorie tensorielle*.

Résumons : étant donné une catégorie tensorielle  $\mathcal{C}$ , le procédé décrit dans 1.2 permet d'associer à toute projection régulière  $P$  d'un enchevêtrement  $L$  et à tout coloriage de  $L$ , son étiquette  $E_P$  qui est une flèche bien définie de la catégorie  $\mathcal{C}$ . Lorsque l'enchevêtrement  $L$  est sans bord, c'est à dire lorsque  $L$  est un entrelacs, l'étiquette  $E_P$  est un endomorphisme de l'objet unité  $I$ .

1.4. Pour que  $E_P$  soit un invariant d'isotopie de  $L$  et ne dépende pas de la projection  $P$  choisie, il convient que  $E_{P_1} = E_{P_2}$  chaque fois que les projections régulières  $P_1$  et  $P_2$  représentent des enchevêtrements isotopes.

A titre d'exemple, considérons les trois projections régulières coloriées

suivantes :

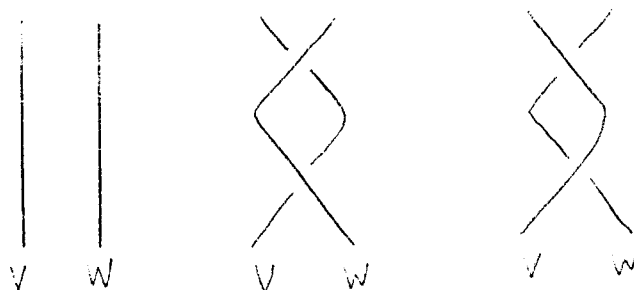


Fig.4

Leurs étiquettes respectives sont :

$$\text{id}_{V \otimes W} = \text{id}_V \otimes \text{id}_W, \quad c_{W,V} \circ c'_{V,W} \quad \text{et} \quad c'_{W,V} \circ c_{V,W}.$$

Comme les trois projections représentent clairement le même enchevêtrement à isotopie près, on doit avoir

$$c_{W,V} \circ c'_{V,W} = c'_{W,V} \circ c_{V,W} = \text{id}_{V \otimes W},$$

ce qui signifie que  $c_{V,W}$  est nécessairement inversible d'inverse  $c'_{W,V}$ .

Ceci nous amène, avec Joyal-Street [JS] à définir les catégories tensorielles tressées comme suit.

**DÉFINITION 1.5.** — *Une catégorie tensorielle  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  est tressée s'il existe des isomorphismes naturels, appelés "tressages",*

$$c_{V,W} : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$$

définis pour toute paire  $(V, W)$  d'objets de  $\mathcal{C}$  et tels que

- a) l'on ait :  $c_{V,I} = \text{id}_V = c_{I,V}$ ,
- b) les triangles

$$\begin{array}{ccc} U \otimes V \otimes W & \xrightarrow{c_{U,V \otimes W}} & V \otimes W \otimes U \\ c_{U,V} \otimes \text{id}_W \searrow & & \nearrow \text{id}_V \otimes c_{U,W} \\ & & V \otimes U \otimes W \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
 U \otimes V \otimes W & \xrightarrow{c_{U \otimes V, W}} & W \otimes U \otimes V \\
 \text{id}_U \otimes c_{V, W} \searrow & & \nearrow c_{U, W} \otimes \text{id}_V \\
 & U \otimes W \otimes V &
 \end{array}$$

commutent pour tout triplet  $(U, V, W)$  d'objets de  $\mathcal{C}$ .

Considérons les deux projections coloriées

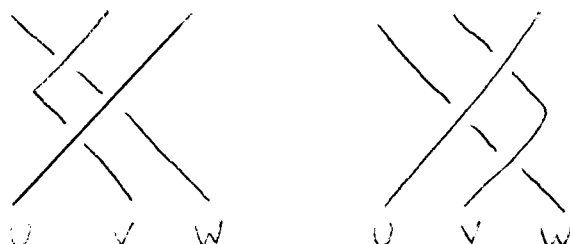


Fig. 5

qui représente des enchevêtrements isotopes (le brin du milieu glisse entre les deux autres). Le lemme suivant montre que leurs étiquettes sont égales lorsqu'on les prend à valeurs dans une catégorie tensorielle tressée.

1.6. LEMME. — *Dans une catégorie tensorielle tressée, on a*

$$\begin{aligned}
 & (c_{U, V} \otimes \text{id}_W)(\text{id}_V \otimes c_{U, W})(c_{V, W} \otimes \text{id}_U) \\
 & = (\text{id}_U \otimes c_{V, W})(c_{U, W} \otimes \text{id}_V)(\text{id}_W \otimes c_{U, V}).
 \end{aligned}$$

Lorsque  $U = V = W$ , l'identité précédente est connue sous le nom d'équation de YANG-BAXTER.

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned}
 & (c_{U, V} \otimes \text{id}_W)(\text{id}_V \otimes c_{U, W})(c_{V, W} \otimes \text{id}_U) \\
 & = c_{U, V \otimes W}(c_{V, W} \otimes \text{id}_U) \\
 & = (\text{id}_U \otimes c_{V, W})c_{U, W \otimes V} \\
 & = (\text{id}_U \otimes c_{V, W})(c_{U, W} \otimes \text{id}_V)(\text{id}_W \otimes c_{U, V}).
 \end{aligned}$$



La première et la dernière égalités résultent de 1.5.b tandis que la seconde est une conséquence de la functorialité des tressages.  $\square$

Dans les figures 4 et 5 nous avons donné des exemples de projections représentant des enchevêtrements isotopes et ayant les mêmes étiquettes à condition de les prendre dans une catégorie tensorielle tressée. On peut se demander quelles autres propriétés une catégorie tensorielle tressée doit vérifier pour que  $E_P$  soit un invariant d'isotopie.

Lorsqu'on ne considère que des tresses, aucune propriété supplémentaire n'est nécessaire. En effet, on peut montrer que deux projections régulières de tresses représentent des tresses isotopes si on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie de transformations au cours desquelles on substitue l'une quelconque des projections des figures 4 et 5 par une autre de la même figure.

Les considérations précédentes montrent donc que *l'étiquette  $E_P$  d'une projection  $P$  d'une tresse est un invariant d'isotopie de la tresse si on prend l'étiquette dans une catégorie tensorielle tressée.*

Pour ce qui est des enchevêtrements quelconques, la situation est plus compliquée et il convient de rajouter les relations engendrées dans la catégorie  $\mathcal{C}$  par des isotopies faisant intervenir les formes primitives  $\cap$  et  $\cup$ . En voici quelques-unes (le signe  $\sim$  représente la relation d'isotopie) :

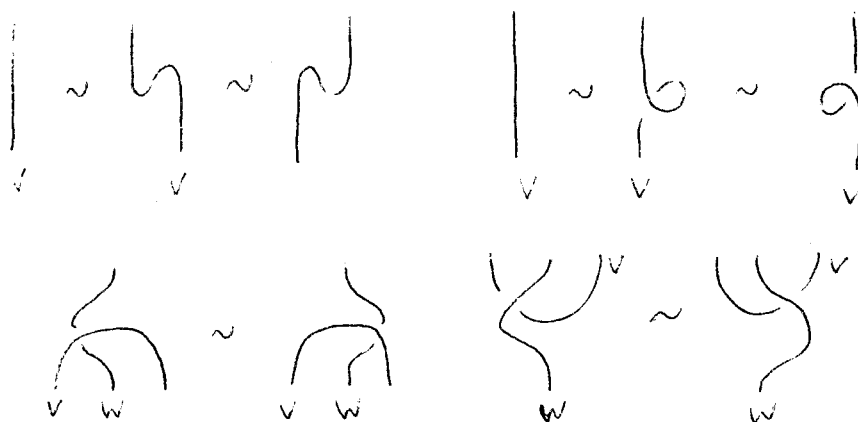


Fig. 6

Ce thème est sujet à de nombreuses variantes suivant qu'on enrichit plus ou moins les enchevêtrements ou les entrelacs de structures supplémentaires, comme d'une orientation, d'un champ de vecteurs normal (il revient au même de se donner des rubans enchevêtrés), etc ... A chaque

fois, il existe une liste finie d'axiomes supplémentaires que doit vérifier la catégorie tensorielle tressée considérée pour que l'étiquette  $E_P$  soit un invariant d'isotopie. On trouvera les détails dans [FY][RT][Tu2].

Le problème qui se pose maintenant est de trouver des catégories tensorielles tressées produisant des invariants non triviaux.

## 2. Exemples de catégories tensorielles tressées

Dans ce numéro, nous proposons quelques catégories tensorielles tressées. Celles qui sont susceptibles de donner des invariants des noeuds non triviaux sont essentiellement les catégories de représentations de ce que nous appellerons des bigèbres tressées ou cotressées.

2.1. Le premier exemple auquel on songe est la catégorie  $\mathcal{C} = k - \text{mod}$  des  $k$ -modules sur un anneau commutatif  $k$ , le produit tensoriel étant donné par

$$V \otimes W = V \otimes_k W.$$

Nous la considérons comme une catégorie tensorielle bien qu'elle ne satisfasse pas tout à fait à la définition donnée plus haut : en effet, le produit tensoriel des modules n'est associatif qu'à isomorphisme près et, de même, le module libre  $k$  n'est une unité pour le produit tensoriel qu'à isomorphisme près.

La catégorie  $k - \text{mod}$  est tressée lorsque pour  $c_{V,W}$  on prend la *volte* définie par

$$\sigma_{V,W}(v \otimes w) = w \otimes v.$$

La volte étant involutive, on a :

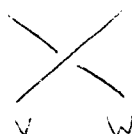
$$c_{W,V} \circ c_{V,W} = \text{id}_{V \otimes W}.$$

Lorsque cette propriété est vérifiée pour tout tressage d'une catégorie tressée, on dit que la catégorie est *symétrique*. Une catégorie symétrique ne donne pas naissance à un invariant intéressant car, dans ce cas, l'étiquette

$$c'_{V,W} = c_{W,V}^{-1} \text{ de}$$



est égale à l'étiquette  $c_{V,W}$  de



ce qui a pour conséquence que l'étiquette d'un enchevêtrement est égale à celle d'un enchevêtrement *trivial*. En effet, l'échange des brins du dessus et des brins du dessous permet de "dénouer" n'importe quel enchevêtrement. On constate que le procédé de 1.2 appliqué à une catégorie symétrique compte au mieux le nombre de composantes connexes d'un enchevêtrement !

2.2. Voici un exemple élémentaire, mais non trivial. Soit  $k = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  l'anneau des polynômes de Laurent en une variable  $q$  et  $V$  un  $k$ -module libre de base  $\{v_0, v_1\}$ . On définit un automorphisme  $c_{V,V}$  de  $V \otimes V$  par sa matrice

$$\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & q - q^{-1} \end{pmatrix}$$

dans la base  $\{v_0 \otimes v_0, v_1 \otimes v_1, v_0 \otimes v_1, v_1 \otimes v_0\}$ .

*Exercice* : Montrer que  $c_{V,V}$  vérifie l'équation de YANG-BAXTER et que

$$c_{V,V} - c_{V,V}^{-1} = (q - \frac{1}{q}) \text{id}_{V \otimes V}.$$

L'automorphisme  $c_{V,V}$  n'est pas involutif, ce qui est de bonne augure. Mieux, en coloriant la projection régulière d'un entrelacs  $L$  de la seule couleur  $V$  et en appliquant le procédé de 1.2, on obtient un élément de  $\text{End}_k(k) = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  qui n'est autre, à une normalisation près, que le polynôme découvert par JONES en 1984. Le fait que le polynôme minimal

de  $c_{V,V}$  soit quadratique mène aux *relations d'écheveau* (en anglais "skein relations") satisfaites par le polynôme de JONES (cf. [Tu 1]).

Nous verrons plus loin que l'automorphisme  $c_{V,V}$  de ce paragraphe est un cas particulier d'une construction générale liée à l'algèbre de Lie simple  $\mathfrak{sl}(2)$ .

2.3. Soit  $(A, \Delta, \varepsilon)$  la donnée d'une  $k$ -algèbre associative unifère et de deux morphismes d'algèbres

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A \quad \text{et} \quad \varepsilon : A \longrightarrow k$$

appelés respectivement comultiplication et coïunité de  $A$ . La coïunité munit  $k$  d'une structure de  $A$ -module. D'autre part, si  $V, W$  sont deux  $A$ -modules à gauche, la comultiplication munit  $V \otimes_k W$  d'une structure de  $A$ -module à gauche. Celle-ci est donnée par la formule

$$a \cdot (v \otimes w) = \Delta(a)(v \otimes w)$$

où  $a \in A$ ,  $v \in V$  et  $w \in W$ .

On vérifie alors que les isomorphismes canoniques

$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W) \quad \text{et} \quad k \otimes V \cong V \cong V \otimes k$$

sont  $A$ -linéaires pour tout  $U, V, W$  si et seulement si on a :

$$(\Delta \otimes \text{id}_A)\Delta = (\text{id}_A \otimes \Delta)\Delta \tag{2.3.a}$$

et  $(\varepsilon \otimes \text{id}_A)\Delta = \text{id}_A = (\text{id}_A \otimes \varepsilon)\Delta. \tag{2.3.b}$

On retrouve ainsi la notion de *bigèbre* qui est la donnée  $(A, \Delta, \varepsilon)$  d'une algèbre munie d'une comultiplication et d'une coïunité vérifiant (2.3.a) et (2.3.b). La catégorie  $A\text{-mod}$  des modules à gauche sur une bigèbre  $A$  est donc une sous-catégorie tensorielle de la catégorie tensorielle  $k\text{-mod}$ .

Parmi les exemples classiques de bigèbres, figurent l'algèbre  $k[G]$  d'un groupe  $G$  et l'algèbre enveloppante  $U(\mathfrak{g})$  d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Dans le cas de  $k[G]$ , la comultiplication et la coïunité sont données par

$$\Delta(x) = x \otimes x \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) = 1$$

si  $x \in G$ . Dans le cas de  $U(\mathfrak{g})$ , on a :

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) = 0$$

si  $x \in \mathfrak{g}$ . Les bigèbres  $k[G]$  et  $U(\mathfrak{g})$  ont la propriété supplémentaire d'être *cocommutatives*; ceci signifie qu'on a

$$\Delta = \Delta^{op}$$

où la comultiplication opposée  $\Delta^{op}$  est définie comme la composée de  $\Delta$  et de la volte  $\sigma_{A,A}$  de  $A \otimes A$ . Lorsqu'une bigèbre  $A$  est cocommutative, alors pour toute paire  $(V, W)$  de  $A$ -modules, la volte  $\sigma_{V,W}$  est  $A$ -linéaire. La réciproque est vraie. La catégorie tensorielle  $A\text{-mod}$  d'une bigèbre cocommutative est donc symétrique et, à ce titre, présente peu d'intérêt pour la théorie des noeuds.

2.4. On peut caractériser les bigèbres  $(A, \Delta, \varepsilon)$  dont la catégorie tensorielle  $A\text{-mod}$  est tressée de la manière suivante.

PROPOSITION 2.5. — *Soit  $(A, \Delta, \varepsilon)$  une bigèbre. Alors la catégorie tensorielle  $A\text{-mod}$  est tressée si et seulement s'il existe un élément inversible  $R$  de  $A \otimes A$  tel que pour tout  $a \in A$ , on ait :*

$$\Delta^{op}(a) = R\Delta(a)R^{-1}$$

et

$$(\Delta \otimes \text{id}_A)(R) = R_{13}R_{23} \quad \text{et} \quad (\text{id}_A \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$$

où on a posé :  $R_{12} = R \otimes 1$ ,  $R_{23} = 1 \otimes R$  et  $R_{13} = (\text{id}_A \otimes \sigma_{A,A})(R_{12})$ .

De plus dans la catégorie  $A\text{-mod}$ , les tressages  $c_{V,W} : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$  sont donnés par

$$c_{V,W}(v \otimes w) = \sigma_{V,W}(R(v \otimes w))$$

pour  $v \in V$  et  $w \in W$ .

Une bigèbre vérifiant les conditions de la proposition 2.5 sera dite *tressée* (DRINFELD [Dr] utilise la terminologie "quasi-triangulaire"). L'élément  $R$  est souvent appelé *R-matrice universelle*.

Une bigèbre cocommutative est toujours tressée : il suffit de prendre  $R = 1 \otimes 1$ .

2.6. Soit  $(A, \Delta, \varepsilon)$  une bigèbre. Il existe une notion duale de celle de  $A$ -module : c'est celle de  $A$ -comodule. Rappelons qu'un  $k$ -module  $V$  est un  $A$ -comodule à gauche s'il existe une application  $\Delta_V : V \rightarrow A \otimes V$  telle que

$$(\text{id}_A \otimes \Delta_V)\Delta_V = (\Delta \otimes \text{id}_V)\Delta \quad \text{et} \quad (\varepsilon \otimes \text{id}_V)\Delta_V = \text{id}_V.$$

Notons  $A\text{-comod}$  la catégorie des  $A$ -comodules. L'unité  $k \rightarrow A = A \otimes k$  munit  $k$  d'une structure naturelle de  $A$ -comodule. De même si  $V$  et  $W$  sont des  $A$ -comodules, le produit tensoriel  $V \otimes_k W$  est un  $A$ -comodule via l'application

$$V \otimes W \xrightarrow{\Delta_V \otimes \Delta_W} A \otimes V \otimes A \otimes W \xrightarrow{\text{id}_A \otimes \sigma_{V,A} \otimes \text{id}_W} A \otimes A \otimes V \otimes W \xrightarrow{\mu \otimes \text{id}_V \otimes \text{id}_W} A \otimes V \otimes W$$

où  $\mu$  est la multiplication sur  $A$ .

*Exercice* : vérifier que lorsque  $A$  est une bigèbre, la catégorie  $A\text{-comod}$  est une sous-catégorie tensorielle de la catégorie tensorielle  $k\text{-mod}$ .

Par analogie avec 2.4, on dira qu'une bigèbre  $A$  est *cotressée* si la catégorie tensorielle  $A\text{-comod}$  est tressée. Il existe une version duale de la proposition 2.5; elle caractérise une bigèbre cotressée comme une bigèbre  $A$  munie d'une forme linéaire  $r : A \otimes A \rightarrow k$  vérifiant des conditions duales de celles vérifiées par une  $R$ -matrice universelle (pour les trouver, écrire les conditions de la proposition 2.5 sous forme de diagrammes commutatifs et renverser le sens des flèches!)

2.7. *Théorèmes de reconstruction*. Lorsque  $A$  est une bigèbre, les foncteurs "oubli"

$$\Phi : A\text{-mod} \longrightarrow k\text{-mod} \quad \text{et} \quad \tilde{\Phi} : A\text{-comod} \longrightarrow k\text{-mod}$$

sont des foncteurs tensoriels, à savoir ils préservent le produit tensoriel et envoient l'unité de la catégorie tensorielle source sur l'unité de la catégorie tensorielle but.

Soit maintenant  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  une catégorie tensorielle et  $F$  un foncteur tensoriel dans la catégorie  $k\text{-mod}_f$  des  $k$ -modules projectifs de type fini. Alors il existe une bigèbre  $A_F$  et un foncteur tensoriel  $\tilde{F}$  de la catégorie  $\mathcal{C}$  dans la catégorie  $A\text{-comod}_f$  des  $A$ -comodules qui sont projectifs de type fini sur  $k$  tels que

a) le triangle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & k - \text{mod} \\ \tilde{F} \searrow & & \nearrow \Phi \\ & & A_F - \text{comod}_f \end{array}$$

commute et

b) la bigèbre  $A_F$  soit universelle pour la propriété (a). Si de plus  $\mathcal{C}$  est tressée, alors  $A_F$  est cotressée.

Un énoncé du type précédent est appelé un théorème de reconstruction. Il affirme que toute catégorie tensorielle tressée munie d'un foncteur tensoriel vers la catégorie  $k - \text{mod}_f$  est essentiellement la catégorie des comodules sur une bigèbre cotressée. Cette dernière joue le rôle de "groupe de symétrie" de la situation. C'est une généralisation de la situation "tannakienne" étudiée par GROTHENDIECK et son école (voir [SR] [DM] [De]) où  $\mathcal{C}$  est une catégorie tensorielle symétrique et  $F$  est un foncteur tensoriel tel que  $F(c_{V,W}) = \sigma_{F(V),F(W)}$ . Dans ce cas  $A_F$  est une bigèbre commutative qui, souvent, est la bigèbre des fonctions régulières sur un groupe algébrique  $G$ .

Décrivons  $A_F$ . Comme  $k$ -module, c'est le quotient de la somme directe

$$\bigoplus_{V \in \text{Ob}(\mathcal{C})} F(V)^* \otimes F(V) = \bigoplus_{V \in \text{Ob}(\mathcal{C})} \text{End}(F(V))$$

par le sous- $k$ -module engendré par tous les éléments de la forme

$$\alpha \otimes F(f)(v) - F(f)^*(\alpha) \otimes v$$

où  $f : V \rightarrow W$  est une flèche de  $\mathcal{C}$ ,  $v$  est un élément de  $F(V)$  et  $\alpha$  une forme linéaire sur  $F(W)$ .

La multiplication de  $A_F$  est induite par les isomorphismes

$$\text{End}(F(V)) \otimes \text{End}(F(W)) \cong \text{End}(F(V) \otimes F(W)) \cong \text{End}(F(V \otimes W)),$$

l'unité étant l'application identité de  $\text{End}(F(I)) = \text{End}(k) = k$ . La coïunité de  $A_F$  est induite par l'évaluation

$$F(V)^* \otimes F(V) \longrightarrow k,$$

tandis que la comultiplication l'est par

$$F(V)^* \otimes F(V) \xrightarrow{\text{id} \otimes \eta \otimes \text{id}} (F(V)^* \otimes F(V)) \otimes (F(V)^* \otimes F(V))$$

où  $\eta : k \rightarrow F(V) \otimes F(V)^* \cong \text{End}(F(V))$  est la coévaluation définie par  $\eta(1) = \text{id}_{F(V)}$ .

Si  $\mathcal{C}$  est tressée au moyen de tressages  $c_{V,W}$ , alors  $A_F$  possède une "co- $R$ -matrice universelle"  $r : A_F \otimes A_F \rightarrow k$  induite par l'application

$$(\alpha \otimes v) \otimes (\beta \otimes w) \mapsto \langle \beta \otimes \alpha, F(c_{V,W})(v \otimes w) \rangle$$

où  $\alpha \in F(V)^*, \beta \in F(W)^*, v \in F(V)$  et  $w \in F(W)$ . Pour plus de détails, lire [Ye1][Ye2].

### 2.8. Application à une construction de FADDEEV-RESHETIKHIN-TAKHTAJIAN [RTF].

Considérons la catégorie  $\mathcal{B}$  dont les morphismes sont les tresses que l'on compose et tensorise en les superposant ou en les juxtaposant comme au n° 1. Les objets de  $\mathcal{B}$  forment l'ensemble  $\mathbf{N}$  des entiers naturels, le but et la source d'une tresse étant le nombre de ses brins (on considère également la tresse vide à 0 brin). Le produit tensoriel de deux objets est donné par l'addition dans  $\mathbf{N}$  :

$$n \otimes m = n + m.$$

La catégorie  $\mathcal{B}$  est tressée : pour toute paire  $(n, m)$  d'entiers strictement positifs, le tressage  $c_{n,m} : n \otimes m \rightarrow m \otimes n$  est la tresse à  $(n + m)$  brins représentée dans la Figure 7.

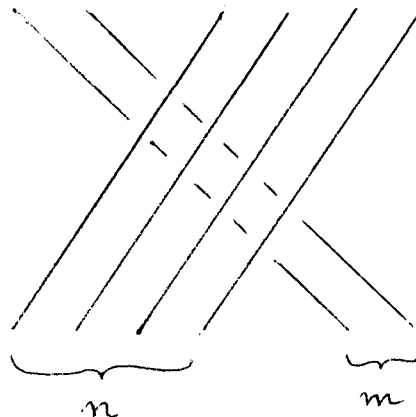


Fig.7



*Exercice* : montrer que les tressages  $c_{n,m}$  vérifient les conditions de la définition 1.5.

La catégorie des tresses a la propriété universelle suivante : il y a équivalence entre la donnée  $(V, c_{V,V})$  d'un  $k$ -module  $V$  et d'un automorphisme  $c_{V,V}$  de  $V \otimes V$  vérifiant l'équation de YANG-BAXTER (voir lemme 1.6) et la donnée d'un foncteur tensoriel  $F : \mathcal{B} \rightarrow k - \text{mod}$ . Dans un sens, on associe au foncteur  $F$  le  $k$ -module  $V = F(1)$  et l'automorphisme  $c_{V,V} = F(c_{1,1})$ . Dans l'autre, on définit  $F$  à partir de  $V$  et  $c_{V,V}$  par

$$F(n) = V^{\otimes n} \quad \text{et} \quad F(c_{1,1}) = c_{V,V},$$

puis on applique le procédé de 1.2 pour définir  $F$  sur une tresse quelconque.

Nous montrons maintenant comment la considération de la catégorie des tresses et du théorème de reconstruction de 2.7 permet d'associer naturellement à toute solution vectorielle  $c$  de l'équation de YANG-BAXTER une bigèbre tressée  $A_c$ .

Soit  $V$  un  $k$ -module libre de base finie  $\{v_1, \dots, v_d\}$  et  $c$  un automorphisme de  $V \otimes V$  solution de l'équation de YANG-BAXTER. D'après ce qui vient d'être dit, il lui correspond un unique foncteur tensoriel  $F_c$  de  $\mathcal{B}$  dans  $k - \text{mod}_f$ . D'après 2.7 on peut associer à  $F_c$  une bigèbre cotressée  $A_c$ . Il n'est pas difficile de voir que  $A_c$  est l'algèbre engendrée par  $d^2$  variables  $(T_j^i)_{1 \leq i, j \leq d}$  et les relations (pour tous  $i, j, k, \ell$ )

$$\sum_{1 \leq m, n \leq d} T_n^\ell T_m^j c_{ik}^{nm} = \sum_{1 \leq m, n \leq d} c_{mn}^{\ell j} T_i^m T_k^n$$

où les coefficients  $c_{ij}^{k\ell}$  sont définis par

$$c(v_i \otimes v_j) = \sum_{1 \leq k, \ell \leq d} c_{ij}^{k\ell} v_k \otimes v_\ell.$$

La comultiplication et la coïunité de  $A_c$  sont donnés par

$$\Delta(T_j^i) = \sum_{1 \leq k \leq d} T_k^i \otimes T_j^k \quad \text{et} \quad \varepsilon(T_j^i) = \delta_{ij} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

Il existe une structure de  $A_c$ -comodule sur  $V$  donnée par la formule

$$\Delta_V(v_i) = \sum_{1 \leq j \leq d} T_j^i \otimes v_j.$$

La “co- $R$ -matrice universelle” donnée par

$$r(T_j^i \otimes T_\ell^k) = c_{ik}^{\ell j}.$$

induit l’automorphisme originel  $c$  sur le comodule  $V$ .

La bigèbre  $A_c$  a été définie directement dans [RTF] sans passer par le formalisme tensoriel.

2.9. La construction précédente appliquée à la matrice d’ordre 4 de 2.2 donne une bigèbre  $M_q(2)$  engendrée par les quatre variables

$$T_{11} = a \quad T_{12} = b \quad T_{21} = c \quad T_{22} = d$$

et les six relations

$$\begin{aligned} ba &= qab & db &= qbd \\ ca &= qac & dc &= qcd \\ bc &= cb & da - ad &= (q - q^{-1})bc. \end{aligned}$$

Lorsque  $q = 1$ , la bigèbre  $M_q(2)$  est l’algèbre des fonctions régulières sur l’algèbre des matrices d’ordre 2, munie de la comultiplication induite par le produit des matrices.

### 3. Groupes quantiques

3.1. Au n° 2 nous avons essentiellement ramené le problème de trouver des catégories tensorielles tressées à celui de construire des bigèbres tressées ou cotressées. La théorie des groupes quantiques développés à l’origine par l’école de FADDEEV fournit de nombreux exemples géométriques de bigèbres (co)tressées.

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie simple complexe et  $K = \mathbf{C}[[h]]$  l’anneau des séries formelles à coefficients complexes. DRINFELD [Dr] et JIMBO [Ji] associent à  $\mathfrak{g}$  une  $K$ -bigèbre tressée  $(U_h \mathfrak{g}, R)$  telle que

a) la bigèbre  $U_h \mathfrak{g}/hU_h \mathfrak{g}$  soit isomorphe à la bigèbre enveloppante  $U(\mathfrak{g})$  de l’algèbre de Lie,

b) la  $R$ -matrice universelle  $R$  vérifie :  $R \equiv 1 \otimes 1$  modulo  $h$ .

La bigèbre  $U_h(\mathfrak{g})$  est une déformation non commutative et non cocommutative de  $U(\mathfrak{g})$ . LUSZTIG [Lu] et ROSSO [Ro] ont montré que les représentations de  $U_h(\mathfrak{g})$  sont essentiellement équivalentes à celles de  $\mathfrak{g}$ . En particulier, on peut déformer tout  $\mathfrak{g}$ -module simple de dimension finie en un  $U_h(\mathfrak{g})$ -module simple.

3.2. Décrivons en détail  $U_h(\mathfrak{g})$  lorsque  $\mathfrak{g}$  est l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2)$  des matrices d'ordre 2 et de trace nulle. Dans ce cas,  $U_h\mathfrak{sl}(2)$  est la  $K$ -algèbre  $h$ -adiquement engendrée par trois variables  $X, Y, H$  et les relations

$$\begin{aligned} [H, X] &= 2X & [H, Y] &= -2Y \\ [X, Y] &= \frac{e^{hH/2} - e^{-hH/2}}{e^{h/2} - e^{-h/2}}. \end{aligned}$$

Ici l'exponentielle est considérée comme une série formelle et tout élément de  $U_h\mathfrak{sl}(2)$  s'écrit comme une série formelle de la forme

$$\sum_{n \geq 0} P_n(X, Y, H) h^n$$

où  $(P_n(X, Y, H))_n$  est une famille infinie de polynômes non commutatifs en  $X, Y$  et  $H$ . Lorsque  $h = 0$ , on retrouve les relations de définition de  $\mathfrak{sl}(2)$ , à savoir

$$[H, X] = 2X \quad [H, Y] = -2Y \quad [X, Y] = H.$$

Les formules pour la comultiplication de  $U_h\mathfrak{sl}(2)$

$$\begin{aligned} \Delta(X) &= X \otimes e^{hH/4} + e^{-hH/4} \otimes X \\ \Delta(Y) &= Y \otimes e^{hH/4} + e^{-hH/4} \otimes Y \\ \Delta(H) &= H \otimes 1 + 1 \otimes H \end{aligned}$$

montrent que c'est bien une déformation non cocommutative de la comultiplication cocommutative de la bigèbre enveloppante.

3.3. Pour décrire la  $R$ -matrice universelle, posons

$$q = e^{h/2} \quad \text{et} \quad [n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

pour tout entier  $n$ . Si  $n \geq 1$ , on définit aussi  $[n]! = [1][2] \dots [n]$ . Posons  $[0]! = 1$ .

La formule suivante définit une  $R$ -matrice universelle pour  $U_h\mathfrak{sl}(2)$  :

$$R = \sum_{\ell \geq 0} \frac{(q - q^{-1})^\ell}{[\ell]!} q^{-\ell(\ell+1)/2} e^{\frac{h}{4}(H \otimes H + \ell H \otimes 1 - 1 \otimes \ell H)} (X^\ell \otimes Y^\ell).$$

3.4. On sait que les  $\mathfrak{sl}(2)$ -modules simples de dimension finie sont classifiés par leur dimension. C'est encore vrai dans le cas quantique : en effet, soit  $V_n$  un  $K$ -module libre de base  $\{v_0, \dots, v_n\}$ . Alors il existe un unique morphisme d'algèbres

$$\rho_n : U_h \mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}_K(V_n)$$

défini sur la base précédente par les matrices

$$\rho_n(H) = \begin{pmatrix} n & & & & \\ & n-2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & -n+2 & \\ & & & & -n \end{pmatrix}$$

$$\rho_n(X) = \begin{pmatrix} 0 & [n] & & & 0 \\ & 0 & [n-1] & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & [1] \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\rho_n(Y) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ [1] & 0 & & & 0 \\ & [2] & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & [n] & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi tous les  $U_h \mathfrak{sl}(2)$  modules simples qui sont libres de type fini sur  $K$ .

La  $R$ -matrice universelle décrite en 3.3 induit, conformément à la proposition 2.5, des tressages

$$c_{n,m} : V_n \otimes V_m \longrightarrow V_n \otimes V_m$$

qu'on peut calculer explicitement pour toute paire d'entiers  $(n, m)$ . Lorsque  $n = m = 1$ , on trouve que le tressage  $c_{1,1}$  associée à la représentation

fondamentale  $V_1$  de rang 2 n'est autre, à un facteur  $q^{-1/2}$  près, que la matrice d'ordre 4 de 2.2 qui donne naissance au polynôme de JONES.

3.5. Bouclons la boucle en montrant comment recouvrir la bigèbre  $A_c$  associée par [RTF] à cette matrice d'ordre 4. Considérons à nouveau la représentation fondamentale  $V_1$  de  $U_h \mathfrak{sl}(2)$ . Pour tout  $u \in U_h \mathfrak{sl}(2)$ , posons

$$\rho_1(u) = \begin{pmatrix} a(u) & b(u) \\ c(u) & d(u) \end{pmatrix}.$$

Les quatre formes linéaires  $a, b, c, d$  ainsi définies sur  $U_h \mathfrak{sl}(2)$  engendrent une bigèbre cotressée  $SL_q(2)$  qui est une déformation de la bigèbre des fonctions régulières sur le groupe algébrique  $SL_2$ . Comme algèbre,  $SL_q(2)$  est engendrée par les variables  $a, b, c, d$  et les six relations de définition de la bigèbre  $M_q(2)$  de 2.9 auxquelles s'ajoute la relation

$$ad - \frac{1}{q}bc = 1.$$

Cette dernière exprime que le "déterminant quantique"  $ad - q^{-1}bc = da - qbc$  vaut 1.

Le lecteur intéressé trouvera d'autres exemples dans les articles de synthèse de [Ca] et [Mj].

## Références

[Ca] P. CARTIER. — *Développements récents sur les groupes de tresses. Applications à la topologie et l'algèbre*, Sémin. Bourbaki n° 716, 1989–90.

[De] P. DELIGNE. — *Catégories tannakiennes*, The Grothendieck Festschrift, vol. II, Progress in Math. 87, 1990, p. 111–195, Birkhäuser.

[DM] P. DELIGNE, J.S. MILNE. — *Tannakian categories*, Lect. Notes in Math. 900, 1982, p. 101–228, Springer Verlag.

- [Dr] V. G. DRINFELD. — *Quantum groups*, Proc. ICM Berkeley 1986, vol 1, 1987, p. 798–820.
- [FY] P. FREYD, D. YETTER. — *Braided compact closed categories with applications to low dimensional topology*, Adv. Math. 77, 1989, p. 156–182.
- [Ji] M. JIMBO. — *A  $q$ -difference analogue of  $U(\mathfrak{g})$  and the Yang-Baxter equation*, Letters Math. Phys. 10, 1985, p. 63–69.
- [JS] A. JOYAL, R. STREET. — *Braided tensor categories*, Macquarie Math. Report, 1986.
- [Lu] G. LUSZTIG. — *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras*, Adv. Math. 70, 1989, p. 237–249.
- [Mj] S. MAJID. — *Quasitriangular Hopf algebras and Yang-Baxter equations*, Int. J. Modern Phys. A 5(1), 1990, p. 1–91.
- [RTF] N. Yu. RESHETIKHIN, L.A. TAKHTAJIAN, L.D. FADDEEV. — *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J. 1, 1990, p. 193–225.
- [RT] N. Yu. RESHETIKHIN, V.G. TURAEV. — *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Commun. Math. Phys. 127, 1990, p. 1–26.
- [Ro] M. ROSSO. — *Finite dimensional representations of the quantum analogue of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra*, Commun. Math. Phys. 117, 1988, p. 581–593.
- [SR] S. SAAVEDRA RIVANO. — *Catégories tannakiennes*, Lect. Notes in Math. 265, Springer Verlag, 1972.
- [Tu 1] V. G. TURAEV. — *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. 92, 1988, p. 527–553.

[Tu 2] V. G. TURAEV. — *Operator invariants of tangles and R-matrices*, Math. USSR Izv. 35, 1990, p. 411–444.

[Ye 1] D. N. YETTER. — *Quantum groups and representations of monoidal categories*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 108, 1990, p. 261–290.

[Ye 2] D. N. YETTER. — *Coalgebras, comodules, coends and reconstruction*, preprint.

Institut de Recherche Mathématique Avancée,  
Université Louis-Pasteur - C.N.R.S.  
7, rue René Descartes  
67084 Strasbourg, France  
Email : kasselàfrccsc21.bitnet